УДК 517.2

М.В. Хасамбиев
ФГБОУ ВПО «МГСУ»

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

Выписано в явном виде решение первой краевой задачи для многомерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии. Приведено доказательство того, что найденное решение краевой задачи удовлетворяет заданным краевым условиям.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, дробная производная, функция Миттаг-Леффлера, собственные функции, метод Фурье, коэффициенты Фурье.

Работа посвящена решению первой краевой задачи для многомерного дифференциального уравнения адвекции-диффузии

$$\begin{cases} D_t^{\gamma} u(x, y, t) = D_x^{\alpha} u(x, y, t) + D_y^{\beta} u(x, y, t); & (1) \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = 0; & (2) \\ u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0; & (3) \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & (4) \end{cases}$$

где $D_x^{\alpha} u(x, y, t), D_y^{\beta} u(x, y, t), D_t^{\gamma} u(x, y, t)$ — производные дробного (в смысле Римана — Лиувилля) порядка, где $0 < \gamma < 2$, $1 < \alpha, \beta < 2$ [1].

Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают при описании многих физических процессов стохастического переноса при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде [1—8]. Иногда подобные уравнения называют еще уравнениями медленной диффузии (субдиффузии). При этом следует заметить, что порядок дробной производной связан с размерностью фрактала [9—11].

Дифференциальное уравнение диффузии дробного порядка (1) описывает эволюцию некоторой физической системы с потерями, причем показатели α, β и γ дробных производных указывают на долю состояний системы, сохраняющихся за все время эволюции. Такие системы могут быть классифицированы как системы с «остаточной памятью», занимающие промежуточное положение между системами, обладающими «полной памятью», с одной стороны, и марковскими системами, с другой.

В данной работе в явном виде выписано решение краевой задачи для многомерного дробного дифференциального уравнения.

Итак, рассматривается *краевая задача* (1)—(4). Имеет место следующая *теорема*:

Функция $u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} E_{\gamma,1}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)t^{\gamma}\right) x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right) y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right)$

является решением задачи (1)—(4).

© Хасамбиев М.В., 2015

Здесь $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\beta+\alpha k)}$ — известная функция Миттаг-Леффлера, а $\varphi_{n,m}$ — соответствующие коэффициенты Фурье [1].

Доказательство. Будем искать такое непрерывное в замкнутой области ($0 \le x, y \le 1$, $0 \le t \le T$) решение дробного дифференциального уравнения (1), которое удовлетворяло бы заданным однородным граничным условиям (2), (3) и начальному условию (4).

Вообще, как принято при решении подобных задач методом Фурье, сначала рассмотрим основную вспомогательную задачу. Суть этой вспомогательной задачи заключается в нахождении нетривиального решения уравнения (1), удовлетворяющего однородным граничным условиям (2), (3). Представим искомое решение $u(x, y, t)$ задачи (1)—(4) в виде произведения:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \tag{5}$$

где $X(x)$ — функция, зависящая только от переменной x; $Y(y)$ — функция, зависящая только от переменной y; $T(t)$ — функция, зависящая только от переменной t. Подставив предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1) и разделив обе части этого уравнения на произведение $X(x)Y(y)T(t)$, получим уравнение

$$\frac{D_t^{\gamma}T(t)}{T(t)}=\frac{D_x^{\alpha}X(x)}{X(x)}+\frac{D_y^{\beta}Y(y)}{Y(y)}. \tag{6}$$

В уравнении (6) положим $\frac{D_x^{\alpha}X(x)}{X(x)}=\lambda, \frac{D_y^{\beta}Y(y)}{Y(y)}=l,$ тогда $\frac{D_t^{\gamma}T(t)}{T(t)}=\lambda+l.$

Из последних соотношений следует:

$$D_x^{\alpha}X(x)=\lambda X(x),\ 1<\alpha<2; \tag{7}$$

$$D_y^{\beta}Y(y)=lY(y),\ 1<\beta<2; \tag{8}$$

$$D_t^{\gamma}T(t)=(\lambda+l)T(t),\ 0<\gamma<2. \tag{9}$$

В таком случае, граничные условия (2), (3) дают:

$$X(0) = 0,\ X(1) = 0; \tag{10}$$

$$Y(0) = 0,\ Y(1) = 0. \tag{11}$$

Таким образом, для определения функций $X(x)$ и $Y(y)$ мы получили так называемые задачи Штурма — Лиувилля (7), (10) и (8), (11) (задачи на собственные значения) вида

$$D_x^{\alpha}\omega(x)=\lambda\omega(x),\ \omega(0)=0,\ \omega(1)=0,\ 1<\alpha<2,\ 0\le x\le 1. \tag{12}$$

Задача вида (12) изучена в [1, 13, 14]. В этих работах показано, что только для собственных значений λ_n, являющихся нулями функции $E_{\alpha,\alpha}(\lambda)$, существуют собственные функции задачи (12), равные $\omega_n(x)=x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right)$.

Из вышесказанного следует, что собственные функции $X_n(x)$ и $Y_m(y)$ задач (7), (10) и (8), (11), соответствующие собственным значениям λ_n и l_m соответственно будут равны:

$$X_n(x)=x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right); \tag{13}$$

$$Y_m(y) = y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right). \tag{14}$$

Уравнение вида (9) изучено в [13, 14], в которых показано, что собственным значениям $\left(\lambda_n + l_m\right)$, являющимся нулями функции $E_{\gamma,1}(\lambda + l)$, соответствуют собственные функции вида $T_{n,m}(t) = \varphi_{n,m} E_{\gamma,1}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)t^{\gamma}\right)$, где $\varphi_{n,m}$ — неопределенные пока коэффициенты.

Если вернуться к основной вспомогательной задаче, то видно, что функции

$$u_{n,m}(x, y, t) = \varphi_{n,m} E_{\gamma,1}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)t^{\gamma}\right) x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right) y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right)$$

представляют собой частные решения уравнения (1), которые удовлетворяют нулевым граничным условиям (2), (3).

Далее обратимся к решению исходной задачи (1)—(4). Формально составим ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} E_{\gamma,1}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)t^{\gamma}\right) x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right) y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right). \tag{15}$$

Функция $u(x, y, t)$ представленная в виде ряда (15), удовлетворяет заданным граничным условиям (2), (3), так как этим условиям удовлетворяют все члены ряда (15). Потребовав теперь выполнения начального условия (4) для ряда (15), мы получим

$$\varphi(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \varphi_{n,m} x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right) y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right). \tag{16}$$

В [15] было показано, что система функций вида $\omega_n = \left\{x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в $L_2(0,1)$. Так как базис $\omega_n = \left\{x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ не ортогональный, то вместе с системами (13) и (14) будем рассматривать системы

$$\bar{X}_n(x) = \left\{(1-x)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n (1-x)^{\alpha}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} \tag{17}$$

и

$$\bar{Y}_m(y) = \left\{(1-y)^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(l_m (1-y)^{\beta}\right)\right\}_{m=1}^{\infty}, \tag{18}$$

которые являются биортогональными к системам (13) и (14) соответственно [16, 17]. Вообще говоря, системы (17) и (18) — это системы собственных функций задач, сопряженных с задачами (7), (10) и (8), (11) соответственно [18].

Теперь неизвестные коэффициенты $\varphi_{n,m}$ можно определить из равенства (16) с помощью систем функций (17) и (18):

$$\varphi_{n,m} = \left(\varphi(x, y), \bar{X}_n \bar{Y}_m\right), \tag{19}$$

где $\left(\varphi(x, y), \bar{X}_n \bar{Y}_m\right)$ — скалярное произведение функций $\varphi(x, y)\dfrac{\partial^2 \Omega}{\partial \nu^2}$ и $\bar{X}_n \bar{Y}_m$.

Покажем теперь, что ряд (15) с коэффициентами $\varphi_{n,m}$, которые определяются по формуле (19) удовлетворяет всем условиям исходной задачи (1)—(4). Для этого необходимо доказать, что функция, которая определяется рядом (15) дифференцируема, удовлетворяет уравнению (1) в области $0 < x, y < 1$, $t > 0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$).

Отметим, что уравнение (1) линейно. Поэтому, ряд, составленный из его частных решений, в силу принципа суперпозиции, также будет являться решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно один раз по $t(0 < \gamma < 2)$ и дважды по x и по $y(1 < \alpha, \beta < 2)$.

Докажем, что для любых $0 < x, y < 1$ и $0 \le t \le T$ ряд (15) сходится абсолютно. Так как достаточно большие по модулю нули l_n функции $E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^\alpha\right)$ находятся вне замкнутого угла $\left\{\lambda_n : \left|\arg\left(\lambda_n\right)\right| \le \frac{\alpha\pi}{2}\right\}$, то $\arg\left(\lambda_n\right) > \frac{\pi}{2}$ [19]. В этом случае справедлива следующая оценка [19]:

$$\left|E_{\alpha,\beta}\left(z_n\right)\right| \le \frac{1}{1+\left|z_n\right|}. \tag{20}$$

При этом [19],

$$\left|z_n\right| \sim O\left(n^\alpha\right). \tag{21}$$

Таким образом, учитывая (17), получаем следующие соотношения:

$$\left|E_{\gamma,1}\left(\lambda_n + l_m\right)t^\gamma\right| \le \frac{1}{1+\left|\left(\lambda_n + l_m\right)t^\gamma\right|}; \tag{22}$$

$$\left|E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^\alpha\right)\right| \le \frac{1}{1+\left|\lambda_n x^\alpha\right|}; \tag{23}$$

$$\left|E_{\beta,\beta}\left(l_m y^\beta\right)\right| \le \frac{1}{1+\left|l_m y^\beta\right|}. \tag{24}$$

Теперь, согласно (21)—(24), оцениваем ряд (15) по модулю

$$\left|\varphi_{n,m}\, E_{\gamma,1}\left(\lambda_n t^\gamma\right) x^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^\alpha\right) y^{\beta-1} E_{\beta,\beta}\left(\lambda_n y^\beta\right)\right| \le \frac{1}{\left|n^{2\alpha} m^\beta x^\alpha y^\beta t^\gamma\right| + \left|n^\alpha m^{2\beta} x^\alpha y^\beta t^\gamma\right|}. \tag{25}$$

Рассмотрим мажорирующий ряд

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{n,m} = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{\left|n^{2\alpha} m^\beta\right| + \left|n^\alpha m^{2\beta}\right|}, \tag{26}$$

который является сходящимся рядом.

Из сходимости мажоранты (26) следует сходимость ряда (15).

Покажем теперь, что при $t \ge \bar{t} \ge 0$, где $\bar{t}$ — любое вспомогательное число, ряды производных

$\sum_{n,m=1}^{\infty} D_t^\gamma u_{n,m}(x, y, t)$, $\sum_{n,m=1}^{\infty} D_x^\alpha u_{n,m}(x, y, t)$, $\sum_{n,m=1}^{\infty} D_y^\beta u_{n,m}(x, y, t)$ сходятся равномерно. Для этого достаточно показать сходимость рядов

$\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial u_{n,m}}{\partial t}$, $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{n,m}}{\partial x^2}$, $\sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_{n,m}}{\partial y^2}$, так как $0 < \gamma < 2$, $1 < \alpha, \beta < 2$

Сформулируем дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x, y)$. Предположим сначала, что $\varphi(x, y)$ ограничена, $\left|\varphi(x, y)\right| < M$.

Тогда $\left|\varphi_{n,m}\right| = 4\left|\int_0^1\int_0^1 \left[\varphi(x,\ y)\,\bar{X}_n(x)\,\bar{Y}_m(y)\right]dxdy\right| < 4M$, откуда следует, учитывая, что $\frac{d}{dz}E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\alpha z}\left[E_{\alpha,\beta-1}(z) - (\beta-1)E_{\alpha,\beta}(z)\right]$:

$$\left|\frac{\partial u_{n,m}(x,\ y,\ t)}{\partial t}\right| < 4M\left|\frac{1}{\gamma\left(\lambda_n + l_m\right)\bar{t}^{\gamma}}E_{\gamma,0}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)\bar{t}^{\gamma}\right)x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right)y^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right)\right| < 4M$$

для $t \geq \bar{t}$.

Аналогично, учитывая, что $\left(\frac{d}{dz}\right)^m\left[z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(z^{\alpha}\right)\right] = z^{\beta-m-1}E_{\alpha,\beta-m}\left(z^{\alpha}\right)$:

$$\left|\frac{\partial^2 u_{n,m}(x,y,t)}{\partial x^2}\right| < 4M\left|E_{\gamma,1}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)\bar{t}^{\gamma}\right)x^{\alpha-3}E_{\alpha,\alpha-2}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right)y^{\beta-1}E_{\beta,\beta}\left(l_m y^{\beta}\right)\right| < 4M \text{ для}$$

$t \geq \bar{t}$;

$$\left|\frac{\partial^2 u_{n,m}(x,\ y,\ t)}{\partial y^2}\right| < 4M\left|E_{\gamma,1}\left(\left(\lambda_n + l_m\right)\bar{t}^{\gamma}\right)x^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_n x^{\alpha}\right)y^{\beta-3}E_{\beta,\beta-2}\left(l_m y^{\beta}\right)\right| < 4M \text{ для}$$

$t \geq \bar{t}$.

Из вышеизложенного следует, что при $t > 0$ ряд (15) представляет собой функцию, дифференцируемую почленно один раз по t и два раза по x и по y, а значит, имеющую производные порядков γ, α и β, так как $0 < \gamma < 2$, $1 < \alpha, \beta < 2$.

В заключение отметим, что первая краевая задача для линейного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии с нулевыми граничными условиями и непрерывным начальным условием решена полностью, причем решена в явном виде.

Полученные в данной работе результаты могут быть использованы в теории фильтрации жидкости и газов в фрактальной среде, а также при моделировании изменения температуры в неоднородной нагретой пластине.

Библиографический список

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. М. : Физматлит, 2003. 272 с.

2. *Алероев Т.С.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка // Сибирские электронные математические известия. 2013. Т. 10. С. 41—55.

3. *Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 2013. No. 270. Pp. 1—16.

4. *Al-Refai M., Luchko Y.* Maximum principle for the multi-term time-fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivatives // Applied Mathematics and Computation. April 2015. Vol. 257. No. 15. Pp. 40—51.

5. *Zhao K., Gong P.* Existence of Positive Solutions for a Class of Higher-Order Caputo Fractional Differential Equation // Qualitative Theory of Dynamical Systems. 1 April 2015. Vol. 14. No. 1. Pp. 157—171.

6. *Chen T., Liu W., Liu J.* Solvability of periodic boundary value problem for fractional p-Laplacian equation // Applied Mathematics and Computation. 1 October 2014. Vol. 244. Pp. 422—431.

7. *Płociniczak L.* Eigenvalue asymptotics for a fractional boundary-value problem // Applied Mathematics and Computation. 15 August 2014. Vol. 241. Pp. 125—128.

8. *Sudsutad W., Tariboon J.* Boundary value problems for fractional differential equations with three-point fractional integral boundary conditions // Advances in Difference Equations. 28 June 2014. Vol. 2012. 10 p. Режим доступа: http://projecteuclid.org/euclid.jam/1425305752. Дата обращения: 15.02.2015.

9. *Hu Z., Liu W., Liu J.* Boundary value problems for fractional differential equations // Tijdschrift voor Urologie. 17 January 2014. Vol. 2014. No. 1. Po. 1—11.

10. *Tariboon J., Ntouyas S.K., Sudsutad W.* Nonlocal Hadamard fractional integral conditions for nonlinear Riemann-Liouville fractional differential equations // Boundary Value Problems. 2014. Vol. 2014. No. 253. 16 p. Режим доступа: http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2014/1/253. Дата обращения: 15.02.2015.

11. *Mardanov M.J., Mahmudov N.I., Sharifov Y.A.* Existence and uniqueness theorems for impulsive fractional differential equations with the two-point and integral boundary conditions // The Scientific World Journal. 2014. Vol. 2014. Article ID 918730. 8 p. Режим доступа: http://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/918730/. Дата обращения: 15.02.2015.

12. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М. : Изд-во МГУ, 1999. 799 с.

13. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.

14. *Джрбащян М.М.* Краевая задача для дифференциального оператора типа Штурма-Лиувилля дробного порядка // Известия АН Армянской ССР. Серия: Математика. 1970. Т. 5. № 2. С. 71—96.

15. *Хасамбиев М.В., Алероев Т.С.* Краевая задача для одномерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Вестник МГСУ. 2014. № 6. С. 71—76.

16. *Алероев Т.С., Алероева Х.Т.* Об одном классе несамосопряженных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 2014. № 10. С. 3—12.

17. *Aleroev T.S., Aleroeva H.T.* A problem on the zeros of the Mittag-Leffler function and the spectrum of a fractional-order differential operator // Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ. 2009. No. 25. 18 p. Режим доступа: https://zbmath.org/?q=an:1183.34004. Дата обращения: 15.02.2015.

18. *Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F.* Boundary-value problems for differential equations of fractional order // Journal of Mathematical Sciences. Nov. 2013. Vol. 194. No. 5. Pp. 499—512.

19. *Попов А.Ю., Седлецкий А.М.* Распределение корней функций Миттаг-Леффлера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2011. Т. 40. С. 3—171.

Поступила в редакцию в апреле 2015 г.

Об авторе: **Хасамбиев Мохаммад Вахаевич** — аспирант кафедры высшей математики, **Московский государственный строительный университет (ФГБОУ ВПО «МГСУ»)**, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, hasambiev@mail.ru.

Для цитирования: *Хасамбиев М.В.* Краевая задача для многомерного дробного дифференциального уравнения адвекции-диффузии // Вестник МГСУ. 2015. № 5. С. 35—42.

M.V. Khasambiev

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MULTIDIMENSIONAL FRACTIONAL ADVECTION-DISPERSION EQUATION

In recent time there is a very great interest in the study of differential equations of fractional order, in which the unknown function is under the symbol of fractional deriva-

tive. It is due to the development of the theory of fractional integro-differential theory and application of it in different fields.

The fractional integrals and derivatives of fractional integro-differential equations are widely used in modern investigations of theoretical physics, mechanics, and applied mathematics. The fractional calculus is a very powerful tool for describing physical systems, which have a memory and are non-local. Many processes in complex systems have nonlocality and long-time memory. Fractional integral operators and fractional differential operators allow describing some of these properties. The use of the fractional calculus will be helpful for obtaining the dynamical models, in which integro-differential operators describe power long-time memory by time and coordinates, and three-dimensional nonlocality for complex medium and processes.

Differential equations of fractional order appear when we use fractal conception in physics of the condensed medium. The transfer, described by the operator with fractional derivatives at a long distance from the sources, leads to other behavior of relatively small concentrations as compared with classic diffusion. This fact redefines the existing ideas about safety, based on the ideas on exponential velocity of damping. Fractional calculus in the fractal theory and the systems with memory have the same importance as the classic analysis in mechanics of continuous medium.

In recent years, the application of fractional derivatives for describing and studying the physical processes of stochastic transfer is very popular too. Many problems of filtration of liquids in fractal (high porous) medium lead to the need to study boundary value problems for partial differential equations in fractional order.

In this paper the authors first considered the boundary value problem for stationary equation for mass transfer in super-diffusion conditions and abnormal advection. Then the solution of the problem is explicitly given. The solution is obtained by the Fourier's method.

The obtained results will be useful in liquid filtration theory in fractal medium and for modeling the temperature variations in the heated bar.

Key words: equation of fractional order, fractional derivative, the Mittag-Leffler function, eigenfunction, Fourier method, Fourier coefficients.

References

1. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie* [Fractional Calculation and its Application]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 272 p. (In Russian)

2. Aleroev T.S. Kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka [Boundary Problems for Differential Equations of Fractional Order]. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2013, vol. 10, pp. 41—55. (In Russian)

3. Aleroev T.S., Kirane M., Malik S.A. Determination of a Source Term for a Time Fractional Diffusion Equation with an Integral Type Over-Determining Condition. Electronic Journal of Differential Equations. 2013, vol. 2013, no. 270, pp. 1—16.

4. Al-Refai M., Luchko Y. Maximum Principle for the Multi-Term Time-Fractional Diffusion Equations with the Riemann-Liouville Fractional Derivatives. Applied Mathematics and Computation. April 2015, vol. 257, no. 15, pp. 40—51. DOI: http://dx.doi.org/10.2478/s13540-014-0181-5.

5. Zhao K., Gong P. Existence of Positive Solutions for a Class of Higher-Order Caputo Fractional Differential Equation. Qualitative Theory of Dynamical Systems. April 2015, vol. 14, no. 1, pp. 157—171. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/s12346-014-0121-0.

6. Chen T., Liu W., Liu J. Solvability of Periodic Boundary Value Problem for Fractional p-Laplacian Equation. Applied Mathematics and Computation. 1 October 2014, vol. 244, pp. 422—431.

7. Płociniczak L. Eigenvalue Asymptotics for a Fractional Boundary-Value Problem. Applied Mathematics and Computation. 15 August 2014, vol. 241, pp. 125—128.

8. Sudsutad W., Tariboon J. Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations with Three-Point Fractional Integral Boundary Conditions. Advances in Difference Equations. 28 June 2012, vol. 2012, 10 p. Available at: http://projecteuclid.org/euclid.jam/1425305752. Date of access: 15.02.2015. DOI: http://dx.doi.org/10.1186/1687-1847-2012-93.

9. Hu Z., Liu W., Liu J. Boundary Value Problems for Fractional Differential Equations. Tijdschrift voor Urologie. 17 January 2014, vol. 2014, no. 1, pp. 1—11.

10. Tariboon J., Ntouyas S.K., Sudsutad W. Nonlocal Hadamard Fractional Integral Conditions for Nonlinear Riemann-Liouville Fractional Differential Equations. Boundary Value Problems. 2014, vol. 2014, no. 253, 16 p. Available at: http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2014/1/253. Date of access: 15.02.2015. DOI: http://dx.doi.org/10.1186/s13661-014-0253-9.

11. Mardanov M.J., Mahmudov N.I., Sharifov Y.A. Existence and Uniqueness Theorems for Impulsive Fractional Differential Equations with the Two-point and Integral Boundary Conditions. The Scientific World Journal. 2014, vol. 2014, article ID 918730, 8 p. Available at: http://www.hindawi.com/journals/tswj/2014/918730/. Date of access: 15.02.2015. DOI: http://dx.doi.org/10.1155/2014/918730.

12. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, MGU Publ., 1999, 799 p. (In Russian)

13. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order, and Some of Their Applications]. Minsk, Nauka i tekhnika Publ., 1987, 688 p. (In Russian)

14. Dzhrbashchyan M.M. Kraevaya zadacha dlya differentsial'nogo operatora tipa Shturma-Liuvillya drobnogo poryadka [Boundary Value Problem for the Differential Operator of Sturm-Liouville Fractional Order]. *Izvestiya AN Armyanskoy SSR. Seriya: Matematika* [News of the Academy of Sciences of Armenian Soviet Socialist Republic. Series: Mathematics]. 1970, vol. 5, no. 2, pp. 71—96. (In Russian)

15. Khasambiev M.V., Aleroev T.S. Kraevaya zadacha dlya odnomernogo drobnogo differentsial'nogo uravneniya advektsii-diffuzii [Boundary Value Problem for One-Dimensional Differential Advection-Dispersion Equation]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2014, no. 6, pp. 71—76. (In Russian)

16. Aleroev T.S., Aleroeva Kh.T. Ob odnom klasse nesamosopryazhennykh operatorov, soputstvuyushchikh differentsial'nym uravneniyam drobnogo poryadka [On a Class of Self-Adjoint Operators Associated with Differential Equations of Fractional Order]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Russian Mathematics (Izvestiya VUZ. Matematika)]. 2014, no. 10, pp. 3—12. (In Russian)

17. Aleroev T.S., Aleroeva H.T. A Problem on the Zeros of the Mittag-Leffler Function and the Spectrum of a Fractional-Order Differential Operator. Electron. J. Qual. Theory Diff. Equ. 2009, no. 25, 18 p. Available at: https://zbmath.org/?q=an:1183.34004. Date of access: 15.02.2015.

18. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value Problems for Differential Equations of Fractional Order. Journal of Mathematical Sciences. Nov. 2013, vol. 194, no. 5, pp. 499—512.

19. Popov A.Yu., Sedletskiy A.M. Raspredelenie korney funktsiy Mittag-Lefflera [Distribution of Zeros of the Mittag-Leffler]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions]. 2011, vol. 40, pp. 3—171. (In Russian)

About the author: **Khasambiev Mokhammad Vakhaevich** — post-graduate student, Department of Higher Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (MGSU),** 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; hasambiev@mail.ru.

For citation: Khasambiev M.V. Kraevaya zadacha dlya mnogomernogo drobnogo differentsial'nogo uravneniya advektsii-diffuzii [Boundary Value Problem for Multidimensional Fractional Advection-Dispersion Equation]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 5, pp. 35—42. (In Russian)