

Реализация эквипотенциальных поверхностей в структурно-неоднородных стержнях при вариационных постановках задач оптимизации

Андрей Викторович Мищенко^{1,2}, Максим Сергеевич Вешкин¹

¹ Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин);
г. Новосибирск, Россия;

² Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище; г. Новосибирск, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Рассмотрена вариационная постановка задачи оптимизации геометрической конфигурации слоисто-неоднородного стержня при условии постоянства суммарной стоимости материалов. В качестве критерия оптимальности принят интегральный критерий минимума энергии деформации при варьировании геометрических функций, профилирующих слои стержня. В настоящее время данный подход, применяемый в однородных системах, требует развития и распространения на сложные неоднородные среды, разработки методики использования в строительных конструкциях.

Материалы и методы. С применением математической модели стержня Тимошенко приведены формулы для основных компонент напряжений и жесткостных характеристик нулевого, первого и второго порядков. Сформулированы энергетический функционал и ограничение на суммарную стоимость материалов. Получены уравнения Эйлера при варьировании геометрических функций.

Результаты. Решены задачи оптимизации слоистого стержня при варьировании ширины и толщины слоев для симметричной и произвольной структур. Исследованы случаи изгиба, растяжения, поперечного сдвига и совместного изгиба с растяжением. Аналитически доказано, что во всех рассмотренных случаях в системе формируются поверхности с равным уровнем удельной энергии деформации. Показано, что изопериметрическая вариационная постановка приводит к минимальной стоимости материалов конструкции.

Выводы. Вариационная постановка с одним ограничением на суммарную стоимость материалов, необходимым по смыслу задачи, дает глобальный минимум функционала энергии деформации и стоимости материалов системы и отражает так называемый эталонный проект. Знание такого проекта является ценным и полезным с практической точки зрения. В оптимальной системе формируются эквипотенциальные поверхности с одинаковым значением удельной энергии деформации. Их форма и расположение определяются действующими усилиями и структурой системы. Из интегрального энергетического критерия вытекают практические критерии выравнивания удельной энергии деформации, а также основного напряжения либо деформации на поверхностях областей с варьируемыми размерами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: структурно-неоднородный стержень, оптимизация неоднородных систем, вариационная оптимизация, критерий минимума энергии деформации, эквипотенциальные поверхности

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мищенко А.В., Вешкин М.С. Реализация эквипотенциальных поверхностей в структурно-неоднородных стержнях при вариационных постановках задач оптимизации // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 5. С. 714–724. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.714-724

Автор, ответственный за переписку: Максим Сергеевич Вешкин, m.veshkin@sibstrin.ru.

Realization of equipotential surfaces in structurally inhomogeneous rods in variational formulations of optimization problems

Andrey V. Mishchenko^{1,2}, Maxim S. Veshkin¹

¹ Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin); Novosibirsk, Russian Federation;

² Novosibirsk Higher Military Command Order of Zhukov School; Novosibirsk, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. A variational formulation of the problem of optimizing the geometric configuration of a layered heterogeneous rod under the condition of constant total cost of materials is considered. The integral criterion of minimum deformation energy is adopted as the optimality criterion when varying the geometric functions profiling the rod layers. Currently, this approach, applied in homogeneous systems, requires development and extension to complex heterogeneous environments, and the development of methods for application in building structures.

Materials and methods. Using the mathematical model of the Timoshenko rod, formulas are given for the main components of stress and rigidity characteristics of zero, first and second orders. An energy functional and a constraint on the total cost of materials were formulated. Euler equations were obtained for varying geometric functions.

Results. The optimization problems of a layered rod by varying the width and thickness of layers for symmetrical and arbitrary structures are solved. The cases of bending, tension, transverse shear and combined bending with tension were investigated. It has been analytically proven that in all the cases considered, surfaces with an equal level of specific deformation energy are formed in the system. It is shown that the isoperimetric variational formulation leads to the minimum cost of the construction's materials.

Conclusions. A variational formulation with one constraint on the total cost of materials, necessary according to the meaning of the problem, provides a global minimum of the functional of the deformation energy and the cost of materials of the system and reflects, the so-called, reference project. Knowledge of such a project is valuable and useful from a practical point of view. In an optimal system, equipotential surfaces with identical specific deformation energy values are formed. Their shape and location are determined by the emerging efforts and the structure of the system. From the integral energy criterion follow practical criteria for equalizing the specific energy of deformation, as well as the main stress or deformation on the surfaces of areas received by varying of dimensions.

KEYWORDS: structurally inhomogeneous rod, optimization of inhomogeneous systems, variational optimization, minimum deformation energy criterion, equipotential surfaces

FOR CITATION: Mishchenko A.V., Veshkin M.S. Realization of equipotential surfaces in structurally inhomogeneous rods in variational formulations of optimization problems. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(5):714-724. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.714-724 (rus.).

Corresponding author: Maksim S. Veshkin, m.veshkin@sibstrin.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Вариационные постановки задач механики, выполненные на основе использования энергетических функционалов, отражают один из фундаментальных и универсальных подходов, применяемый при построении методов расчета строительных конструкций. Особенно эффективным он становится при исследовании математических моделей новых конструктивных форм и структурно-неоднородных деформируемых систем [1–4]. Кроме решений прямых задач, вариационные принципы находят применение в обратных задачах — задачах оптимизации конструкций, имеющих широкий спектр направлений, которые определяются выбором критерия оптимизации, варьируемыми параметрами и накладываемыми на расчетную схему ограничениями [5–10]. В них, наряду с традиционными практическими требованиями прочности, жесткости, устойчивости, долговечности, динамической виброзащищенности и другими, рассматриваются также вопросы: поиска наилучшей геометрической конфигурации [1, 2], структуры и топологии [11] системы, межфазной прочности [12, 13], способы улучшения других специфических свойств и характеристик [14].

Эффективным и универсальным инструментом для решения подобных задач является энергетический подход, основанный на интегральном критерии минимума потенциальной энергии деформируемой системы [2, 8, 10, 12, 13]. В подтверждение может быть приведено высказывание Альберта Эйнштейна: «Энергия — самая важная сохраняющаяся величина не только в механике, но и в физике вообще. Но более проста и наглядна величина, которая называется работой». В настоящее время этот подход требует развития, в частности: распространения на сложные неоднородные среды [10, 15–23], обоснования и совершенствования критериев оптимальности, установления связей с технико-экономическими кри-

териями, разработки методики применения к распространенным строительным конструкциям [7].

В данной статье рассматриваются вопросы оптимизации стержневых структурно-неоднородных систем на основе вариационного подхода, особенности возникающего напряженно-деформированного состояния и распределения удельной потенциальной энергии деформации в объеме оптимальной системы. При минимальном числе ограничений, содержащих лишь требование о постоянстве расхода (стоимости) материалов, для этих постановок специфично формирование в неоднородной структуре множества эквипотенциальных поверхностей (ЭПП) и областей. Это позволяет обосновать использование локальных критериев оптимальности для параметров напряженного и деформированного состояния.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Математическая модель структурно-неоднородного стержня

Неоднородный стержень — элемент плоской стержневой системы, имеет поперечно-слоистую структуру, образованную соединением s однородных слоев. В локальной системе координат x, y отсчетная геометрическая ось стержня совмещена с осью x , структура стержня обладает симметрией относительно вертикальной плоскости x, y , в которой к стержню приложены нагрузки (рис. 1). K -й слой, имеющий в поперечном сечении прямоугольную форму, характеризуется: шириной $b_k(x)$, высотой $h_k(x)$, модулями упругости E_k, G_k . Границы слоев обозначим через $y_k(x)$, ($k = 1, \dots, s + 1$). Также в поперечном сечении возможны включения иной формы, например круговой (для арматуры).

В работах [24, 25] приведены основные соотношения для слоистого стержня Тимошенко, на базе которых получены расчетные зависимости, связи-

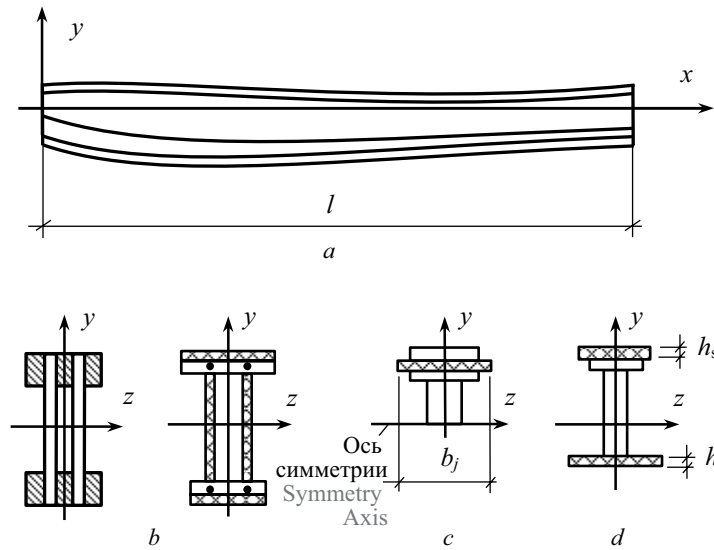


Рис. 1. Расчетная схема структурно-неоднородного стержня (а) с вариантами поперечных сечений (b–d)

Fig. 1. Calculation scheme of a structurally uniform rod (a) with variants of cross-sections (b–d)

вающие обобщенную осевую деформацию ε_0 , кривизну κ и осредненный сдвиг γ_0 с усилиями M, N, Q :

$$\begin{cases} D_A \varepsilon_0 - D_S \kappa = N; \\ -D_S \varepsilon_0 + D_I \kappa = M; \\ D_Q \gamma_0 = Q, \end{cases} \quad (1)$$

а также формулы для наиболее значимых компонент напряжений в k -м слое:

$$\begin{aligned} \sigma_{x,k}^{(N)} &= N \frac{E_k(D_I - yD_S)}{D}; \\ \sigma_{x,k}^{(M)} &= -M \frac{E_k(yD_A - D_S)}{D}; \\ \tau_{xy,k}^{(Q)} &= \frac{Q}{b_k} \frac{D_A D_S^{sec} - D_S D_A^{sec}}{D}; \quad D = D_I D_A - D_S^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь для s -слойного стержня введены жесткостные характеристики сечения нулевого, первого и второго порядков:

$$\begin{aligned} D_A(x) &= \sum_{k=1}^s E_k \int_{y_k}^{y_{k+1}} b_k dy; \quad D_S(x) = \sum_{k=1}^s E_k \int_{y_k}^{y_{k+1}} b_k y dy; \\ D_I(x) &= \sum_{k=1}^s E_k \int_{y_k}^{y_{k+1}} b_k y^2 dy; \\ D_A^{sec}(x, y) &= \int_y^{y_{s+1}} E_k(y) b_k dy; \\ D_S^{sec}(x, y) &= \int_y^{y_{s+1}} E_k(y) b_k y dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Для касательных напряжений, наряду с формулой (3), получены также приближенные зависимости на основе аппроксимации погонных сдвигающих сил:

$$\tau_{yx,k}^{(Q)} = \frac{Q f_\tau(y)}{b_k F_\tau}; \quad F_\tau = \int_{y_1}^{y_{s+1}} f_\tau dy; \quad (4)$$

$$D_Q = \frac{F_\tau^2}{\sum_{k=1}^s \int_{y_k}^{y_{k+1}} \frac{f_\tau^2}{b_k G_k} dy} \quad (5)$$

где $f_\tau(y)$ — заданная безразмерная функция аппроксимации сдвигающих сил, удовлетворяющая условиям на поверхностях $y = y_1(x), y = y_{s+1}(x)$.

Критерий оптимальности конфигурации плоского неоднородного стержня запишем в виде энергетического функционала [10]:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{P}) &= \frac{1}{2} \int_l M \kappa dx + \frac{1}{2} \int_l N \varepsilon_0 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_l Q \gamma_0 dx \rightarrow \min. \end{aligned}$$

После подстановки в него деформации ε_0 и кривизны κ из выражения (1) получим:

$$\begin{aligned} W(\mathbf{P}) &= \int_l \frac{1}{2D} \left(M^2 D_A + M N D_S + \right. \\ &\left. + N^2 D_I + Q^2 \frac{D}{D_0} \right) dx \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (6)$$

Наличие слагаемого, содержащего $M \cdot N$, отражает связанность компонент энергии деформации изгиба и растяжения в слоистом стержне произвольной структуры. В структурах, обладающих нулевой жесткостью первого порядка ($D_S = 0$), эта зависимость отсутствует.

Варьируемыми величинами в выражении (7) являются геометрические функции $b_k(x), h_k(x), y_k(x), y_{k+1}(x), (k = 1, \dots, s)$, отражающие поперечные размеры и (или) координаты границ слоев стержня, объединенные в вектор-функцию $\mathbf{P} = \{p_i\}$ с произ-

вольным набором компонент. Данные функции используются в жесткостных характеристиках (4).

Условия связи варьируемых функций сформируем в виде ограничения — равенства на стоимость материалов слоистого стержня:

$$C(\mathbf{P}) = \sum_{k=1}^s c_k \gamma_k \int_{l_k} b_k (y_{k+1} - y_k) dx = C_{\Sigma} = \text{const}, \quad (8)$$

где c_k, γ_k — удельные стоимость и вес k -го материала. Как частные случаи, из условия (8) вытекают ограничения на массу и объем стержня.

Решению вариационной задачи (7), (8) соответствует минимум лагранжиана:

$$L(\mathbf{P}) = \frac{1}{2} (M\kappa + N\varepsilon_0 + Q\gamma_0) + \lambda_1 \sum_{k=1}^s c_k \gamma_k b_k (y_{k+1} - y_k) \rightarrow \min \quad (9)$$

с m уравнениями Эйлера:

$$\frac{\partial L}{\partial p_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, m). \quad (10)$$

В исследованиях [2, 26, 27] продемонстрировано, что в однородных системах такая постановка (при $c_k = \gamma_k = 1$) приводит к конструкции минимального объема. Рассмотрим решение данной оптимизационной задачи для различных вариантов расчетных схем слоистых стержней в рамках общей модели, показанной на рис. 1.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Изгиб стержня симметричной структуры

Полагаем, что при наличии изгибающего момента $M(x)$ отсутствуют усилия N, Q . Структура имеет горизонтальную плоскость симметрии и содержит s слоев, расположенных выше, и s таких же слоев ниже данной плоскости (рис. 1, *c*). В качестве искомой варьируемой функции примем ширину некоторого j -го слоя $b_j(x)$, расположенного выше плоскости симметрии. Аналогично будет варьироваться и ширина соответствующего симметричного слоя снизу.

Жесткостные характеристики представим в виде:

$$D_A(x) = 2 \left[D_{A_0} + E_j b_j (y_{j+1} - y_j) \right]; \\ D_S(x) = 0; \\ D_I(x) = 2 \left[D_{I_0} + \frac{1}{3} E_j b_j (y_{j+1}^3 - y_j^3) \right].$$

Здесь и далее через $D_{A_0}(x), D_{S_0}(x), D_{I_0}(x)$ обозначены жесткостные характеристики (4) части сечения, состоящего из слоев с неварьируемыми размерами. Определив кривизну κ из выражения (1), имеем функционал (9):

$$L(\mathbf{P}) = \frac{M^2}{2D_I} +$$

$$+ 2\lambda_1 \sum_{k=1}^s c_k \gamma_k b_k (y_{k+1} - y_k) \rightarrow \min$$

с уравнением Эйлера (10) при варьировании ширины j -го слоя b_j :

$$\frac{M^2 E_j (y_{j+1}^2 + y_{j+1} y_j + y_j^2)}{6D_I^2} - \lambda_1 c_j \gamma_j = 0. \quad (11)$$

С учетом формулы для напряжения (2) получим из формулы (11) удельную энергию деформации в произвольном k -м слое:

$$W_k(x, y) = \frac{[\sigma_{x,k}^{(M)}]^2}{2E_k} = 3\lambda_1 c_j \gamma_j \frac{E_k}{E_j} \frac{y^2}{y_{j+1}^2 + y_{j+1} y_j + y_j^2}. \quad (12)$$

Дальнейшие результаты будем рассматривать при условии пропорциональности (подобия) координат границ варьируемого j -го слоя:

$$\frac{y_{j+1}(x)}{y_j(x)} = p = \text{const}. \quad (13)$$

Тогда выражение удельной энергии (12) примет вид:

$$W_k(x, y) = \frac{[\sigma_{x,M}^{(k)}]^2}{2E_k} = 3\lambda_1 c_j \gamma_j \frac{E_k}{E_j} \left(\frac{y}{y_j} \right)^2 \frac{1}{1+p+p^2}. \quad (14)$$

Если дополнительно ввести относительную поперечную координату $\zeta = y/y_j$, то удельная энергия

$$W_k(\zeta) = \frac{[\sigma_{x,M}^{(k)}]^2}{2E_k} = \frac{E_k}{E_j} \frac{3\lambda_1 c_j \gamma_j}{1+p+p^2} \zeta^2 \quad (15)$$

теряет зависимость от координаты x . Выражение (15) показывает, что в j -м слое в результате оптимизации стержня возникают цилиндрические поверхности с образующей, перпендикулярной плоскости изгиба, при постоянных значениях координаты ζ , являющиеся поверхностями постоянного уровня удельной энергии деформации — *эквипотенциальными поверхностями*. Наибольшему уровню энергии $W(\zeta) \rightarrow \max$ в j -м слое отвечает поверхность его наружной границы y_{j+1} при $\zeta = 1$. Формирование ЭПП происходит и в других слоях системы.

На рис. 2 на примере четырехслойного стержня с пропорциональными координатами границ $y_1(x), \dots, y_s(x)$ показано распределение эквипотенциальных энергетических уровней в виде графиков — продольных сечений ЭПП. В каждом слое для примера

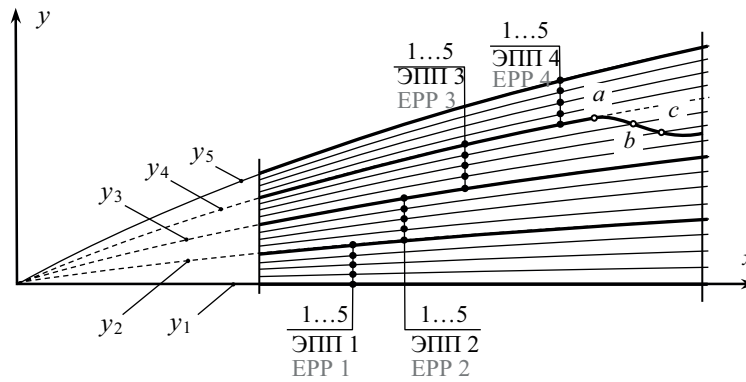


Рис. 2. Продольные сечения эквипотенциальных поверхностей $W_k(\zeta) = \text{const}$ в четырехслойном стержне: a, b, c — точки разрыва энергетических уровней

Fig. 2. Longitudinal cross-sections of equipotential surfaces $W_k(\zeta) = \text{const}$ in a four-layer rod: a, b, c — energy level discontinuity points

отмечены по пять энергетических уровней, обозначенных точками 1–5. В случае несоблюдения условий пропорциональности координат границ в некотором слое (или на его локальном фрагменте — a, b, c на границе y_4) данные ЭПП пересекают границу слоя и становятся разрывными в силу изменения модуля упругости. На таких участках границ градиент удельной энергии $\partial W/\partial y_j \neq 0$ и они не являются ЭПП.

На рис. 3, a представлен график изменения удельной энергии $W_k(\zeta)$ (15) в поперечном направлении, имеющий разрывы на границах слоев.

Таким образом, найденное оптимальное профилирование двух слоев $b_j(x)$ создает в слоистой структуре напряженно-деформированное состояние с потенциальным полем деформаций, в котором поверхности равной удельной энергии деформации геометрически подобны поверхностям раздела слоев. Это обеспечивает выравнивание энергии на границах слоев. Нарушение условий пропорциональности (подобия) границ слоев приводит к разрывности энергетических поверхностей и, как следствие, недогруженности одних и перегруженности других областей слоистой структуры.

Из условия (15) также следует и условие выравнивания напряжений на ЭПП в j -м слое:

$$\sigma_{x,j}(\zeta) = \pm \sqrt{2E_j W_j(\zeta)} = \text{const}. \quad (16)$$

При $\zeta = 1$ достигается максимум энергии деформации (15) и напряжения (16), связанных зависимостью $W_{j,\text{max}} = \sigma_{x,\text{max}}^2 / 2E_j$. Очевидно, что принятие для напряжения предельной величины R_j^\pm — расчетного сопротивления и соответствующего ему значения энергии $W_{j,\text{adm}} = R_j^2 / 2E_j$, доставляет минимум стоимости материалов (8). Это обстоятельство отражает эквивалентность постановки вариационной задачи о минимуме энергии деформации структурно-неоднородной системы (7) при условии постоянства стоимости материалов (8) с оптимизационной задачей, сформулированной на основе критерия минимума стоимости материалов системы. Данный факт для однородных систем применительно к их объему отмечался в ряде работ [2, 26, 27].

Если ввести величину допустимой удельной энергии деформации $W_{k,\text{adm}}$ ($k = 1, \dots, s$) для каждого материала, примененного в слоистом стержне,

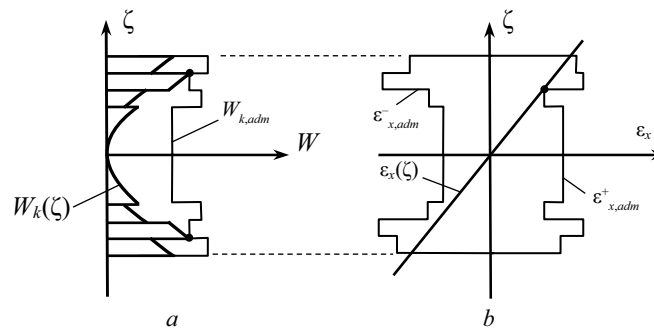


Рис. 3. Графики удельной энергии $W_k(\zeta)$ (15) (a) и деформаций $\epsilon_x(y)$ (b) в слоистом стержне; $W_{k,\text{adm}}, \epsilon_{x,\text{adm}}^+, \epsilon_{x,\text{adm}}^-$ — предельные величины энергии и деформации при растяжении и сжатии

Fig. 3. Graphs of specific energy $W_k(\zeta)$ (15) (a) and deformations $\epsilon_x(y)$ (b) in a layered rod; $W_{k,\text{adm}}, \epsilon_{x,\text{adm}}^+, \epsilon_{x,\text{adm}}^-$ — ultimate values of energy and deformation under tension and compression

то условие энергетической допустимости его состояния может быть записано в виде:

$$\max(W_k(\zeta)) \leq W_{k,adm}. \quad (17)$$

Схема применения критерия (17) проиллюстрирована на рис. 3, а. В предельном состоянии должно выполняться внутреннее касание линии $W_k(\zeta)$ и полигона предельных энергий деформаций материалов $W_{k,adm}$. В соответствии с числом точек касания критерий может быть многоточечным (n -кратным). С увеличением n эффективность слоистой структуры повышается.

Аналогичные построения могут быть выполнены и для напряжений $\sigma_{x,k}(\zeta)$ и их предельных значений (расчетных сопротивлений $\pm R_k^\pm(\zeta)$). В силу разрывности функции напряжений на границах слоев в трудах [24, 28] была обоснована запись критерия прочности через деформации. Опуская здесь коэффициенты учета двухосности напряженного состояния и запаса прочности, запишем его в следующем виде:

$$-\varepsilon_{x,adm}^- \leq \varepsilon_x(\zeta) \leq \varepsilon_{x,adm}^+ \quad (18)$$

Графически это иллюстрируется на рис. 3, б вписыванием прямой линии $\varepsilon_x(\zeta)$ в полигон предельных деформаций $\varepsilon_x^\pm(\zeta)$ с осуществлением внутреннего касания в двух точках. Их положение определяется свойствами материалов слоистого стержня и не зависит от номера слоя, содержащего варьируемую функцию. При рассмотрении всевозможных деформированных состояний, отличающихся знаками предельных деформаций в точках касания, могут быть реализованы четыре типа предельных состояний.

Осевое растяжение (сжатие)

Рассматривая стержень с симметричным расположением слоев при действии продольной силы $N(x)$, получим вышерассмотренные зависимости в виде:

$$D_A = 2(D_{A_0} + E_j b_j h_j); \quad \sigma_{x,k} = E_k \frac{N}{D_A};$$

$$W = \int \frac{N^2}{2D_A} dx; \quad L = \frac{N^2}{2D_A} + \lambda_1 c_j \gamma_j b_j h_j$$

и уравнение Эйлера:

$$\frac{N^2}{2D_A^2} E_j = \lambda_1 c_j \gamma_j,$$

которое при учете формулы (2) для напряжения $\sigma_{x,k}^{(N)}$ дает условия:

$$W_k = \frac{\sigma_{x,k}^2}{2E_k} = \lambda_1 c_j \gamma_j \frac{E_k}{E_j} = \text{const.}$$

В оптимальной неоднородной структуре, испытывающей растяжение (сжатие), происходит формирование эквипотенциальных областей (слоев в целом). Значение удельной энергии в них определяется величиной предельной энергии $W_{adm,k}$ — наиболее нагруженного (деформированного) слоя.

Предельные величины энергии, напряжения (расчетного сопротивления R_k) и деформации $\varepsilon_{adm,k}$ связаны зависимостями:

$$W_{k,adm} = \frac{R_k^2}{2E_k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{x,adm}^2 E_k. \quad (19)$$

С учетом этого искомая варьируемая ширина слоя находится как:

$$b_j(x) = \frac{1}{2E_j h_j} \left(\frac{NE_k}{\pm R_k^\pm} - 2D_{A_0} \right). \quad (20)$$

Очевидно, что в данной задаче аналогично может быть найдена высота слоя $h_j(x)$ или площадь его сечения $A_j(x)$.

Изгиб с растяжением стержня с несимметричным сечением

Пусть при произвольных заданных функциях усилий $M(x), N(x)$ требуется определить высоту $h_1(x)$ и $h_s(x)$ наружных слоев в s -слоynom стержне (рис. 1, д). Будем считать, что из множества координат границ слоев:

$$y_1, y_2, \dots, y_s, y_{s+1}$$

внутренние, произвольно заданные, границы привязаны к отсчетной плоскости x_0z , а координаты двух наружных границ:

$$y_1 = y_2 - h_1; \quad y_{s+1} = y_s + h_s$$

являются искомыми варьируемыми функциями.

Сформируем выражения жесткостных характеристик (4):

$$\begin{aligned} D_A &= E_1 b_1 (y_2 - y_1) + D_{A_0} + E_s b_s (y_{s+1} - y_s); \\ D_S &= E_1 b_1 \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} + D_{S_0} + E_s b_s \frac{y_{s+1}^2 - y_s^2}{2}; \\ D_I &= E_1 b_1 \frac{y_2^3 - y_1^3}{3} + D_{I_0} + E_s b_s \frac{y_{s+1}^3 - y_s^3}{3}, \end{aligned} \quad (21)$$

напряжений (2) и ограничений (8) на стоимость материалов варьируемых слоев. Запишем лагранжиан задачи (9):

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2D} [M^2 D_A + 2MND_S + N^2 D_I] + \\ &+ \lambda_1 [c_1 \gamma_1 b_1 (y_2 - y_1) + c_s \gamma_s b_s (y_{s+1} - y_s)]. \end{aligned}$$

Его варьирование по y_1 и y_{s+1} дает уравнения:

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{M^2}{2D^2} (D_A y_1 - D_S)^2 - \\ &- \frac{MN}{D^2} (D_A y_1 - D_S)(D_I - D_S y_1) + \\ &+ \frac{N^2}{2D^2} (D_I - D_S y_1)^2 = \lambda_1 \frac{c_1 \gamma_1}{E_1}; \\ &\frac{M^2}{2D^2} (D_A y_{s+1} - D_S)^2 - \\ &- \frac{MN}{D^2} (D_A y_{s+1} - D_S)(D_I - D_S y_{s+1}) + \\ &+ \frac{N^2}{2D^2} (D_I - D_S y_{s+1})^2 = \lambda_1 \frac{c_s \gamma_s}{E_s}. \end{aligned} \right.$$

С учетом формул для компонент напряжений (2) они могут быть представлены в виде:

$$\frac{1}{2E_1} [\sigma_{x,1}^{(M)}(y_1) + \sigma_{x,1}^{(N)}(y_1)]^2 = \lambda_1 \frac{c_1 \gamma_1}{E_1} = \text{const};$$

$$\frac{1}{2E_s} [\sigma_{x,s}^{(M)}(y_s) + \sigma_{x,s}^{(N)}(y_s)]^2 = \lambda_1 \frac{c_s \gamma_s}{E_s} = \text{const}, \quad (22)$$

что является условием выравнивания удельной энергии деформации на двух наружных поверхностях $y = y_1(x), y = y_{s+1}(x)$ — ЭПП в оптимальной системе:

$$W_1(x, y_1) = \text{const};$$

$$W_s(x, y_{s+1}) = \text{const}.$$

Отсюда следуют условия постоянства напряжений на наружных границах варьируемых слоев и эквивалентность с задачей, поставленной по критерию минимума стоимости материалов. Вписывание линии предельного распределения деформаций $\varepsilon_x(y)$ в полигон предельных деформаций s -слойной структуры дает четыре возможных предельных состояния. Их реализация в зависимости от функций усилий M, N происходит на определенных участках слоистого стержня. Искомые геометрические функции $h_1(x), h_s(x)$ определяются из условий прочности, записанных с использованием характеристик (21).

Поперечный сдвиг в слоистом стержне

Рассмотрим варьирование ширины $b_j(x)$ некоторого внутреннего слоя при действии в сечении поперечной силы. Покажем, что наряду с точными (в рамках принятых гипотез) формулами для напряжений могут использоваться и приближенные зависимости. В связи с этим поперечное касательное напряжение и характеристику поперечной жесткости будем определять на основе соотношений (5), (6).

Сформировав функционал энергии деформации (7) с ограничением стоимости (8), запишем лагранжиан:

$$L = \frac{Q^2}{2D_Q} + \lambda_1 c_j \gamma_j b_j h_j.$$

Проварьировав его по переменной b_j после преобразований, получим:

$$\frac{Q^2}{2F_\tau^2 b_j^2 G_j} \int_{h_j} f_\tau^2 dy = \lambda_1 c_j \gamma_j b_j h_j.$$

Учитывая формулу для напряжения (5), получим:

$$W_\tau(y) = \frac{\tau_j^2}{2G_j} = \lambda_1 c_j \gamma_j \frac{h_j f_\tau^2(y)}{\int_{h_j} f_\tau^2 dy}. \quad (23)$$

При введении условия пропорциональности границ (13) на поверхностях с относительной координатой $\zeta = y/y_{j+1} = \text{const}$ выражение (23) дает постоянное значение удельной энергии деформации при сдвиге, отражая факт реализации ЭПП. Наибольшее значение энергии наблюдается в уровне $y = 0$, а минимальное $W_\tau = 0$ на наружных поверхностях стержня при отсутствии на них тангенциальных сил. Использование для касательных напряжений формулы (3) позволяет уточнить положение ЭПП в слоистых стержнях с несимметричной структурой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В рассмотренных задачах изгиба, растяжения, поперечного сдвига и совместного изгиба с растяжением слоистых стержней показано совпадение результатов вариационной оптимизации и оптимизации по критерию минимума стоимости материалов. Вариационная постановка с одним изопериметрическим ограничением на суммарную стоимость материалов — необходимым по смыслу задачи — дает *глобальный минимум* функционала энергии деформации и стоимости материалов системы и отражает так называемый идеальный (эталонный) проект. Расширение набора ограничений, отражающих требования норм проектирования (например, по перемещениям), будет неизбежно приводить к удорожанию проекта, что является естественным и объяснимым. Тем не менее знание эталонного проекта с минимальным расходом материалов и энергии деформации ценно и полезно с практической точки зрения [1, 7, 14].

В оптимальной системе варьирование геометрических параметров некоторых составных частей системы (слоев) приводит к формированию в них и за их пределами поверхностей (областей) с одинаковым значением удельной энергии деформации. Форма и расположение эквипотенциальных поверхностей определяется действующими усилиями и структурой системы.

Из интегрального вариационного критерия минимума энергии деформации вытекают практические критерии выравнивания удельной энергии деформации, а также основного напряжения либо деформации на поверхности областей с варьируемыми размерами. В составных неоднородных структурах рекомендуется, как более удобный, критерий выравнивания деформаций. Данные критерии носят уже не интегральный, а локальный характер, что упрощает их практическое использование.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Перельмутер А.В.* Задачи синтеза в теории сооружений (краткий исторический обзор) // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 2 (55). С. 70–106. EDN VSTVRX.

2. *Юрьев А.Г., Панченко Л.А.* Энергетическое начало в теории синтеза конструкций // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова. 2023. № 10. С. 35–41. DOI: 10.34031/2071-7318-2023-8-10-35-41. EDN SGKZLNZ.

3. *Yankovskii A.P.* Refined Modeling of Flexural Deformation of Layered Plates with a Regular Structure Made from Nonlinear Hereditary Materials // *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 53. Issue 6. Pp. 705–724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9. EDN XXUTAL.
4. *Yankovskii A.P.* Critical Analysis of the Equations of Statics in the Bending Theories of Composite Plates Obtained on the Basis of Variational Principles of Elasticity Theory 1. General Theories of High Order // *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Issue 3. Pp. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8. EDN ASGJMZ.
5. *Троицкий В.А., Петухов Л.В.* Оптимизация формы упругих тел. М. : Наука, 1982. 432 с.
6. *Юрьев А.Г.* Вариационные постановки задач структурного синтеза в статике сооружений. М. : МИСИ, 1987. 94 с.
7. *Ляхович Л.С., Перельмутер А.В.* Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // *Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций*. 2014. Т. 10. № 2. С. 14–23. EDN SXCOQB.
8. *Васильков Г.В.* Эволюционные задачи строительной механики. Синергетическая парадигма. Ростов н/Д. : ИнфоСервис, 2003. EDN QNKGAT.
9. *Гольдштейн Ю.Б., Соломец М.А.* Вариационные задачи статки оптимальных стержневых систем. Л. : Изд-во ЛГУ, 1980. 208 с.
10. *Мищенко А.В., Вешкин М.С.* Применение критерия минимума энергии деформации в задачах рационального профилирования неоднородных стержней // *Известия высших учебных заведений. Строительство*. 2025. № 5 (797). С. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-797-5-15-29. EDN TCEUPL.
11. *Юрьев А.Г., Нужный С.Н.* Оптимизация топологии однопролетных одноэтажных рам // *Фундаментальные исследования*. 2013. № 10–4. С. 742–746. EDN RCHQFH.
12. *Ebrahimi M., Fakoor M.* Design-oriented fracture criteria for orthotropic composites based on minimum strain energy density theory // *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025. Vol. 140. P. 105182. DOI: 10.1016/j.tafmec.2025.105182. EDN EHENYRE.
13. *Beck R., da Silva Ja.A.P., da Silva L.Fm., Tita V., de Medeiros R.* Assessing critical fracture energy in mode I for bonded composite joints: A numerical–experimental approach with uncertainty analysis // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2024. DOI: 10.1177/14644207241229601. EDN QPBVWG.
14. *Ляхович Л.С.* Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. Томск : Изд-во ТГАСУ, 2009. 371 с. EDN QNOOHF.
15. *Wenzel C., Vidal P., D’Ottavio M., Polit O.* Coupling of heterogeneous kinematics and Finite Element approximations applied to composite beam structures // *Composite Structures*. 2014. Vol. 116. Pp. 177–192. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.04.022
16. *Biscani F., Giunta G., Belouettar S., Carrera E., Hu H.* Variable kinematic beam elements coupled via Arlequin method // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93. Issue 2. Pp. 697–708. DOI: 10.1016/j.compstruct.2010.08.009. EDN OEMSBZ.
17. *Vidal P., Polit O.* A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams // *Composite Structures*. 2008. Vol. 84. Issue 1. Pp. 56–72. DOI: 10.1016/j.compstruct.2007.06.009. EDN KUKZVN.
18. *Liu S., Soldatos K.P.* On the prediction improvement of transverse stress distributions in cross-ply laminated beams: advanced versus conventional beam modelling // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002. Vol. 44. Issue 2. Pp. 287–304. DOI: 10.1016/S0020-7403(01)00098-4
19. *Matsunaga H.* Interlaminar stress analysis of laminated composite beams according to global higher-order deformation theories // *Composite Structures*. 2002. Vol. 55. Issue 1. Pp. 105–114. DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00134-9
20. *Tahani M.* Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories // *Composite Structures*. 2007. Vol. 79. Issue 4. Pp. 535–547. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.02.019. EDN KULD MX.
21. *Gorynin A.G., Gorynin G.L., Golushko S.K.* Mathematical Modeling of Three-dimensional Stress-strain State of Homogeneous and Composite Cylindrical Axisymmetric Shells // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2024. Vol. 17. Issue 1. Pp. 27–37. EDN IRZWVG.
22. *Hu H., Belouettar S., Potier-Ferry M., Daya E.M., Makradi A.* Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the Arlequin method // *Composite Structures*. 2010. Vol. 92. Issue 2. Pp. 515–522. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.08.051
23. *Atashipour S.R., Challamel N., Girhammar U.A., Folkow P.D.* Flexible N-layer composite beam/column elements with interlayer partial interaction imperfection — a novel approach to structural stability and dynamic analyses // *Composite Structures*. 2025. Vol. 367. P. 119219. DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.119219. EDN HBOLFG.
24. *Мищенко А.В.* Методы расчета и рационального проектирования структурно неоднородных стержней. Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2025. 146 с. EDN AWFVQL.
25. *Мищенко А.В.* Напряженное состояние структурно-неоднородных стержней из разномодульных материалов при термосиловом воздействии //

Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 4. С. 43–52. EDN WCEXDF.

26. *Wasiutynski Z.* On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength // *Bull. Acad. Pol. Sci. Tech.* 1960. Vol. 8. Issue 6. Pp. 259–268.

27. *Мищенко А.В., Кучеренко И.В.* О соответствии общефизических и технико-экономических

критериев оптимизации механических систем // *Инновационные технологии укрепления грунтовых массивов на транспортных коммуникациях в сложных геологических условиях* : мат. Всеросс. науч.-практ. конф. 2025. С. 183–191. EDN ZDLFSL.

28. *Немировский Ю.В.* Равнопрочные слоистые упругие арки и балки // *Известия высших учебных заведений. Строительство.* 1996. № 8. С. 20–25. EDN XPVISD.

Поступила в редакцию 17 декабря 2025 г.

Принята в доработанном виде 27 декабря 2025 г.

Одобрена для публикации 29 января 2026 г.

О Б АВТОРАХ: **Андрей Викторович Мищенко** — доктор технических наук, доцент, профессор, кафедра строительной механики; **Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)**; 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113; заведующий кафедрой общепрофессиональных дисциплин; **Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище**; 630117, г. Новосибирск, ул. Иванова, д. 49; РИНЦ ID: 123809, Scopus: 56996260100, ResearcherID: AAA-8081-2022, ORCID: 0000-0002-3540-7631; mishchenko.av59@yandex.ru;

Максим Сергеевич Вешкин — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики; **Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)**; 630008, г. Новосибирск, ул. Ленинградская, д. 113; РИНЦ ID: 819363, Scopus: 57200289320, ResearcherID: КАМ-2991-2024, ORCID: 0009-0007-6775-8392; m.veshkin@sibstrin.ru.

Вклад авторов:

Мищенко А.В. — научное руководство, концепция исследования, развитие методологии, итоговые выводы.

Вешкин М.С. — работа с текстом, итоговые выводы.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Perel'muter A.V. Synthesis problems in the theory of structures (brief historical review). *Journal of Construction and Architecture.* 2016; 2(55):70-106. EDN VSTVRX. (rus.).
2. Yuriev A., Panchenko L. Energy beginning in the theory of structure synthesis. *Bulletin of Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov.* 2023; 10:35-41. DOI: 10.34031/2071-7318-2023-8-10-35-41. EDN SGKZNZ. (rus.).
3. Yankovskii A.P. Refined Modeling of Flexural Deformation of Layered Plates with a Regular Structure Made from Nonlinear Hereditary Materials. *Mechanics of Composite Materials.* 2018; 53(6):705-724. DOI: 10.1007/s11029-018-9697-9. EDN XXUTAL.
4. Yankovskii A.P. Critical Analysis of the Equations of Statics in the Bending Theories of Composite Plates Obtained on the Basis of Variational Principles of Elasticity Theory I. General Theories of High Order. *Mechanics of Composite Materials.* 2020; 56(3):271-290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8. EDN ASGJMZ.
5. Troitsky V.A., Petukhov L.V. *Optimization of the shape of elastic bodies.* Moscow, Nauka, 1982; 432. (rus.).
6. Yuryev A.G. *Variational statements of problems of structural synthesis in the statics of structures.* Moscow, MISI, 1987; 94. (rus.).
7. Lyakhovich L.S., Perel'muter A.V. Some problems of building constructions optimal projecting. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering.* 2014; 10(2):14-23. EDN SXCOQB. (rus.).
8. Vasilkov G.V. Evolutionary tasks of structural mechanics. *Synergetic paradigm.* Rostov-on-Don, Info-Service, 2003. EDN QNKGAT. (rus.).
9. Goldstein Yu.B., Solomeshch M.A. *Variational problems of statics of optimal rod systems.* Leningrad, Leningrad State University Publishing House, 1980; 208. (rus.).
10. Mishchenko A.V., Veshkin M.S. Application of the criterion of minimum deformation energy in problems of rational profiling of heterogeneous rods. *News of higher educational institutions. Construction.* 2025; 5(797):15-29. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-797-5-15-29. EDN TCEUPL. (rus.).
11. Yuriev A.G., Nuzhnyi S.N. Topology optimization of one-spanned one-storeyed frames. *Fundamental Research.* 2013; 10-4:742-746. EDN RCHQFH. (rus.).

12. Ebrahimi M., Fakoor M. Design-oriented fracture criteria for orthotropic composites based on minimum strain energy density theory. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2025; 140:105182. DOI: 10.1016/j.tafmec.2025.105182. EDN EHNRYE.
13. Beck R., da Silva Ja.A.P., da Silva L.Fm., Tita V., de Medeiros R. Assessing critical fracture energy in mode I for bonded composite joints: A numerical–experimental approach with uncertainty analysis. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications*. 2024. DOI: 10.1177/14644207241229601. EDN QPBVWG.
14. Lyakhovich L.S. *Special properties of optimal systems and the main directions of their implementation in the methods of calculating structures*. Tomsk, TSUACE Publishing House, 2009; 371. EDN QNOOHF. (rus.).
15. Wenzel C., Vidal P., D’Ottavio M., Polit O. Coupling of heterogeneous kinematics and Finite Element approximations applied to composite beam structures. *Composite Structures*. 2014; 116:177-192. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.04.022
16. Biscani F., Giunta G., Belouettar S., Carrera E., Hu H. Variable kinematic beam elements coupled via Arlequin method. *Composite Structures*. 2011; 93(2):697-708. DOI: 10.1016/j.compstruct.2010.08.009. EDN OEMSBZ.
17. Vidal P., Polit O. A family of sinus finite elements for the analysis of rectangular laminated beams. *Composite Structures*. 2008; 84(1):56-72. DOI: 10.1016/j.compstruct.2007.06.009. EDN KUKZVN.
18. Liu S., Soldatos K.P. On the prediction improvement of transverse stress distributions in cross-ply laminated beams: advanced versus conventional beam modelling. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2002; 44(2):287-304. DOI: 10.1016/S0020-7403(01)00098-4
19. Matsunaga H. Interlaminar stress analysis of laminated composite beams according to global higher-order deformation theories. *Composite Structures*. 2002; 55(1):105-114. DOI: 10.1016/S0263-8223(01)00134-9
20. Tahani M. Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories. *Composite Structures*. 2007; 79(4):535-547. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.02.019. EDN KULDMMX.
21. Gorynin A.G., Gorynin G.L., Golushko S.K. Mathematical Modeling of Three-dimensional Stress-strain State of Homogeneous and Composite Cylindrical Axisymmetric Shells. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*. 2024; 17(1):27-37. EDN IRZWVG.
22. Hu H., Belouettar S., Potier-Ferry M., Daya E.M., Makradi A. Multi-scale nonlinear modelling of sandwich structures using the Arlequin method. *Composite Structures*. 2010; 92(2):515-522. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.08.051
23. Atashipour S.R., Challamel N., Girhammar U.A., Folkow P.D. Flexible N-layer composite beam/column elements with interlayer partial interaction imperfection — A novel approach to structural stability and dynamic analyses. *Composite Structures*. 2025; 367:119219. DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.119219. EDN HBOLFG.
24. Mishchenko A.V. *Methods of calculation and rational design of structurally heterogeneous rods*. Novosibirsk, NGASU (Sibstrin), 2025; 146. EDN AWFVQL. (rus.).
25. Mishchenko A.V. Stressstate of structurally not uniform rods made from different module materials under thermo-force influences. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2016; 4:43-52. EDN WCEXDF. (rus.).
26. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. *Bull. Acad. Pol. Sci. Tech.* 1960; 8(6):259-268.
27. Mishchenko A.V., Kucherenko I.V. On the conformity of general physical and technical-economic criteria of optimization of mechanical systems. *Innovative technologies for strengthening soil massifs on transport communications in complex geological conditions: Proceedings of the All-Russian scientific and practical conference*. 2025; 183-191. EDN ZDLFSL. (rus.).
28. Nemirovsky Yu.V. Equal-strength layered elastic arches and beams. *News of higher educational institutions. Construction*. 1996; 8:20-25. EDN XPVISD. (rus.).

Received December 17, 2025.

Adopted in revised form on December 27, 2025.

Approved for publication on January 29, 2026.

B I O N O T E S: **Andrey V. Mishchenko** — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor, Department of Structural Mechanics; **Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)**; 113 Leningradskaya st., Novosibirsk, 630008, Russian Federation; Head of the Department of General Professional Disciplines; **Novosibirsk Higher Military Command Order of Zhukov School**; 49 Ivanova st., Novosibirsk, 630117, Russian Federation; ID RSCI: 123809, Scopus: 56996260100, ResearcherID: AAA-8081-2022, ORCID: 0000-0002-3540-7631; mishchenko.av59@yandex.ru;

Maxim S. Veshkin — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics; **Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)**; 113 Leningradskaya st., Novosibirsk, 630008, Russian Federation; ID RSCI: 819363, Scopus: 57200289320, ResearcherID: KAM-2991-2024, ORCID: 0009-0007-6775-8392; m.veshkin@sibstrin.ru.

Author contributions:

Andrey V. Mishchenko — scientific supervision, study concept, methodology development, and final conclusions.

Maxim S. Veshkin — text editing and final conclusions.

The authors declare no conflicts of interest.