

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.075.4

DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.701-713

Устойчивость жестко заделанной консоли двутаврового сечения с двумя осями симметрии с переменной высотой стенки

Александр Олегович Ильюшенков

Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект» (ТПИ «Хабаровскпромпроект»);
г. Хабаровск, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Исследуется устойчивость жестко заделанной консоли двутаврового сечения с двумя осями симметрии с переменной высотой стенки под действием сосредоточенной силы и равномерно распределенной нагрузки. Упругие решения изгибно-крутильной устойчивости приведены в замкнутой форме и получены с помощью энергетического метода с применением измененной базисной функции для угла закручивания балки. Целью статьи является уточнение и исправление бифуркационных решений консольных балок и представление их в альтернативных формулировках. Результаты приведены в новых выражениях, включающих изгибно-крутильный параметр балки ψ_0 и параметр влияния места приложения поперечной нагрузки по высоте η . Теоретическая работа проделана в соответствии с СП 16.13330.2017. Унифицированные формулы изгибно-крутильной устойчивости консольных балок могут быть использованы для решения не только элементов с линейно изменяющейся высотой балки, но и случаев постоянной жесткости. Простота достигается за счет минимизации числа членов в пробных функциях и введением альтернативной, но близкой к реальному поведению балки функции угла закручивания при действии поперечной нагрузки.

Материалы и методы. В теоретической работе использовано уточненное решение изгибно-крутильной устойчивости и энергетический метод расчета устойчивости.

Результаты. На основе сделанных уточнений получено замкнутое решение задачи упругой изгибно-крутильной потери устойчивости балки с линейно изменяющейся высотой стенки. По результатам проделанной работы предложены формулы для вычисления упругой критической нагрузки с целью проверки выполнения условия плоской формы устойчивости тонкостенного элемента открытого сечения.

Выводы. Выполненное исследование демонстрирует обновленное решение задачи изгибно-крутильной потери устойчивости консольной балки с линейно изменяющейся высотой стенки открытого сечения с участием альтернативной пробной функции закручивания. Конечное решение приведено в замкнутой форме, но с дополнительными поправками в виде формульных коэффициентов и остается справедливым, в том числе и для решения балок постоянной жесткости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: изгибно-крутильная потеря устойчивости, упругая потеря устойчивости, балка переменного сечения, стальные балки, редукция, параметр высоты приложения нагрузки, изгибно-крутильный параметр, пробная функция, энергетический метод

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Ильюшенков А.О. Устойчивость жестко заделанной консоли двутаврового сечения с двумя осями симметрии с переменной высотой стенки // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 5. С. 701–713. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.701-713

Автор, ответственный за переписку: Александр Олегович Ильюшенков, revivaltree@gmail.com.

Stability of a Doubly Symmetric Web-Tapered I-Beam Cantilever

Alexander O. Ilyushenkov

Territorial Design Institute “Khabarovskpromproekt”; Khabarovsk, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The current paper examines the stability of cantilevered symmetrical web-tapered I-beams under end point load and uniformly distributed load. Elastic lateral-torsional buckling solutions are given in closed form and based on an energy approach with alternative trial functions for twist rotation. The aim of the paper is to refine and rectify bifurcation solutions of the cantilevered beams and present them in alternative formulations. Results are given in new terms that include lateral-torsional beam parameter ψ_0 and load height parameter η . Theoretical work has been done with respect to the current state and philosophy of steel design code CP 16.13330.2017. Unified simple formulae for the lateral-torsional buckling capacities of cantilevered beams can be addressed for solving not only non-prismatic cases but prismatic cases too. Simplicity achieved by minimizing the number of terms in trial functions and subsidized with different and closed ones to real behavior of the beam under transverse loads.

Materials and methods. Refined lateral-torsional buckling solution and an energy method were used in the work.

Results. Based on given refinements, a closed form of elastic lateral-torsional buckling solution of a linear non-prismatic member was obtained. As a result of the theoretical work evaluated, a lateral-torsional buckling formula was introduced.

Conclusions. The current theoretical work shows that the solution of lateral-torsional buckling problem of web-tapered cantilevered I-beam with thin-walled open cross sections can be rectified by introducing alternative trial function for twist rotation and given in closed form with additional coefficients. The solution stays relevant for prismatic cases.

KEYWORDS: lateral-torsional buckling, elastic buckling, web-tapered beam, steel beams, reduction, height parameter, lateral-torsional parameter, trial function, energy method

FOR CITATION: Ilyushenkov A.O. Stability of a Doubly Symmetric Web-Tapered I-Beam Cantilever. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(5):701-713. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.701-713 (rus.).

Corresponding author: Alexander O. Ilyushenkov, revivaltree@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Бифуркационное и деформационное решения задачи об изгибно-крутильной потере устойчивости консольного стержня, в том числе и переменной жесткости, хорошо известны. В контексте настоящего теоретического исследования развивается только бифуркационное решение, так как, согласно нормативному подходу¹, расчет на устойчивость двутавровых стальных балок исходит из рассмотрения именно бифуркационной задачи в рамках технической теории открытого тонкостенного стержня В.З. Власова [1], которая подробно изложена в книге Б.М. Броуде [2]. Большой вклад в развитие методов расчета балок, включая и жестко заделанные консоли, внес N.S. Trahair [3–7]. Другим хорошо известным исследованием, в котором предложено замкнутое решение для консольных балок, является работа С.М. Wang и S. Kitipornchai [8]. Из наиболее полных современных трудов следует назвать А. Andrade [9, 10] и В. Dowswell [11]. В. Dowswell, как и другие исследователи, для получения замкнутого решения использует численные методы. С.М. Wang и S. Kitipornchai изучают задачу методом конечных разностей и энергетическим методом и на основании построенных графиков приводят конечные формулы с числовыми коэффициентами, которые зависят от вида и места приложения поперечной нагрузки. N.S. Trahair и В. Dowswell приводят решения, опираясь на результаты расчетов, полученные с помощью специально созданного программного обеспечения. В. Dowswell получает согласующиеся с N.S. Trahair результаты и по кривым устойчивости в зависимости от изгибно-крутильной характеристики балки α строит аппроксимационные зависимости, которые нормативно закреплены в национальных стандартах США ANSI/AISC 360–22². Аналогичным образом поступает и D.A. Nethercot [12–14], анализирующий устойчивость балки с помощью метода конечных элементов и предлагающий использовать набор поправочных коэффициентов в зависимости от α . Как можно заметить, исследования сводятся к единственной процедуре, состоящей из численно-

го анализа и последующей аппроксимации кривых устойчивости с целью получения конечного решения в зависимости от изгибно-крутильной характеристики α .

Данное исследование предлагает не только отказаться от такого подхода, но и ввести альтернативную базисную функцию, которая позволит избежать ресурсоемких вычислений и свести систему алгебраических уравнений критической нагрузки к одному уравнению.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

При рассмотрении задачи изгибно-крутильной потери устойчивости балочного элемента применены гипотеза жесткого сечения В.З. Власова, согласно которой поперечное сечение настолько жесткое, что его первоначальная форма сохраняется при выпучивании, а также гипотеза плоских сечений Эйлера – Бернулли. Классическая модель балки Эйлера – Бернулли отличается от балки Тимошенко отсутствием сдвиговой деформации первого порядка [15] и остается справедливой при изучении длинных тонкостенных балок $l/h > 4$ при малых деформациях. Для очень коротких $l/h < 1$ и толстых балок сдвиговая деформация по высоте сечения развивается по криволинейной зависимости и рассматривается с помощью модели Редди [16].

В энергетическом методе расчета упругого бокового выпучивания балки исследуется работа внешних и внутренних сил [17, 18].

Работа внутренних сил:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_y u''^2 + GI_t \theta'^2 + EI_\omega \theta''^2) dz, \quad (1)$$

где E — модуль упругости; I_y — момент инерции из плоскости наибольшей жесткости; I_t — момент инерции при кручении; I_ω — секториальный момент инерции.

Работа внешних сил:

$$\Theta = \int_0^l M_x \theta u'' dz + \frac{1}{2} \int_0^l q_y e_y \theta^2 dz + \frac{1}{2} \sum Q e_y \theta^2, \quad (2)$$

где M_x — закон изменения изгибающего момента от действия поперечной нагрузки; $M_x = -M$, $M_x = Q(z-l)$, $M_x = -0,5q_y(z-l)^2$ — частные законы изменения изгибающего момента; q — равномерно распределенная нагрузка; e_y — ордината у места приложения по-

¹ СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М.: Минстрой России; 2017.

² ANSI/AISC 360–22. Specification for Structural Steel Buildings. American Institute of Steel Construction, 2022. URL: <https://www.aisc.org/globalassets/product-files-not-searched/publications/standards/a360-22w.pdf>

перечной нагрузки по высоте поперечного сечения балки; Q — поперечная сила.

При нагружении балочного элемента внешней поперечной нагрузкой происходит превращение потенциальной энергии. По мере того, как нагрузка растет и приближается к некоторому критическому значению, потенциальная энергия деформации увеличивается и достигает максимума в момент, когда балка из своего прямолинейного состояния переходит в слегка изогнутое.

Полная потенциальная энергия системы определяется равенством:

$$\Pi = \mathfrak{A} + A. \quad (3)$$

Для решения интегрального равенства следует задаваться базисными функциями перемещения поперек u и закручивания θ стержня в момент потери устойчивости:

$$\begin{cases} u = \sum_{i=1}^n A_i \delta_i \\ \theta = \sum_{i=1}^n B_i \varphi_i \end{cases}, \quad (4)$$

где A_i и B_i — постоянные неизвестные коэффициенты; δ_i и φ_i — некоторые функции, соответствующие кинематическим и статическим граничным условиям.

Согласно минимуму энергии должно выполняться условие:

$$\begin{cases} \frac{d\Pi}{dA_i} = 0 \\ \frac{d\Pi}{dB_i} = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

На рис. 1 приведена расчетная схема рассматриваемой жестко заделанной консоли двутаврового сечения с линейно изменяющейся высотой стенки. Начало отсчета (ноль) при интегрировании принимается в заделке. Так как рассматривается балка с линейно изменяющейся высотой стенки, то при $z = 0$ наибольшая высота балки h_1 и ее геометрические характеристики $I_{\omega,1}$ и $I_{t,1}$ обозначаются с нижним индексом 1. На конце при $z = l$ минимальная высота балки h_0 , и $I_{\omega,0}$ и $I_{t,0}$. Ширина пояса b_f и момент инер-

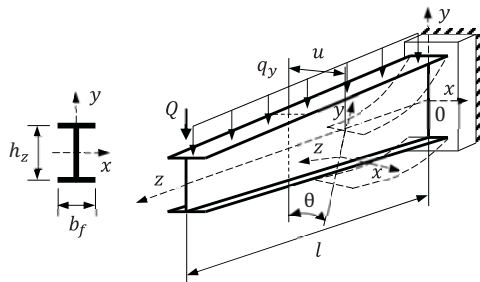


Рис. 1. Жестко заделанная двутавровая консоль с линейно изменяющейся высотой стенки

Fig. 1. Rigidly fixed I-beam cantilever with linearly tapered web

ции из плоскости наибольшей жесткости I_y остаются постоянными геометрическими характеристиками, поэтому:

$$I_y(z) = \text{const}. \quad (6)$$

Граничные условия для жестко заделанной консоли на опоре: $u(0) = u'(0) = 0$, $\theta(0) = \theta'(0) = 0$.

Для двутавровой балки переменной жесткости зададимся законом изменения жесткости по длине. Момент инерции при свободном (или чистом) кручении I_t :

$$I_{t,z} = I_{t,1} \cdot f_t = I_{t,1} \left(1 - (1 - t_t) \frac{z}{l} \right), \quad (7)$$

где $t_t = I_{t,0}/I_{t,1}$ при $z = 0$, $I_{t,z} = I_{t,1}$.

Секториальный момент инерции описывается квадратичным законом:

$$I_{\omega,z} = I_{\omega,1} \cdot f_{\omega} = I_{\omega,1} \left(1 - (1 - t_h) \frac{z}{l} \right)^2, \quad (8)$$

где $t_h = h_0/h_1$, так как для симметричного двутавра справедливо свойство $I_{\omega,z} = I_y h_z^2/4$ при $z = 0$, $I_{\omega,z} = I_{\omega,1}$.

С учетом переменности геометрических характеристик балки (7) и (8) уравнение полной потенциальной энергии (3):

$$\int_0^l (EI_y u''^2 + GI_{t,z} \theta'^2 + EI_{\omega,z} \theta''^2) dz + \int_0^l 2M_x \theta u'' dz + \int_0^l q_y e_{y,z} \theta^2 dz + \sum Q e_{y,z} \theta^2 = 0. \quad (9)$$

Выбор базисной функции. Точность решения уравнения (9) зависит от выбора базисной функции (4). Выбираемая базисная функция должна удовлетворять кинематическим и статическим граничным условиям [7]. В численных расчетах сходимость всегда гарантирована. Так как используется достаточно большое количество членов функции формы потери устойчивости, с тем чтобы получить результаты с желаемой точностью [10]. Для консольной балки обычно предлагается следующая тригонометрическая функция справедливая и для поперечного перемещения u и для закручивания θ [8, 19, 20]:

$$u = \sum_{i=1}^n A_i \left[1 - \cos \left(\frac{(2i-1)\pi z}{2l} \right) \right]. \quad (10)$$

Но лишь для случая, когда к балке прикладывается концевой момент (рис. 2, б). Если консольная балка произвольного поперечного сечения подвержена действию сосредоточенной силы или равномерно распределенной нагрузки, функция угла закручивания θ по выражению (10) оказывается менее репрезентативной, чем функция, занимающая промежуточное место между случаем полного отсутствия стесненности и частичной стесненностью в деформации (рис. 2, а):

$$\sin^2 \left(\frac{\pi z}{2l} \right) = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi z}{l} \right)}{2} < \theta < \sin \left(\frac{\pi z}{2l} \right). \quad (11)$$

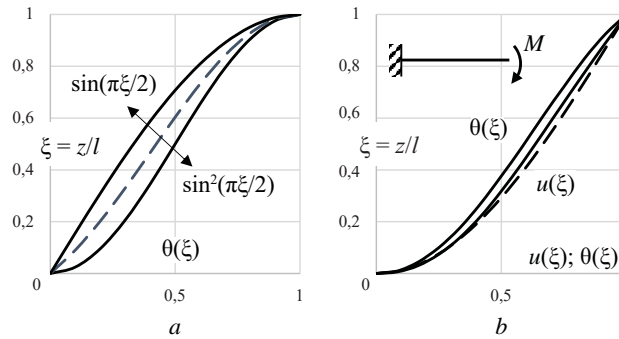


Рис. 2. Нормализованные функции устойчивости консольной двутавровой балки: *a* — рассматриваемая функция угла закручивания балки; *b* — при действии концевого момента

Fig. 2. Normalized stability functions of the cantilever I-beam: *a* — adopted beam twist angle function; *b* — under an end moment

Данное обстоятельство практически никогда не упоминается. Хотя и доказано, что функция угла закручивания по результатам численных расчетов действительно лучше всего описывается не уравнением (10), а выражением (11) [20]. Это заставляет задуматься над тем, почему в аналитических методах порой трудно получить замкнутое решение с удовлетворительной точностью, как и достаточно просто и наглядно продемонстрировать взаимное увязывание одних параметров с другими. Возможно есть смысл изменить подход в выборе базисной функции и пересмотреть решение изгибно-крутильной устойчивости консольной балки.

Средняя функция угла закручивания балки θ . Рассмотрим среднюю функцию (11):

$$\theta(\xi) = B_1 \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right)}{2} + \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \right]. \quad (12)$$

Функция угла закручивания не нарушает кинематических и статических граничных условий. На примере консольной балки 30Б1 по ГОСТ 35087–2024 длиной $l = 6$ м на рис. 2, *b*, 3 показаны нормализованные формы потери устойчивости перемещения u

и закручивания θ вокруг оси z от трех видов поперечных нагрузок, приложенных по центру тяжести/изгиба поперечного сечения.

На рис. 3 сплошной линией показаны кривые, полученные по результатам расчета балки на устойчивость в ПК ЛИРА-САПР; пунктирной линией — пробные функции $\theta(\xi)$ (12) и $u(\xi)$ (10). Можно заключить, что предлагаемая средняя функция угла закручивания значительно лучше отождествляется с формой потери устойчивости нежели функция (10).

Для проверки качества сделанного предположения следует выполнить пробный расчет балки постоянной жесткости энергетическим способом с применением пробной функции $\theta(\xi)$ и сравнить полученные аналитическим способом кривые зависимости в безразмерных величинах критической нагрузки от упругой изгибно-крутильной α характеристики балки со значениями, полученными методом конечных элементов и методом конечных разностей. В расчет берется только первый член ряда (4) $i = 1$ с постоянными неизвестными коэффициентами A_1 и B_1 с целью получения замкнутого решения без необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений или матрицы больше, чем $[2 \times 2]$. Численные решения с применением базисной функции

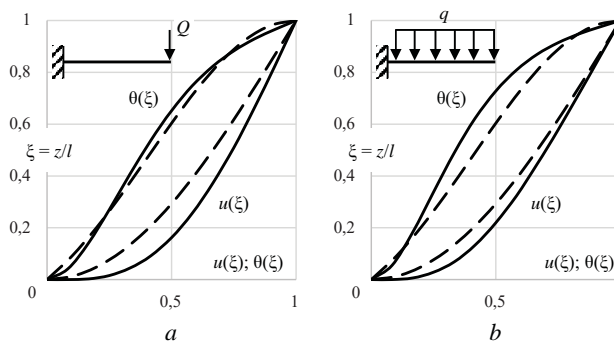


Рис. 3. Нормализованные функции потери устойчивости $u(\xi)$ и $\theta(\xi)$ при действии поперечной силы и равномерно распределенной нагрузки

Fig. 3. Normalized buckling functions $u(\xi)$ and $\theta(\xi)$ under transverse and a uniformly distributed load

косинуса (10) хорошо известны. Статья С.М. Wang и S. Kitipornchai [8] показывает, что для достижения достаточной точности в энергетическом методе расчета моносимметричной балки (симметричный двутавр рассматривается как частный случай) требуется удерживать не менее $n = 7$ членов в базисной функции $\theta(\xi)$ по функции (10). Для случая с поперечной силой Q сравнение производится с табличными данными, полученными методом конечных разностей С.П. Тимошенко [21]. Для случая равномерно распределенной нагрузки q кривая, показанная синим цветом на рис. 4, *b*, сравнивается с табличными значениями из работы S. Poley [22]. Нагрузки прикладываются по центру изгиба поперечного сечения балки с целью избежать необходимости учитывать эксцентричность приложения поперечной нагрузки. На рис. 4, *a* пунктирными линиями нанесены кривые, получаемые из рассмотрения верхней и нижней границ функции $\theta(\xi)$ по выражению (11). Сплошной линией синим цветом показана средняя кривая пробной функции по выражению (12). Как видно, такое решение демонстрирует близкие результаты к методу конечных разностей, что подтверждает выдвинутое

предложение по пересмотру базисной функции кручения. Пунктирная кривая, выделенная серым цветом (рис. 4, *a*), получена в результате аппроксимации при удержании большого количества членов тригонометрического ряда:

$$\frac{Ql^2}{\sqrt{EI_y GI_t}} = \frac{\pi^2}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\alpha}}. \quad (13)$$

Для равномерно распределенной нагрузки q кривая (пунктир серого цвета на рис. 4, *b*) вновь оказывается близкой к точной и показывает заниженные значения. Пунктиром показана с достаточной точностью аппроксимация:

$$\frac{ql^3}{\sqrt{EI_y GI_t}} = 2\pi^2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\alpha}}. \quad (14)$$

В табл. 1 сведены уравнения кривых $\gamma(\alpha)$ и $m(\alpha)$. Они имеют идентичные формулировки и различаются лишь числовыми коэффициентами при π .

На основании предварительных расчетов можно обосновать возможность применения средней функции угла закручивания консольной балки в качестве формы потери устойчивости и перейти к раз-

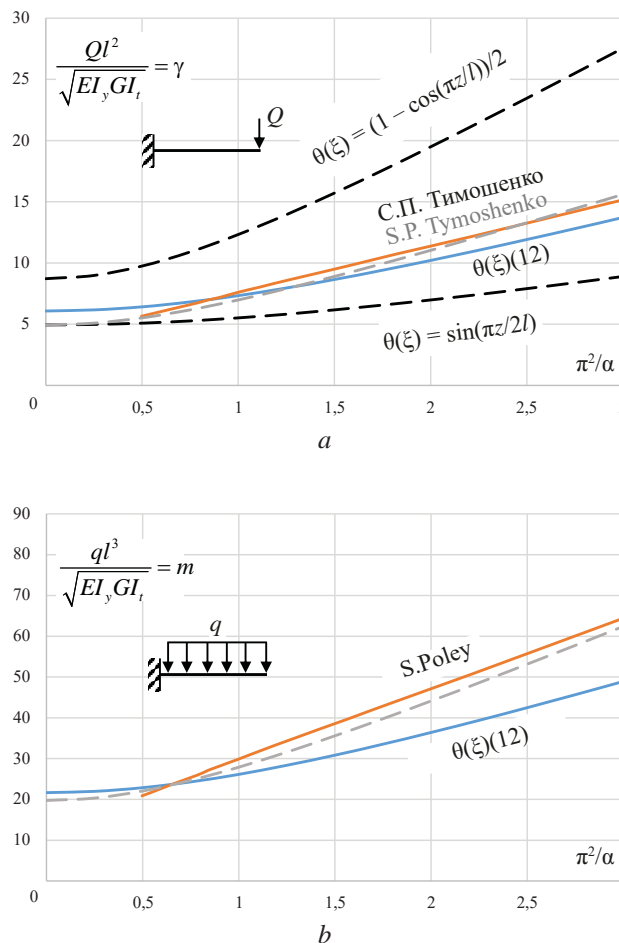


Рис. 4. Изгибно-крутильные кривые устойчивости при действии: *a* — поперечной силы; *b* — равномерно распределенной нагрузки

Fig. 4. Lateral-torsional buckling curves under: *a* — a transverse load; *b* — a uniformly distributed load

Табл. 1. Изгибно-крутильные кривые γ и m

Table 1. Lateral-torsional buckling γ and m results

Функция θ Function θ	$\frac{Ql^2}{\sqrt{EI_y GI_t}} = \gamma$	$\frac{ql^3}{\sqrt{EI_y GI_t}} = m$
$\frac{1 - \cos(\pi z/l)}{2}$	$\frac{\pi^2}{9} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\alpha}}$	–
$\sin(\pi z/2l)$	$\frac{\pi^2}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4\alpha}}$	–
$\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos(\pi z/l)}{2} + \sin(\pi z/2l) \right)$	$4 \sqrt{\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{\alpha} \right)}$	$\frac{3\pi^2}{2} \sqrt{\left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{\alpha} \right]}$
С.П. Тимошенко [21] S.P. Timoshenko [21]	$3,8 \left(1 + \frac{\pi^2}{\alpha} \right)$	–
S. Poley [22]	–	$12,4 \left(1 + 1,4 \frac{\pi^2}{\alpha} \right)$
Аппроксимация Approximation	$\frac{\pi^2}{2} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\alpha}}$	$2\pi^2 \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{\alpha}}$

решению вопроса изгибно-крутильной устойчивости консольной балки переменной жесткости.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Двухавровая консольная балка переменной высоты под действием поперечной силы

Получим решения в замкнутом виде для двух нормативных случаев приложения поперечной нагрузки согласно своду правил по стальным конструкциям. На рис. 5 приведена расчетная схема жестко заделанной консоли при действии поперечной силы Q , приложенной на расстоянии e_y от центра тяжести/изгиба балки.

В энергетическом методе расчета вначале требуется найти производные функций перемещения u и угла закручивания θ . Для перемещения u выбираем функцию косинуса. Удерживаем только первое слагаемое в тригонометрическом ряду:

$$u = A_1 \left[1 - \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \right] = A_1 \delta. \tag{15}$$

Первая и вторая производные перемещения балки поперек:

$$u' = A_1 \frac{\pi}{2l} \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right) = A_1 \delta'; \tag{16}$$

$$u'' = A_1 \frac{\pi^2}{4l^2} \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) = A_1 \delta''. \tag{17}$$

Первая и вторая производные угла закручивания балки:

$$\theta' = B_1 \frac{\pi}{4l} \left[\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right) + \cos\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \right] = B_1 \phi'; \tag{18}$$

$$\theta'' = B_1 \frac{\pi^2}{4l^2} \left[\cos\left(\frac{\pi z}{l}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi z}{2l}\right) \right] = B_1 \phi''. \tag{19}$$

Находим интегралы части равенства работы внутренних сил, которые не зависят от вида поперечной нагрузки и остаются стационарными величинами. С появлением переменности при геометрических характеристиках $I_{t,1}$ и $I_{\omega,1}$ возникают редуционные коэффици-

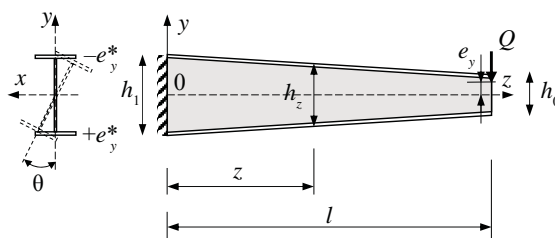


Рис. 5. Балка переменной жесткости под действием поперечной силы

Fig. 5. Variable-stiffness I-beam under transverse load

енты. Таким образом создается эквивалентная аналогия путем редуцирования геометрических характеристик, которая приводит задачу устойчивости балки переменной жесткости к балке постоянной жесткости:

$$B_1^2 GI_{t,1} \int_0^l \varphi'^2 f_t dz = B_1^2 \frac{\pi^2}{16l^2} l \left(1 + \frac{8}{3\pi}\right) a_t; \quad (20)$$

$$B_1^2 EI_{\omega,1} \int_0^l \varphi''^2 f_{\omega} dz = B_1^2 \frac{\pi^4}{16l^4} l \left(\frac{5}{8} + \frac{2}{3\pi}\right) a_{\omega}. \quad (21)$$

Для решения подобных интегралов следует использовать свойство дистрибутивности. Также необходимо выполнить понижение степени тригонометрической функции и после осуществить интегрирование по частям [23, 24]. В Приложении к статье [8] можно найти готовые формы решения интегралов, но без биномиальных множителей.

Интеграл изгибной жесткости EI_y имеет табличное выражение:

$$A_1^2 EI_y \int_0^l u''^2 dz = A_1^2 EI_y \frac{\pi^4}{16l^4} \frac{l}{2}. \quad (22)$$

Редукционные коэффициенты представляют собой простые алгебраические зависимости вида:

$$a_t = 0,4t_t + 0,6; \quad (23)$$

$$a_{\omega} = (0,4 + 0,6t_h)^2 = 0,36t_h^2 + 0,48t_h + 0,16. \quad (24)$$

Обычно редукция кручения a_t в практических случаях не оказывает ощутимого влияния на результирующую величину критической силы, поэтому коэффициентом a_t чаще всего в практике возможно либо пренебрегать, либо принимать некоторое среднее значение, которое может быть принято, например $a_t = 0,8$. Случай, когда коэффициентом a_t нельзя пренебрегать, относится к балкам-полосам. Коэффициент редукции a_{ω} при секториальной жесткости удобно аппроксимировать в форме квадрата суммы, как это приведено в выражении (24). Полученные редукционные коэффициенты a_t и a_{ω} остаются справедливыми и для шарнирно опертых балок.

Интеграл работы внешних сил при действии сосредоточенной силы на конце стержня:

$$2Q \int_0^l \theta u''(z-l) dz = -2A_1 B_1 \frac{\pi^2}{32l^2} l^2. \quad (25)$$

Компонента учета места приложения поперечной силы по высоте сечения балки:

$$\Sigma Q e_{y,z} \theta^2 = Q B_1^2 e_{y,z}. \quad (26)$$

Складывая выражения (20)–(22) и (25), (26) вместе и подставляя в (9), получим уравнение устойчивости с двумя неизвестными постоянными коэффициентами:

$$A_1^2 EI_y \frac{\pi^4}{16l^4} \frac{l}{2} + B_1^2 \left[1,85GI_{t,1} \frac{\pi^2}{16l^2} l a_t + 0,85EI_{\omega,1} \frac{\pi^4}{16l^4} l a_{\omega} + Q e_{y,z} \right] - 2QA_1 B_1 \frac{\pi^2}{32} l^2 = 0. \quad (27)$$

Обозначим $x = A_1/B_1$ и приведем уравнение (27) к квадратному виду с одним неизвестным:

$$x^2 EI_y \frac{\pi^2}{2l^2} - xQl + \left[1,85GI_{t,1} a_t + 0,85EI_{\omega,1} \frac{\pi^2}{l^2} a_{\omega} + Q e_{y,z} \frac{16l}{\pi^2} \right] = 0. \quad (28)$$

Решать уравнение нет необходимости. Так как требуется найти критическое значение поперечной силы Q_{cr} , будет достаточным рассмотреть детерминант $D = b^2 - 4ac$, который должен быть равен нулю. В результате этого получим другое квадратное уравнение, но уже относительно критической нагрузки Q_{cr} :

$$Q_{cr}^2 \frac{l^4}{2EI_y \pi^2} - Q_{cr} e_{y,z} \frac{16l}{\pi^2} - \left[1,85GI_{t,1} a_t + 0,85EI_{\omega,1} \frac{\pi^2}{l^2} a_{\omega} \right] = 0. \quad (29)$$

Теперь интересуется действительный корень уравнения (29):

$$Q_{cr} = \frac{EI_y \pi^2}{l^4} \left(e_{y,z} \frac{16l}{\pi^2} + \sqrt{\left(e_{y,z} \frac{16l}{\pi^2} \right)^2 + 4 \frac{l^4}{2EI_y \pi^2} \left[1,85GI_{t,1} a_t + 0,85EI_{\omega,1} \frac{\pi^2}{l^2} a_{\omega} \right]} \right). \quad (30)$$

Выделим нормативный изгибно-крутильный параметр. Для балки переменной жесткости α вычисляется при наибольшей высоте балки:

$$\alpha = \frac{GI_{t,1} \cdot l^2}{EI_{\omega,1}}. \quad (31)$$

Если переменность отсутствует, a_t и a_{ω} будут равны единице, а геометрические характеристики вернуться к постоянным величинам, так что $I_{t,1} = I_t$, $I_{\omega,1} = I_{\omega}$ и $h_1 = h$.

Также применяем свойство $I_{\omega,1} = I_y h_1^2/4$ с тем, чтобы ввести в уравнение высоту балки h_1 :

$$Q_{cr} = \frac{EI_y h_1}{l^3} \times \left(16 \frac{e_{y,z}}{h_1} + \sqrt{\left(16 \frac{e_{y,z}}{h_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{\pi^2}{4} a_t \alpha + a_{\omega} \pi^2 \right)} \right). \quad (32)$$

Вводим новый безразмерный параметр приложения поперечной нагрузки по высоте сечения балки. Для этого определим линейный закон изменения места приложения поперечной нагрузки по высоте сечения балки. В общем случае, когда рассматривается двутавровая балка с линейно изменяющейся высотой стенки, но постоянной шириной полки:

$$e_{y,z} = \pm 0,5h_1 \left(1 - (1-t_h) \frac{z}{l} \right). \quad (33)$$

Если нагрузка приложена на конце балки $z = l$, тогда:

$$e_{y,l} = \pm 0,5h_1 \left(1 - (1-t_h) \frac{l}{l} \right) = \pm 0,5h_1 t_h. \quad (34)$$

В безразмерной форме записи:

$$\frac{e_{y,z}}{h_1} = \pm 0,5 \left(\frac{h_0}{h_1} \right) = 0,5e_y^* t_h. \quad (35)$$

где $-1 \leq e_y^* \leq 1$; $e_y^* = 0$ — нагрузка приложена к центру тяжести/изгиба балки.

Нижний индекс z указывает на переменность параметра; $e_{y,z}$ следует определять в соответствии с положением геометрической оси балки. Уравнение справедливо в случае совпадения геометрической оси с центром тяжести. Для равномерно распределенной нагрузки при интегрировании возникает дополнительный коэффициент a_{e_y} , подобный коэффициенту редукции, способный привести положение поперечной нагрузки к эквивалентной высоте. Поперечная нагрузка может быть приложена и на некотором расстоянии от заделки a , либо рассматривается сумма сил. В таком случае следует рассматривать сумму:

$$\sum \frac{e_{y,a}}{h_1} = \sum_{i=1}^n \pm 0,5 \left(1 - (1-t_h) \frac{a_i}{l} \right). \quad (36)$$

Подставляем выражение (35) в (32):

$$Q_{cr} = \frac{EI_y h_1}{l^3} \times \left(\pm 8e_y^* t_h + \sqrt{(8e_y^* t_h)^2 + 4 \left(\frac{\pi^2}{4} a_i \alpha + a_\omega \pi^2 \right)} \right). \quad (37)$$

В статье [25] пересмотрено решение общей устойчивости балки и предложен подход, согласно которому вместо нормативного коэффициента $\psi(\alpha)$ следует ввести коэффициент ψ_0 , который позволит избежать необходимости иметь трехфакторную формулу. Для консольной балки в выражении (37) выделим:

$$\psi_0 = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} a_i \alpha + a_\omega \pi^2} = \pi\sqrt{a_i \alpha + 4a_\omega}. \quad (38)$$

Как было определено ранее, текущее решение образует нижнюю границу результатов, поэтому можно ожидать, что ψ_0 оказывается немногим меньше, чем он должен быть. Для сравнения следует обратиться к полученным численным способом аппроксимациям (13) и (14):

$$Q_{cr} = \frac{EI_y h_1}{l^3} \left(8e_y^* t_h + \sqrt{(8e_y^* t_h)^2 + \psi_0^2} \right). \quad (39)$$

Радику в уравнении (39) необходимо разложить в ряд по правилу:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)n^2 14^n} x^n. \quad (40)$$

Удерживаем первые два слагаемых в ряду. Последующими слагаемыми пренебрегаем в силу малости влияния. Радику представляем в виде:

$$\sqrt{b+a^2} = a\sqrt{1+\frac{b}{a^2}} = a\left(1+\frac{b}{2a^2}\right). \quad (41)$$

С учетом этого уравнение критической силы (39) преобразуется с разделением на два коэффициента. Первый коэффициент ψ_0 определяет изгибно-крутильную характеристику сопротивления консольной балки, когда поперечная нагрузка приложена точно по геометрической оси, совпадающей с центром тяжести. Второй коэффициент η корректирует изгибно-крутильную сопротивляемость балки в зависимости от места приложения поперечной нагрузки по высоте балки:

$$Q_{cr} = \frac{EI_y h_1}{l^3} \left(\psi_0 + \left[\frac{(8e_y^* t_h)^2}{2\psi_0} + 8e_y^* t_h \right] \right) = \frac{EI_y h_1}{l^3} (\psi_0 + \eta). \quad (42)$$

Рассмотрим коэффициент учета влияния места приложения поперечной нагрузки по высоте отдельно:

$$\eta = \frac{(8e_y^* t_h)^2}{2\psi_0} + 8e_y^* t_h. \quad (43)$$

При приложении нагрузки в центре тяжести имеем $e_y^* = 0$, $\eta = 0$ и $\psi = \psi_0$. Если построить график (рис. 6, а) зависимости $\psi(\psi_0)$ для выражения (42), можно убедиться в том, что это линейное алгебраическое уравнение, которое скалируется коэффициентами e_y^* и t_h . Если нагрузка прикладывается к верхнему поясу консольной балки ($-e_y^*$), тогда:

$$\psi = \psi_0 - 5t_h. \quad (44)$$

Для нижнего пояса с плюсом ($+e_y^*$):

$$\psi = \psi_0 + 11t_h. \quad (45)$$

Используя интерполяционный полином Лагранжа – Ньютона [27] в форме неполного квадратного уравнения (так как одна из координат $[0; 0]$), получим аппроксимацию без участия ψ_0 , которая позволит определить значения и для промежуточных ординат приложения нагрузки:

$$\eta_1 = 3e_y^{*2} t_h^2 + 8e_y^* t_h. \quad (46)$$

Промежуточные значения η по высоте сечения балки устанавливаются из линейной зависимости $-1 \leq e_y^* \leq 1$. По графику, показанному на рис. 6, b, можно проследить качественность такого подхода. Благодаря введенной функции теперь видно, что при приложении поперечной нагрузки к центру тяжести и смещении ее к сжатому поясу зависимость сохраняется нелинейной. Но для растянутого пояса зависимость переходит к линейному виду. Данная особенность

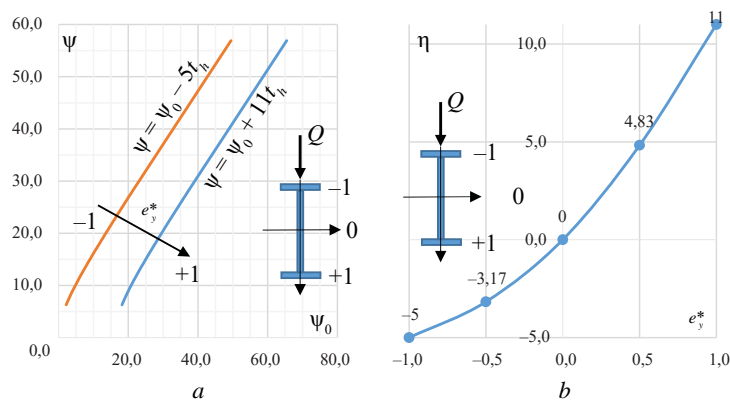


Рис. 6. Графики зависимости изгибно-крутильной устойчивости двутавровой балки под действием сосредоточенной силы

Fig. 6. Flexural-torsional buckling curves for an I-beam under a concentrated load

Табл. 2. Геометрические характеристики балки

Table 2. Geometrical properties of the beam

h_2 , м / m	EI_y , кНм ² / kNm ²	$GI_{t,z}$, кНм ² / kNm ²	$EI_{o,z}$, кНм ⁴ / kNm ⁴	$t_h = h_0/h_1$	$t_t = I_{t,0}/I_{t,1}$
$h_1 = 0,4$	344	7,58	13,76	0,5	0,85
$h_0 = 0,2$		6,43	3,44		

и вид кривых сохраняются и для равномерно распределенной нагрузки. Уравнение (46) позволяет определить критическую силу, когда поперечная сила находится на любой отметке по высоте поперечного сечения, а не только приложенная к верхнему или нижнему поясу. И, как следствие этого, уравнение (42) становится обобщенным. Такое решение не требует частных формул, как это сейчас принято в своде правил.

Итак, в сокращенной форме уравнение критической поперечной силы будет записано следующим образом:

$$Q_{cr} = \frac{EI_y h_1}{l^3} (\psi_0 + \eta_1) = \frac{EI_y h_1}{l^3} \psi. \quad (47)$$

Для проверки уравнения (47) рассмотрим сварную двутавровую балку с переменной высотой стенки, показанную на рис. 5, б. Требуется определить критическую поперечную силу с учетом места приложения нагрузки по высоте поперечного сечения. Сечения стенки и полки: $t_w = 0,6$ см; $h_{w,0} = 19$ см; $h_{w,1} = 39$ см; $t_f = 1$ см; $b_f = 10$ см. Длина консоли $l = 4$ м. Для удобства необходимые геометрические характеристики подсчитаны и сведены в табл. 2.

Алгоритм расчета

1. Вычисляем редуцированные коэффициенты a_t и a_o :

$$a_t = 0,4 \cdot 0,85 + 0,6 = 0,94;$$

$$a_o = (0,4 + 0,6 \cdot 0,5)^2 = 0,49.$$

2. Вычисляем изгибно-крутильный параметр α :

$$\alpha = \frac{7,58 \cdot 4^2}{13,76} = 8,81.$$

3. Вычисляем изгибно-крутильную характеристику балки ψ_0 :

$$\psi_0 = \pi \sqrt{0,94 \cdot 8,81 + 0,49 \cdot 4} = 10.$$

4. Подсчитываем критическую силу:

$$Q_{cr} = \frac{343 \cdot 0,4}{4^3} (10 + 0) = 21,4 \text{ кН.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает величину 24,6 кН. Для верификации создана модель из пластин с размером конечного элемента КЭ44 с частой сеткой 10×10 мм.

5. Определяем поправку η . Если нагрузка прикладывается к верхнему поясу:

$$\eta_1 = 3 \cdot 0,5^2 - 8 \cdot 0,5 = -3,25;$$

$$Q_{cr} = \frac{343 \cdot 0,4}{4^3} (10 - 3,25) = 14,5 \text{ кН.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает 16,1 кН.

Нижний пояс:

$$\eta_1 = 3 \cdot 0,5^2 + 8 \cdot 0,5 = 4,5;$$

$$Q_{cr} = \frac{343 \cdot 0,4}{4^3} (10 + 4,5) = 31,1 \text{ кН.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает 30,6 кН.

Двутавровая консольная балка переменной высоты под действием равномерно распределенной нагрузки q_y

Расчетная схема балки показана на рис. 7. Равномерно распределенная нагрузка прикладывается на некотором расстоянии e_y от центра тяжести.

Двутавровая балка с линейно изменяющейся высотой стенки, подверженная распределенной поперечной нагрузке, требует вычисления сложных интегралов в части работы внешних сил. Ранее уже было сказано, что при линейном изменении высоты балки по длине e_y определяется по уравнению (33). Интегралы внутренней работы сил остаются прежними:

$$-q_y \int_0^l \theta u''(z-l)^2 dz = -0,28q_y A_1 B_1 \frac{\pi^2}{16l^2} l^3; \quad (48)$$

$$q_y B_1^2 \int_0^l e_{y,z} \varphi^2 dz = 0,22q_y B_1^2 h_1 l e_y^* a_{e_y}, \quad (49)$$

где $a_{e_y} = 0,75t_h + 0,25$ — коэффициент приведения поперечной нагрузки к эквивалентной высоте.

Переносим интегралы внутренней работы сил из предыдущего решения и дополняя его (48) и (49), получим квадратное уравнение относительно постоянных неизвестных коэффициентов A_1 и B_1 :

$$x^2 EI_y \frac{\pi^2}{2l^2} - x0,28q_y l^2 + \left[1,85GI_{t,1} a_t + 0,85EI_{o,1} \frac{\pi^2}{l^2} a_o + 0,35q_y l^2 h_1 e_y^* a_{e_y} \right] = 0. \quad (50)$$

Методология решения уравнения повторяется. Опуская детали, записываем конечное уравнение критической нагрузки $q_{y,cr}$:

$$q_{y,cr} = \frac{EI_y h_1}{l^4} \left(44e_y^* a_{e_y} + \sqrt{\left(44e_y^* a_{e_y} \right)^2 + 16\psi_0^2} \right). \quad (51)$$

Полученное уравнение (51) аналогично (39) и отличается числовыми коэффициентами и новым параметром a_{e_y} . В сокращенной форме записи:

$$q_{y,cr} = \frac{EI_y h_1}{l^4} (4\psi_0 + \eta_2), \quad (52)$$

где $\eta_2 = 18e_y^{*2} a_{e_y}^2 + 42e_y^* a_{e_y}$ — коэффициент влияния места приложения равномерно распределенной нагрузки по высоте балки.

Для апробации формулы (52) рассмотрим балку, показанную на рис. 6. Геометрические параметры балки берутся из предыдущего примера. Алгоритм расчета полностью повторяется. Поэтому записываем сразу:

$$q_{y,cr} = \frac{343 \cdot 0,4}{4^4} (4 \cdot 10 + 0) = 21,4 \text{ кН/м.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает критическое значение нагрузки 25,1 кН/м:

$$a_{e_y} = 0,75 \cdot 0,5 + 0,25 = 0,625;$$

$$\eta_2 = 18 \cdot 0,625^2 - 42 \cdot 0,625 = -19,2;$$

$$q_{y,cr} = \frac{343 \cdot 0,4}{4^4} (4 \cdot 10 - 19,2) = 11,1 \text{ кН/м.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает 13,9 кН/м:

$$\eta_2 = 18 \cdot 0,625^2 + 42 \cdot 0,625 = 33,3;$$

$$q_{y,cr} = \frac{343 \cdot 0,4}{4^4} (4 \cdot 10 + 33,3) = 39,3 \text{ кН/м.}$$

Расчет в ЛИРА-САПР показывает 35,4 кН/м.

При удержании только первого слагаемого в тригонометрическом ряду (10) и (12) были получены выражения критических нагрузок Q_{cr} и $q_{y,cr}$. Результаты расчета по формулам (47) и (52) предсказывают значения критических нагрузок близкие к численным с погрешностью до 10 %. Увеличения точности можно достичь путем корректирования числовых коэффициентов, которые могут быть взяты из аппроксимаций $\gamma(\alpha)$ (13) и $m(\alpha)$ (14). Они демонстрируют близкое расположение к значениям из метода конечных разностей.

Инженерный метод расчета балки на общую устойчивость

Согласно нормативной методике расчета балки на общую устойчивость, критическую силу и равномерно распределенную нагрузку следует привести к упругому критическому моменту:

$$M_{cr} = Ql = \frac{EI_y h_1}{l^2} (\psi_0 + \eta_1); \quad (53)$$

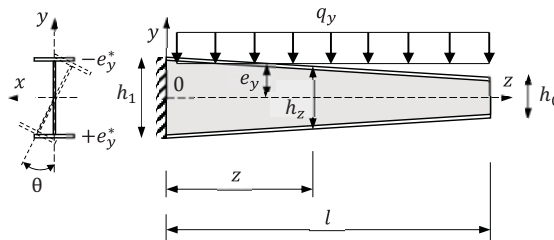


Рис. 7. Балка переменной жесткости под действием равномерно распределенной нагрузки

Fig. 7. Web-tapered cantilever I-beam under a uniformly distributed load

$$M_{cr} = \frac{q_{y,cr} l^2}{2} = \frac{EI_y h_1}{2l^2} (4\psi_0 + \eta_2). \quad (54)$$

В соответствии с требованиями раздела 8.4 СП 16.13330.2017 расчет на устойчивость двутавровых стальных балок 1-го класса при изгибе в плоскости стенки, совпадающей с плоскостью симметрии сечения, необходимо выполнять по формуле:

$$\frac{M_x}{\phi_b W_x R_y} \leq 1, \quad (55)$$

где ϕ_b — коэффициент устойчивости при изгибе (коэффициент уменьшения допускаемых напряжений). Для симметричного профиля:

$$\phi_b = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_T} = \frac{M_{cr} h_1}{2I_{x,1} R_y} \gamma_c, \quad (56)$$

где $\gamma_c = 0,87$ — обязательный и постоянный коэффициент, учитывающий в бифуркационном решении геометрические несовершенства.

Подставляя уравнение (53) или (54) в (56), вы-

числяем коэффициент устойчивости и выполняем проверку условия по выражению (55).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продемонстрированный способ расчета на устойчивость консольной балки отличается универсальностью и гибкостью. Его простота и органичность традиционному подходу в проверке устойчивости балок позволяет отказаться от частных формул, избежать необходимости выполнять численный анализ, а также связать балки постоянной и переменной жесткости в одно единственное уравнение путем редукции геометрических характеристик формульными коэффициентами. Показанный способ предоставляет возможность более точно определять изгибно-крутильную сопротивляемость балки благодаря четкому разделению коэффициентами ψ_0 и η . Уточнение уравнений критических нагрузок с целью достижения большей точности возможно выполнить посредством корректирования числовых коэффициентов, взятых из уравнений $\gamma(\alpha)$ и $m(\alpha)$ из численного анализа.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М. : Физматгиз, 1959. 574 с.
2. Броуде Б.М. Предельные состояния стальных балок. М. : Стройиздат, 1953. 216 с.
3. Trahair N.S. Bending and buckling of tapered steel beam structures research. Research report R939. School of Civil Engineering, The University of Oklahoma, 2013. 26 p.
4. Trahair N.S. Lateral buckling of tapered members // Engineering Structures. 2017. Vol. 151. Pp. 518–526. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.08.038
5. Trahair N.S., Ansourian P. In-plane behaviour of web-tapered beams // Engineering Structures. 2016. Vol. 108. Pp. 47–52. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.11.010
6. Trahair N.S. Interaction buckling of tapered beams // Engineering Structures. 2014. Vol. 62–63. Pp. 174–180. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.01.040
7. Trahair N.S. Flexural-torsional buckling of structures. London, 1993. DOI: 10.1201/9781482271218
8. Wang C.M., Kitipornchai S. On stability of mono-symmetric cantilevers // Engineering Structures. 1986. Vol. 8. Issue 3. Pp. 169–180. DOI: 10.1016/0141-0296(86)-90050-7
9. Andrade A., Camotim D., Dinis P.B. Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA // Computers & Structures. 2007. Vol. 85. Issue 17–18. Pp. 1343–1359. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.08.079
10. Andrade A., Camotim D. Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications // Journal of Engineering Mechanics. 2005. Vol. 131. Issue 6. Pp. 586–597. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(2005)131:6(586)
11. Dowswell B. Lateral-torsional buckling of wide flange cantilever beams // Engineering Journal. 2004. Vol. 41. Issue 2. Pp. 85–91. DOI: 10.62913/engj.v41i2.825
12. Nethercot D.A. The effective lengths of cantilevers as governed by lateral buckling // The Structural Engineer. 1973. Vol. 51. Issue 5. Pp. 161–168.
13. Nethercot D.A., Rockey K.C. A unified approach to the elastic lateral buckling of beams // Engineering Journal. 1972. Vol. 9. Issue 3. Pp. 96–107. DOI: 10.62913/engj.v9i3.188
14. Nethercot D.A. Lateral buckling of tapered beams // IABSE Publications. 1973. Vol. 33–II. Pp. 173–192.
15. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М. : Гостехиздат, 1955. 567 с.
16. Ruocco E., Reddy J. Analytical solutions of Reddy, Timoshenko and Bernoulli beam models: A comparative analysis // European Journal of Mechanics — A/Solids. 2023. Vol. 99. P. 104953. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2023.104953. EDN JACPYK.
17. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. М. : Физматгиз, 1959. 544 с.
18. Александров А.В., Потанов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высшая школа, 2007. 400 с.
19. Ozbasaran H., Aydin R., Dogan M. An alternative design procedure for lateral-torsional buckling of cantilever I-beams // Thin-Walled Structures. 2015. Vol. 90. Pp. 235–242. DOI: 10.1016/j.tws.2015.01.021

20. Xiao G., Ho S., Papangelis J.P. Semi analytical solutions for flexural-torsional buckling of thin-walled cantilever beams with doubly symmetric cross-sections // *Structural Engineering and Mechanics*. 2023. Vol. 87. Issue 6. Pp. 541–554. DOI: 10.12989/sem.2023.87.6.541

21. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability*. 2nd ed. New York : McGraw-Hill, 1961. 560 p.

22. Poley S. Lateral buckling of cantilevered I-beams under uniform load // *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1956. Vol. 121. Issue 1. Pp. 786–790. DOI: 10.1061/TACEAT.0007376

23. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.

24. Ильюшенко А.О. Развитие инженерной методики расчета устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки // *Вестник НИЦ Строительство*. 2025. № 3 (46). С. 22–42. DOI: 10.37538/2224-9494-2025-3(46)-22-42. EDN FKKCEI.

25. Ильин В.П. *Численные методы решения задач строительной механики*. Минск : Вышэйшая школа, 1990. 349 с.

Поступила в редакцию 3 ноября 2025 г.

Принята в доработанном виде 10 ноября 2025 г.

Одобрена для публикации 29 января 2026 г.

ОБ АВТОРЕ: Александр Олегович Ильюшенко — инженер промышленного и гражданского строительства, ведущий инженер архитектурно-строительного отдела; Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект» (ТПИ «Хабаровскпромпроект»); 680000, г. Хабаровск, Усурийский бульвар, д. 2; revivaltree@gmail.com.

REFERENCES

1. Vlasov V.Z. *Thin-walled elastic rods*. Moscow, Fizmatgiz, 1959; 574. (rus.).

2. Broude B.M. *Limit states of steel beams*. Moscow, Stroyizdat, 1953; 216. (rus.).

3. Trahair N.S. Bending and buckling of tapered steel beam structures research. *Research report R939*. School of Civil Engineering, The University of Oklahoma, 2013; 26.

4. Trahair N.S. Lateral buckling of tapered members. *Engineering Structures*. 2017; 151:518-526. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.08.038

5. Trahair N.S., Ansourian P. In-plane behaviour of web-tapered beams. *Engineering Structures*. 2016; 108:47-52. DOI: 10.1016/j.engstruct.2015.11.010

6. Trahair N.S. Interaction buckling of tapered beams. *Engineering Structures*. 2014; 62-63:174-180. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.01.040

7. Trahair N.S. *Flexural-torsional buckling of structures*. London, 1993. DOI: 10.1201/9781482271218

8. Wang C.M., Kitipornchai S. On stability of mono-symmetric cantilevers. *Engineering Structures*. 1986; 8(3):169-180. DOI: 10.1016/0141-0296(86)90050-7

9. Andrade A., Camotim D., Dinis P.B. Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. *Computers & Structures*. 2007; 85(17-18):1343-1359. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.08.079

10. Andrade A., Camotim D. Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications. *Journal of Engineering Mechanics*. 2005; 131(6):586-597. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:6(586)

11. Dowswell B. Lateral-torsional buckling of wide flange cantilever beams. *Engineering Journal*. 2004; 41(2):85-91. DOI: 10.62913/engj.v41i2.825

12. Nethercot D.A. The effective lengths of cantilevers as governed by lateral buckling. *The Structural Engineer*. 1973; 51(5):161-168.

13. Nethercot D.A., Rockey K.C. A unified approach to the elastic lateral buckling of beams. *Engineering Journal*. 1972; 9(3):96-107. DOI: 10.62913/engj.v9i3.188

14. Nethercot D.A. Lateral buckling of tapered beams. *IABSE Publications*. 1973; 33-II:173-192.

15. Timoshenko S.P. *Stability of elastic systems*. Moscow, Gostekhizdat, 1955; 567. (rus.).

16. Ruocco E., Reddy J. Analytical solutions of Reddy, Timoshenko and Bernoulli beam models: A comparative analysis. *European Journal of Mechanics — A/Solids*. 2023; 99:104953. DOI: 10.1016/j.euro-mechsol.2023.104953. EDN JACPYK.

17. Bleich F. *Stability of steel constructions*. Moscow, Fizmatgiz, 1959; 544. (rus.).

18. Aleksandrov A.V., Potapov V.D. *Strength of Materials. Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity*. Moscow, Higher School, 2007; 400. (rus.).

19. Ozbasaran H., Aydin R., Dogan M. An alternative design procedure for lateral-torsional buckling of cantilever I-beams. *Thin-Walled Structures*. 2015; 90:235-242. DOI: 10.1016/j.tws.2015.01.021

20. Xiao G., Ho S., Papangelis J.P. Semi analytical solutions for flexural-torsional buckling of thin-walled cantilever beams with doubly symmetric cross-sections. *Structural Engineering and Mechanics*. 2023; 87(6):541-554. DOI: 10.12989/sem.2023.87.6.541

21. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability*. 2nd Ed. New York, McGraw-Hill, 1961; 560.
22. Poley S. Lateral buckling of cantilevered I-beams under uniform load. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1956; 121(1):786-790. DOI: 10.1061/TACEAT.0007376
23. Gradstein I.S., Ryzhik I.M. *Tables of integrals, sums, series and products*. Moscow, Fizmatgiz, 1963; 1100. (rus.).
24. Ilyushenkov A.O. Development of engineering methodology for calculating the plane bending stability of an I-beam. *Bulletin of Science and Research Center of Construction*. 2025; 3(46):22-42. DOI: 10.37538/2224-9494-2025-3(46)-22-42. EDN FKKCEI. (rus.).
25. Ilyin V.P. *Numerical methods for solving problems of structural mechanics*. Minsk, Higher School, 1990; 349. (rus.).

Received November 3, 2025.

Adopted in revised form on November 10, 2025.

Approved for publication on January 29, 2026.

BIOTNOTES: **Alexander O. Ilyushenkov** — industrial and civil construction engineer, leading engineer of the Architectural and Construction Department; **Territorial Design Institute “Khabarovskpromproekt”**; 2 Ussuriysky boulevard, Khabarovsk, 680000, Russian Federation; revivaltree@gmail.com.