

Прогнозирование жесткостных характеристик бетона на основе аналитической гомогенизации

Валентин Викторович Кравченко

Брестский государственный технический университет (БрГТУ); г. Брест, Республика Беларусь

АННОТАЦИЯ

Введение. Прогнозирование жесткостных характеристик бетона в рамках научного подхода является актуальной задачей современной теории бетоноведения. Учитывая представление о структуре бетона как трехфазного композиционного материала, состоящего из цементной матрицы, заполнителей и интерфейсной транзитной зоны между ними, наиболее оптимальными для решения данной проблемы служат методы аналитической гомогенизации. Существующие расчетные модели для прогнозирования жесткостных характеристик бетона на основе методов аналитической гомогенизации не в полной мере учитывают особенности его структуры, что обуславливает необходимость их совершенствования.

Материалы и методы. Предлагаемый усовершенствованный подход для прогнозирования жесткостных характеристик бетонного композита включает оценку его эффективного тензора жесткости (упругости) 4-го ранга на основе методов аналитической гомогенизации механики композиционных материалов.

Результаты. Сформулированы предпосылки и допущения усовершенствованного подхода. Приведены положения, рассматривающие зерна крупного заполнителя в виде композитных частиц как сферической формы, так и в виде сплюснутого сфероида для пластинчатой (лещадной) формы зерен и вытянутого сфероида для игольчатой формы зерен, с располагаемой вокруг них транзитной зоной. Предложен итерационный метод, по которому жесткостные характеристики бетона определяют последовательно, вычисляя на каждой итерации жесткостные характеристики композитной системы «цементная матрица – композитная частица i -й фракции». Представлена численная методика расчета эффективного модуля упругости бетона в рамках предлагаемого подхода.

Выводы. Предлагаемый усовершенствованный подход на основе аналитической гомогенизации позволяет оценивать жесткостные характеристики бетона с учетом особенностей его структуры в виде сфероидной формы зерен заполнителя, наличия интерфейсной транзитной зоны вокруг зерен заполнителя, а также высокой объемной концентрации заполнителя в его структуре.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бетон, жесткостные характеристики, интерфейсная транзитная зона, аналитическая гомогенизация, сфероидные включения, обобщенный самосогласованный метод, метод двойного включения, дифференциальный метод

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кравченко В.В. Прогнозирование жесткостных характеристик бетона на основе аналитической гомогенизации // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 5. С. 752–762. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.752-762

Автор, ответственный за переписку: Валентин Викторович Кравченко, vvkravchenko@g.bstu.by.

Prediction of concrete stiffness characteristics using analytical homogenization

Valentin V. Kravchenko

Brest State Technical University (BrSTU); Brest, Republic of Belarus

ABSTRACT

Introduction. Prediction of concrete stiffness characteristics within a scientific framework remains a relevant task of modern concrete science. Considering concrete as a three-phase composite material consisting of a cement matrix, aggregates, and the interfacial transition zone between them, analytical homogenization methods are among the most effective approaches for addressing this problem. However, existing computational models for predicting the stiffness characteristics of concrete based on analytical homogenization methods do not fully account for the specific features of its structure, which necessitates their further development.

Materials and methods. The proposed approach for predicting the stiffness characteristics of concrete involves estimating its effective fourth-order stiffness (elasticity) tensor based on analytical homogenization methods from the micromechanics of composites.

Results. The assumptions of the proposed approach are formulated. Solutions are introduced that consider the grains of coarse aggregate as composite particles, both in the form of spheres and as oblate spheroids for flaky grains, and prolate spheroids for elongated grains surrounded by the interfacial transition zone. An iterative method is also proposed, whereby the stiffness characteristics of concrete are determined sequentially, calculating the stiffness characteristics of the composite system “cement matrix – composite particle of the i -th fraction” at each iteration. A numerical method for calculating the effective elasticity modulus of concrete according to the proposed approach is provided.

Conclusions. The proposed approach based on analytical homogenization is designed to evaluate the stiffness characteristics of concrete, taking into account the features of its structure, such as the spheroidal shape of the aggregates, the presence of an interfacial transition zone around them, and the high volumetric concentration of aggregates.

KEYWORDS: concrete, stiffness characteristics, interfacial transition zone, analytical homogenization, spheroidal inclusions, generalized self-consistent model, double inclusion model, differential model

FOR CITATION: Kravchenko V.V. Prediction of concrete stiffness characteristics using analytical homogenization. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(5):752-762. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.5.752-762 (rus.).

Corresponding author: Valentin V. Kravchenko, vkravchenko@g.bstu.by.

ВВЕДЕНИЕ

Жесткостные характеристики бетона, к которым относят модуль Юнга, коэффициент Пуассона и другие, — важные механические характеристики, необходимые для оценки его напряженно-деформированного состояния. В современной теории бетоноведения проблема прогнозирования жесткостных характеристик остается актуальной, выраженной в отсутствии консенсуса в научном сообществе относительно применяемых расчетных моделей, что во многом обусловлено гетерогенной структурой материала.

Бетон — трехфазный композиционный материал [1, 2], структура которого состоит из цементной матрицы (в технической литературе называемой цементным камнем), распределенных в ней зерен заполнителя и интерфейсной транзитной зоны (англ. — Interfacial Transition Zone), представляющей слой цементной матрицы, располагаемый вокруг зерен заполнителя, характеристики которого отличаются от основной матрицы. При этом цементный камень является поликристаллическим композитом, фазовый и количественный состав которого изменяется в процессе гидратации вяжущего.

Существующие подходы к прогнозированию жесткостных характеристик бетона включают феноменологический подход, основанный на аппроксимации экспериментальных данных, и научный подход, базирующийся на положениях механики композиционных материалов.

Одним из фундаментальных принципов механики композиционных материалов служит представление гетерогенной структуры композиционного материала в виде эквивалентной однородной среды с усредненными характеристиками, именуемыми эффективными. Эффективные характеристики композиционных материалов устанавливают методами аналитической и численной гомогенизации. Аналитическая гомогенизация также имеет другое распространенное название — гомогенизация усредненного поля (англ. — Mean-Field Homogenization). В настоящее время для определения жесткостных характеристик бетонного композита существует значительное количество расчетных моделей, в абсолютном большинстве которых используют методы аналитической гомогенизации [3–14].

Следует отметить, что применение численных методов гомогенизации к трехфазной композитной структуре бетона имеет существенное ограничение,

выраженное в необходимости моделирования пространственной геометрической модели структуры бетона, используемой затем для создания конечно-элементной или воксельной сетки. Особую сложность в моделировании пространственной геометрической модели структуры бетона представляет воспроизведение транзитной зоны вокруг зерен заполнителя, характеризующейся толщиной оболочки, значительно меньшей по сравнению с их размерами.

Эффективный тензор жесткости (модулей упругости) C^{eff} в методах аналитической гомогенизации определяют по следующему уравнению [15, 16]:

$$C^{eff} = \left(\sum_r f_r C_r : A_r \right) : \left(\sum_r f_r A_r \right)^{-1}, \quad (1)$$

где C_r — тензор жесткости (модулей упругости) 4-го ранга r -й фазы ($r = 1, 2, 3, \dots, n$); f_r — объемная концентрация r -й фазы в репрезентативном объеме; A_r — тензор 4-го ранга концентрации деформаций r -й фазы; « : » — двойное скалярное произведение (свертка) тензоров.

Тензор концентрации деформаций устанавливают из решения задачи Эшелби для упругого эллипсоидного включения (англ. — Eshelby's Inclusion Problem) [15, 16]:

$$A_r = [I + P_r : (C_r - C_0)]^{-1}; P_r = S_r : C_0^{-1}, \quad (2)$$

где I — единичный тензор 4-го ранга; P_r — поляризационный тензор 4-го ранга (также называемый тензором Хилла) r -й фазы, помещенной в гомогенную упругую среду с жесткостными характеристиками C_0 ; S_r — тензор Эшелби 4-го ранга r -й фазы.

Значения компонент тензора Эшелби в общем случае зависят от жесткостных характеристик C_0 , геометрической формы фазы и ее пространственной ориентации.

Одним из допущений, принятым в существующих расчетных моделях, является предположение, что все фазы бетонного композита (т.е. зерна заполнителя, независимо от его вида) обладают сферической формой. Такое допущение значительно упрощает определение A_r , поскольку в этом случае тензор Эшелби имеет следующий вид [15, 16]:

$$S_r = \frac{3 \cdot K_0}{3 \cdot K_0 + 4 \cdot G_0} V + \frac{6 \cdot (K_0 + 2 \cdot G_0)}{5 \cdot (3 \cdot K_0 + 4 \cdot G_0)} D, \quad (3)$$

где K_0 и G_0 — объемный модуль и модуль сдвига упругой среды; V и D — объемная (шаровая) и девиаторная составляющие единичного тензора 4-го ранга.

Допущение о сферической форме фаз довольно значимо, позволяет упростить вычисления, но искажает реальную форму зерен заполнителя, что особенно актуально для крупного заполнителя из горных пород, получаемого путем дробления, поскольку их геометрическая форма в большей степени приближена к форме эллипсоида вращения в виде сплюснутого сфероида для пластинчатой (лещадной) формы зерен и вытянутого сфероида для игольчатой формы зерен.

Другая ключевая особенность имеющихся расчетных моделей — повсеместное использование метода Mori – Tanaka аналитической гомогенизации [15, 16], математическую модель которого получают, принимая следующие равенства:

$$K_0 = K_{cm}; G_0 = G_{cm}, \quad (4)$$

где K_{cm} и G_{cm} — объемный модуль и модуль сдвига цементного камня.

Однако применение метода Mori – Tanaka для определения жесткостных характеристик бетонного композита сопряжено с рядом ограничений:

1. Метод не учитывает наличие межфазного слоя между матрицей и включением, поэтому для использования данного метода следует предварительно преобразовать исходную структурно-геометрическую модель композитной системы таким образом, чтобы исключить наличие межфазного слоя.

2. Точность метода снижается при объемной концентрации включения примерно более 30 % [17, 18]. Это связано с тем, что математическая модель метода не учитывает взаимное влияние полей напряжений и деформаций от смежных частиц включения, увеличивающееся по мере повышения их концентрации. Метод также чувствителен к контрасту (разнице в значениях жесткостных характеристик) между матрицей и включением, высокий контраст также способствует снижению точности получаемых результатов. Поскольку объемная концентрация заполнителя в бетоне может достигать 85 %, а в начальный период твердения наблюдается значительный контраст между цементным камнем и заполнителем, оценка эффективных жесткостных характеристик бетонного композита этим методом может содержать значительную погрешность.

Основная цель исследования заключается в совершенствовании существующих подходов к определению эффективных жесткостных характеристик бетонного композита на основе аналитической гомогенизации с учетом особенностей его структуры в виде сфероидной формы зерен заполнителя, наличия интерфейсной транзитной зоны вокруг зерен заполнителя, а также высокой объемной концентрации заполнителя в его структуре.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Предпосылки и допущения предлагаемого подхода

1. Геометрическая форма зерен крупного заполнителя представлена в виде сплюснутого сфероида

для пластинчатой (лещадной) формы зерен, вытянутого сфероида для игольчатой формы зерен и сферической для зерен околосферической формы.

2. Количество зерен, имеющих форму вытянутого и сплюснутого сфероида, определяют через содержание зерен пластинчатой (лещадной) и игольчатой формы в заполнителе. При этом предполагается, что количество зерен каждой формы одинаково и составляет половину значения показателя содержания.

3. Геометрическая форма зерен мелкого заполнителя рассматривается как сферическая.

4. Для описания гранулометрического состава заполнителя принято вероятностное распределение Gates – Gaudin – Schuhman¹:

$$P(d) = \left(\frac{d}{d_{\max}} \right)^m, \quad (5)$$

где $P(d)$ — доля зерен в заполнителе, размер которых меньше d ; d_{\max} — наибольшая крупность заполнителя; m — параметр распределения.

5. Размер зерен заполнителя характеризуют средним диаметром, определяемым для каждой фракции из гранулометрического состава. Для сфероидов средний диаметр соответствует размеру большей полуоси. Размеры малых полуосей выражают через коэффициент соотношения полуосей.

6. Средний диаметр зерен каждой фракции соответствует взвешенному по объему среднему размеру $D_{4,3}$ (средний диаметр Де Брукера) [19].

7. Интерфейсная транзитная зона распределена вокруг зерен заполнителя в виде равномерного слоя постоянной толщины.

8. Жесткостные характеристики интерфейсной транзитной зоны определяют через коэффициент соотношения к характеристикам цементной матрицы.

9. На границе раздела зерен заполнителя и транзитной зоны выполняются условия идеального контакта (англ. — perfect bound), обеспечивающие совместность полей напряжений и деформаций на границе раздела.

10. Все компоненты бетона (цементный камень, заполнители) рассматриваются как изотропный материал.

Композитная частица заполнителя

Поскольку интерфейсная транзитная зона образуется только на границе между зёрнами заполнителя и цементным камнем, ее можно рассматривать как неотъемлемую часть заполнителя в виде концентрической оболочки вокруг каждого зерна, вместе с ним образующей единое композитное включение — композитную частицу. Такой подход позво-

¹ ISO 9276-2:2014. Representation of results of particle size analysis Part 2: Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size distributions. Ed. 2. 2014. 29 p.

ляет преобразовать исходную трехфазную модель бетонного композита к композитной системе «цементный камень — композитные частицы», в которой межфазный слой отсутствует. В исследованиях [20, 21] его применяли для моделирования композитных частиц сферической формы в структуре бетона.

Для определения эффективных жесткостных характеристик композитной частицы наиболее подходящими методами аналитической гомогенизации являются:

1) для композитных частиц сферической формы — обобщенный самосогласованный метод (англ. — Generalized Self-Consistent Scheme, GSCS) [22], в котором структура композита представлена в виде сферического включения, вокруг которого расположена концентрическая оболочка матрицы, помещенного в эквивалентную гомогенную среду с эффективными свойствами;

2) для композитных частиц сфероидной формы — метод двойного включения (англ. — Double Inclusion Model, DIM) [23], в котором композит обладает схожей структурой, только в виде эллипсоидного включения. С целью определения эффективных характеристик композит рассматривают в двух состояниях, при которых эффективные свойства гомогенной среды сперва соответствуют свойствам матрицы, а затем — включения.

Эффективные жесткостные характеристики сферических композитных частиц по GSCS определяют, используя следующие уравнения [22]:

$$K_p^{eff} = K_{iz} + \frac{f_{agg} \cdot (K_{agg} - K_{iz})}{1 + (1 - f_{agg}) \cdot \left(\frac{K_{agg} - K_{iz}}{K_{iz} + 4/3 \cdot G_{iz}} \right)}; \quad (6)$$

$$A \cdot \left(\frac{G_p^{eff}}{G_{iz}} \right)^2 + B \cdot \left(\frac{G_p^{eff}}{G_{iz}} \right) + C = 0,$$

где K_p^{eff} и G_p^{eff} — эффективный объемный модуль и модуль сдвига композитной частицы; K_{agg} и G_{agg} — эффективный объемный модуль и модуль сдвига зерен заполнителя; K_{iz} и G_{iz} — эффективный объемный модуль и модуль сдвига зерен интерфейсной транзитной зоны; f_{agg} — объемная концентрация зерна заполнителя в композитной частице; A , B , C — коэффициенты, зависящие от f_{agg} , G_{agg}/G_{iz} , коэффициентов Пуассона ν_{agg} и ν_{iz} , определяемые по формулам, приведенным в работе [22].

Объемную концентрацию зерна заполнителя в композитной частице устанавливают по зависимости:

$$f_{agg} = \frac{a^2 \cdot c}{(a + \delta_{iz})^2 \cdot (c + \delta_{iz})}, \quad (7)$$

где a — размер полуоси сфероиды, соответствующей экваториальному радиусу; c — размер полуоси сфе-

роида, соответствующей полярному радиусу; δ_{iz} — толщина равномерного слоя интерфейсной транзитной зоны.

Для сферы $a = c = r_{agg}$ (где r_{agg} — средний радиус зерна заполнителя, равный половине $D_{4,3}$); для вытянутого сфероида $c = r_{agg}$, $a = r_{agg}/\rho$ (где $\rho > 1$ — коэффициент соотношения полуосей); для сплюснутого сфероида $a = r_{agg}$, $c = r_{agg} \cdot \rho$ (где $\rho < 1$).

Эффективные жесткостные характеристики эллипсоидных композитных частиц по DIM определяют с помощью уравнения [23]:

$$C_p^{eff} = \left[\phi (C_{MT})^{-1} + (1 - \phi) (C_{MT^{-1}})^{-1} \right]^{-1}, \quad (8)$$

где C_p^{eff} — эффективный тензор жесткости 4-го ранга композитной частицы; C_{MT} — тензор жесткости 4-го ранга, определенный методом Mori – Tanaka для $C_0 = C_{iz}$ (уравнения (1), (2)); ϕ — квадратичный сплайн, $\phi = 0,5 \cdot f_{agg} \cdot (1 + f_{agg})$; $C_{MT^{-1}}$ — тензор жесткости 4-го ранга, определенный методом Mori – Tanaka для $C_0 = C_{agg}$.

Итерационная схема для определения эффективных жесткостных характеристик

После преобразования к композитной системе «цементный камень – композитные частицы» основной проблемой при определении ее эффективных жесткостных характеристик остается высокая концентрация композитных частиц. Одним из эффективных решений является итерационный подход, по которому на каждой i -й итерации устанавливают эффективные жесткостные характеристики двухфазной композитной системы «цементная матрица — композитная частица i -й фракции».

Гомогенная среда с эффективными жесткостными характеристиками, определенными на i -й итерации, служит фазой матрицы для $i + 1$ -й итерации. Для первой итерации фазой матрицы является цементный камень. Соответственно эффективные жесткостные характеристики бетонного композита получают на последней итерации.

Количество итераций соответствует количеству фракций заполнителя, которое устанавливают из гранулометрического состава заполнителя, таким образом, чтобы содержание каждой фракции в бетонном композите не превышало определенного предельного значения в зависимости от применяемого метода гомогенизации. Также следует учитывать, что для композитных частиц, образованных из крупного заполнителя, в рамках каждой итерации фактически реализуют три последовательных итерации, учитывающих как сферическую, так и сфероидную форму композитных частиц.

Порядок итераций, при котором размер композитных частиц последовательно изменяется от наименьшего к наибольшему, предпочтительный, позволяющий снизить влияние контраста между матрицей и включением, поскольку значения жесткостных ха-

рактических характеристик композитных частиц увеличиваются по мере увеличения размера зерна заполнителя.

В данном исследовании для определения эффективных жесткостных характеристик на каждой итерации выбран дифференциальный метод (англ. — Differential Scheme) аналитической гомогенизации [16] с предельным содержанием каждой фракции в структуре бетона не более 15 %.

В основе дифференциального метода лежит инкрементный процесс в виде постепенного добавления в матрицу бесконечно малого количества включения до тех пор, пока его концентрация не достигнет заданного значения. Высокая точность при малых концентрациях включения делает его оптимальным для использования в итерационной схеме на каждой итерации.

С математической точки зрения инкрементный процесс представляет систему дифференциальных уравнений эффективных жесткостных характеристик композита относительно концентрации включения, интегрируемых до заданного значения этой концентрации. В контексте рассматриваемой итерационной схемы такая система дифференциальных уравнений принимает следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{C}_i^{eff}}{dc_{p,i}} = \frac{1}{1-c_{p,i}} (\mathbf{C}_{p,i}^{eff} - \mathbf{C}_i^{eff}) : \mathbf{A}_{p,i}; \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_i^{eff} (c_{p,i} = 0) = \begin{cases} \mathbf{C}_{cm} & i = 0 \\ \mathbf{C}_{i-1}^{eff} & i > 1 \end{cases}$$

где \mathbf{C}_i^{eff} — эффективный тензор жесткости 4-го ранга бетонного композита на i -й итерации; $\mathbf{C}_{p,i}^{eff}$ — эффективный тензор жесткости 4-го ранга композитной частицы i -й фракции; $\mathbf{A}_{p,i}$ — тензор 4-го ранга концентрации деформаций композитной частицы i -й фракции; \mathbf{C}_{cm} — тензор жесткости 4-го ранга цементного камня; $c_{p,i}$ — объемная концентрация композитных частиц i -й фракции в бетоне, определяемая как:

$$c_{p,i} = c_{agg} \cdot f_{s,i} \cdot \frac{1}{f_{agg,i}}, \quad (10)$$

где c_{agg} — объемная концентрация заполнителя в бетоне; $f_{s,i}$ — содержание зерен i -й фракции в заполнителе, определяемое из гранулометрического состава. Множитель $1/f_{agg,i}$ учитывает увеличение объемной концентрации эффективных частиц i -й фракции в структуре бетона по сравнению с соответствующей объемной концентрацией зерен заполнителя.

Стоит отметить ряд особенностей системы дифференциальных уравнений (9):

1) формально система состоит из 36 уравнений, если тензор жесткости 4-го ранга рассматривать в матричном представлении, например в нотации Фойгта (англ. — Voigt notation). Учитывая его симметрию, характерную, например, для изотропных материалов, фактически система уравнений может быть представлена в виде 12 уравнений;

2) уравнения являются нелинейными, поскольку при вычислении тензора $\mathbf{A}_{p,i}$ принимают $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_i^{eff}$, таким образом, дифференциальный метод по сути близок к самосогласованной схеме (Self-Consistent Scheme);

3) дифференциальные уравнения не имеют аналитического решения, поэтому необходимо использование численных методов;

4) для сфероидных композитных частиц необходимо усреднение $\mathbf{A}_{p,i}$ с учетом функции распределения ориентаций, поскольку поляризационный тензор \mathbf{P}_r для сфероидной формы включения зависит от пространственной ориентации.

Усредненный тензор концентрации деформаций

В общем случае усредненный тензор концентрации деформаций для сфероидных включений, учитывающий функцию распределения ориентаций, можно представить в следующем виде [24]:

$$\langle \mathbf{A}_r \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\theta, \phi) [\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}}_r(\theta, \phi) : (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0)]^{-1} \times \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi p(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}, \quad (11)$$

где $\langle \mathbf{A}_r \rangle$ — усредненный тензор концентрации деформаций 4-го ранга r -й фазы; $p(\theta, \phi)$ — функция распределения ориентаций (англ. — Orientation Distribution Function), описывающая вероятность определенной ориентации сфероидов в пространстве; $\tilde{\mathbf{P}}_r(\theta, \phi)$ — поляризационный тензор 4-го ранга в сферической системе координат; ϕ и θ — азимутальный и полярный угол в сферической системе координат.

Для случайного распределения (также называемого изотропным) сфероидных включений в композите, при котором $p(\theta, \phi) = 1$, получают уравнение для $\langle \mathbf{A}_r \rangle$:

$$\langle \mathbf{A}_r \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [\mathbf{I} + \tilde{\mathbf{P}}_r(\theta, \phi) : (\mathbf{C}_r - \mathbf{C}_0)]^{-1} \times \sin \theta d\theta d\phi. \quad (12)$$

Преобразование компонент тензора \mathbf{P}_r осуществляют по следующей стандартной схеме:

$$(\tilde{\mathbf{P}}_r)_{ijkl} = r_{im} r_{jn} r_{kp} r_{lq} (\mathbf{P}_r)_{mnpq}, \quad (13)$$

где $r_{\alpha\beta}$ — элементы матрицы поворота, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{pmatrix}$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим численный расчет эффективных жесткостных характеристик бетона в рамках предлагаемого подхода. Для расчета необходимо задать значения жесткостных характеристик цементного камня, который, как отмечено было ранее, является композиционным материалом, поэтому для их определения так-

же применяют методы гомогенизации. В рассматриваемом примере использованы данные моделирования эффективных жесткостных характеристик цементного камня при $V/C = 0,4$ и степени гидратации вяжущего 0,8 (что примерно соответствует возрасту 28 сут), взятые из работ [2, 25].

Состав бетона: цемент — 425 кг, вода — 170 кг, песок кварцевый — 725 кг, щебень гранитный — 1150 кг, $V/C = 0,4$. Плотность компонентов: цемент — 3150 кг/м³, вода — 1000 кг/м³, песок — 2650 кг/м³, щебень — 2670 кг/м³.

Нормализованное объемное содержание компонентов в бетонном композите: цементный камень (цемент + вода) $c_{cm} = 0,288$, песок $c_{agg,f} = 0,2766$, щебень $c_{agg,c} = 0,4354$.

Жесткостные характеристики компонентов бетона:

1) цементный камень: модуль Юнга — 21 ГПа, коэффициент Пуассона — 0,24 [3];

2) песок кварцевый: модуль Юнга — 70 ГПа, коэффициент Пуассона — 0,07 [6];

3) щебень гранитный: модуль Юнга — 65 ГПа, коэффициент Пуассона — 0,15 [6];

4) интерфейсная транзитная зона: коэффициент соотношения жесткостных характеристик к характеристикам цементного камня — 0,5 [26].

Гранулометрические характеристики песка представлены в табл. 1, щебня — в табл. 2.

Содержание зерен пластинчатой и игловатой формы в щебне принято равным 35 %. Тогда содержание зерен щебня, аппроксимируемых сферической формой и формой вытянутого и сплюснутого сфероиды, составит для фракции 5–10 мм соответственно $(1 - 0,35) \cdot 0,2669 = 0,1735$ и $0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,2669 = 0,047$.

Коэффициент соотношения полуосей для вытянутого сфероиды $\rho = 3$, для сплюснутого сфероиды $\rho = 1/3$. Толщина интерфейсной транзитной зоны $\delta_{из} = 0,05$ мм [11].

Используя формулу (7), определяют объемную концентрацию зерен заполнителя i -й фракции в композитной частице. Так, например, для песка фракции 2,5–5 мм она составит:

$$f_{agg}^{(2,5..5)} = \left(\frac{0,5 \cdot D_{4,3}^{(2,5..5)}}{0,5 \cdot D_{4,3}^{(2,5..5)} + \delta_{из}} \right)^3 =$$

$$= \left(\frac{0,5 \cdot 3,65}{0,5 \cdot 3,65 + 0,05} \right)^3 = 0,9733. \quad (14)$$

Затем по формуле (10) устанавливают объемную концентрацию композитных частиц i -й фракции в бетоне (приведено для наглядности также для фракции 2,5–5 мм):

$$c_p^{(2,5..5)} = c_{agg,f} \cdot f_s^{(2,5..5)} \cdot \frac{1}{f_{agg}^{(2,5..5)}} =$$

$$= 0,2766 \cdot 0,2916 \cdot \frac{1}{0,9733} = 0,083. \quad (15)$$

Объемная концентрация, вычисленная для всех композитных частиц в бетоне, представлена в табл. 3.

Эффективные жесткостные характеристики сферических композитных частиц вычисляют по уравнениям (6), сфероидных — по уравнению (8). Для операций над тензорами 4-го ранга наиболее подходящим является их представление в ортонормированной матричной нотации Мандела (англ. — Mandel notation), что позволяет выполнить двойное скалярное произведение тензоров 4-го ранга посредством обычного матричного умножения. Для вычисления значений компонент тензора Эшелби существуют аналитические зависимости, приведенные в исследовании [27], которые получены на основе эллиптических интегралов.

Далее показан выборочный пример эффективных тензоров жесткости 4-го ранга сферических композитных частиц фракции 2,5–5 и 5–10 мм в нотации Мандела, компоненты которых определены из вы-

Табл. 1. Гранулометрические характеристики песка

Table 1. Particle size distribution of sand

Фракция, мм / Fraction, mm	0,16–0,315	0,16–0,63	0,63–1,25	1,25–2,5	2,5–5
Нормализованный частный остаток f_s , определенный из распределения Gates – Gaudin – Schuhman при $m = 0,3$ / The normalized residue on the sieve determined from the Gates – Gaudin – Schuhmann distribution at $m = 0,3$	0,1246	0,1566	0,1904	0,2368	0,2916
Средний диаметр $D_{4,3}$, мм / Mean diameter $D_{4,3}$, mm	0,2314	0,4599	0,9154	1,825	3,65

Табл. 2. Гранулометрические характеристики щебня

Table 2. Particle size distribution of crushed stone

Фракция, мм / Fraction, mm	5–10	10–20	20–40
Нормализованный частный остаток f_s , определенный из распределения Gates – Gaudin – Schuhman при $m = 0,3$ / The normalized residue on the sieve determined from the Gates – Gaudin – Schuhmann distribution at $m = 0,3$	0,2669	0,3286	0,4045
Средний диаметр $D_{4,3}$, мм / Mean diameter $D_{4,3}$, mm	7,3	14,6	29,2

Табл. 3. Объемная концентрация композитных частиц в бетоне

Table 3. Volumetric concentration of composite particles in concrete

Форма частицы Particle shape	Фракция, мм / Fraction, mm							
	0,16–0,315	0,16–0,63	0,63–1,25	1,25–2,5	2,5–5	5–10	10–20	20–40
Сферическая Spherical	0,062	0,059	0,0618	0,071	0,083	0,0771	0,094	0,1151
Вытянутый сфероид Prolate spheroid	–	–	–	–	–	0,0213	0,0256	0,0312
Сплюснутый сфероид Oblate spheroid	–	–	–	–	–	0,021	0,0255	0,0311

численных значений объемного модуля и модуля сдвига по уравнению (8) (в ГПа):

$$C_{p, sph}^{(2,5,5)} = \begin{bmatrix} 63,78 & 6,431 & 6,431 & 0 & 0 & 0 \\ 6,431 & 63,78 & 6,431 & 0 & 0 & 0 \\ 6,431 & 6,431 & 63,78 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,35 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 57,35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 57,35 \end{bmatrix};$$

$$C_{p, sph}^{(5,10)} = \begin{bmatrix} 65,32 & 12,03 & 12,03 & 0 & 0 & 0 \\ 12,03 & 65,32 & 12,03 & 0 & 0 & 0 \\ 12,03 & 12,03 & 65,32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 53,29 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 53,29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 53,29 \end{bmatrix}.$$

Компоненты эффективного тензора жесткости 4-го ранга в нотации Мандела для композитных частиц фракции 5–10 мм в форме вытянутого ($C_{p, pro}^{(5,10)}$) и сплюснутого сфероида ($C_{p, obl}^{(5,10)}$) вычислены в следующем виде (в ГПа):

$$C_{p, pro}^{(5,10)} = \begin{bmatrix} 63,44 & 11,68 & 11,68 & 0 & 0 & 0 \\ 11,68 & 61,09 & 12,07 & 0 & 0 & 0 \\ 11,68 & 12,07 & 61,09 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 49,96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49,96 \end{bmatrix};$$

$$C_{p, obl}^{(5,10)} = \begin{bmatrix} 62,26 & 11,88 & 11,88 & 0 & 0 & 0 \\ 11,88 & 64,33 & 11,85 & 0 & 0 & 0 \\ 11,88 & 11,85 & 64,33 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 52,48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 50,71 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что в случае композитных частиц, имеющих форму вытянутого и сплюснутого сфероида, наблюдается трансверсальная анизотропия их эффективного тензора жесткости, обусловленная пространственной ориентацией сфероидного включения вдоль оси симметрии композитной частицы.

Эффективный тензор жесткости бетонного композита определяют по описанной ранее итерационной схеме в порядке от наименьшей к наибольшей

фракции, включающей для рассматриваемого примера 14 итераций. В рассматриваемом примере для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (9) на каждой итерации использовался явный метод Рунге – Кутты 5(4)-го порядка по схеме Дорманда – Принса [28]. Для вычисления интегралов по поверхности единичной сферы применялись квадратурные формулы Лебедева². Необходимые объемные концентрации композитных частиц в бетоне для каждой итерации приведены в табл. 3. Начальными условиями для решения системы дифференциальных уравнений являются компоненты тензора жесткости 4-го ранга цементного камня, которые в нотации Мандела имеют следующий вид (в ГПа):

$$C_1^{eff} (c_p^{(0,16,0,315)} = 0) = C_{cm} = \begin{bmatrix} 24,75 & 7,816 & 7,816 & 0 & 0 & 0 \\ 7,816 & 24,75 & 7,816 & 0 & 0 & 0 \\ 7,816 & 7,816 & 24,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16,94 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16,94 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16,94 \end{bmatrix}.$$

Эффективный тензор жесткости бетонного композита в нотации Мандела (C^{eff}) получен на 14-й итерации, ГПа:

$$C^{eff} = C_{14}^{eff} = \begin{bmatrix} 40,04 & 9,601 & 9,6 & 0 & 0 & 0 \\ 9,601 & 40,04 & 9,609 & 0 & 0 & 0 \\ 9,6 & 9,609 & 40,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30,37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30,35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30,41 \end{bmatrix},$$

из которого определяют эффективный модуль упругости бетона, равный 36,25 ГПа.

Данное значение модуля упругости можно сравнить с прогнозным значением, полученным по феноменологической модели, например одной из самых распространенных СЕВ-FIP MC 90 [29]:

² ACI 209.2R-08. Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep in Hardened Concrete ACI Committee 209. 2008. 45 p.

$$E_c = 21,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{f_{cm}}{10}}, \quad (16)$$

где f_{cm} — средняя прочность бетона на сжатие в возрасте 28 сут по результатам испытаний образцов цилиндров, МПа.

Ориентировочное значение прочности бетона на сжатие можно вычислить из зависимости, связывающей прочность бетона с его водоцементным отношением, известной как закон водоцементного отношения. В технической литературе встречается большое количество математических моделей этого закона, из которых выбрана модель, приведенная ниже:

$$f_{cm} = (0,23 \cdot f_a + 10) \cdot \frac{C}{B} - 8, \quad (17)$$

где f_a — активность цемента, МПа.

По данным исследования [25] активность цемента в возрасте 28 сут составила 64,8 МПа, что соответствует ориентировочной прочности бетона в возрасте 28 сут $f_{cm} = 54,26$ МПа.

В конечном итоге прогнозное значение модуля упругости составляет $E_c = 21,5 \cdot \sqrt[3]{\frac{0,8 \cdot 54,26}{10}} = 35,07$ ГПа. В целом полученные результаты показывают приемлемое совпадение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Представлен усовершенствованный научный подход к определению эффективных жесткостных характеристик бетонного композита, включающий следующие основные положения:

1. Геометрическую форму зерен крупного заполнителя рассматривают не только как сферическую,

но также в виде сплюснутого сфероида для пластинчатой (лещадной) формы зерен и вытянутого сфероида для игольчатой формы зерен.

2. Влияние интерфейсной транзитной зоны бетона учитывается посредством концепции композитной частицы заполнителя, состоящей из зерна заполнителя и располагаемой вокруг него концентрической оболочки из транзитной зоны. Для определения жесткостных характеристик сфероидных композитных частиц используют метод двойного включения аналитической гомогенизации.

3. С целью установления эффективных жесткостных характеристик бетонного композита предложен итерационный подход, основанный на последовательном определении жесткостных характеристик двухфазной композитной системы «цементная матрица – композитная частица i -й фракции» дифференциальным методом аналитической гомогенизации. Такой подход позволяет учитывать влияние композитных частиц разных фракций на напряженно-деформированное состояние бетонного композита независимо друг от друга.

Вместе с тем представленный усовершенствованный подход следует рассматривать как базовый, который необходимо развивать в следующих направлениях:

- внедрение модели несовершенного контакта (англ. — imperfect bound) на границе раздела зерен заполнителя и транзитной зоны, поскольку очевидно, что в реальной структуре бетона условия идеального контакта практически невыполнимы;
- исследование влияния дефектов структуры бетона, образующихся от собственных деформаций в условиях внутреннего ограничения.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Nilsen A.U., Monteiro P.J.M. Concrete: A three phase material // Cement and Concrete Research. 1993. Vol. 23. Issue 1. Pp. 147–151. DOI: 10.1016/0008-8846(93)90145-y
2. Scrivener K.L., Crumbie A.K., Laugesen P. The Interfacial Transition Zone (ITZ) Between Cement Paste and Aggregate in Concrete // Interface Science. 2004. Vol. 12. Issue 4. Pp. 411–421. DOI: 10.1023/b:ints.000042339.92990.4c
3. Bernard O., Ulm F.-J., Lemarchand E. A multiscale micromechanics-hydration model for the early-age elastic properties of cement-based materials // Cement and Concrete Research. 2003. Vol. 33. Issue 9. Pp. 1293–1309. DOI: 10.1016/S0008-8846(03)00039-5
4. Pichler C., Lackner R., Mang H.A. A multiscale micromechanics model for the autogenous-shrinkage deformation of early-age cement-based materials // Engineering Fracture Mechanics. 2007. Vol. 74. Issue 1–2. Pp. 34–58. DOI: 10.1016/j.engfractmech.2006.01.034
5. Shi C., Tu Q., Fan H., Li S. An interphase model for effective elastic properties of concrete composites // Journal of Micromechanics and Molecular Physics. 2016. Vol. 1. Issue 1. P. 1650005. DOI: 10.1142/S2424-913016500053
6. Lavergne F., Ben Fraj A., Bayane I., Barthélémy J.F. Estimating the mechanical properties of hydrating blended cementitious materials: An investigation based on micromechanics // Cement and Concrete Research. 2018. Vol. 104. Pp. 37–60. DOI: 10.1016/j.cemconres.2017.10.018
7. Lezgy-Nazargah M., Emamian S.A., Aghasizadeh E., Khani M. Predicting the mechanical properties of ordinary concrete and nano-silica concrete using micromechanical methods // Sādhanā. 2018. Vol. 43. Issue 12. DOI: 10.1007/s12046-018-0965-0. EDN PIIWMR.
8. Haile B.F., Jin D.W., Yang B., Park S., Lee H.K. Multi-level homogenization for the prediction of the mechanical properties of ultra-high-performance concrete //

Construction and Building Materials. 2019. Vol. 229. P. 116797. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2019.116797

9. *Stefaniuk D., Niewiadomski P., Musiał M., Łydźba D.* Elastic properties of self-compacting concrete modified with nanoparticles: Multiscale approach // Archives of Civil and Mechanical Engineering. 2019. Vol. 19. Issue 4. Pp. 1150–1162. DOI: 10.1016/j.acme.2019.06.006. EDN EQQVLN.

10. *Sharma M., Bishnoi S.* Influence of properties of interfacial transition zone on elastic modulus of concrete: Evidence from micromechanical modelling // Construction and Building Materials. 2020. Vol. 246. P. 118381. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2020.118381. EDN BCCLEV.

11. *Onifade I., Birgisson B.* Microstructural integrity characterization of cement-based construction materials // Construction and Building Materials. 2021. Vol. 307. P. 125012. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.125012. EDN CQWZUK.

12. *Li Y., Liu Y., Wang R.* Evaluation of the elastic modulus of concrete based on indentation test and multi-scale homogenization method // Journal of Building Engineering. 2021. Vol. 43. P. 102758. DOI: 10.1016/j.job.2021.102758. EDN WGUTZB.

13. *Silva R.M.S.Da., Barboza A.Da.S.R.* Concrete modeling using micromechanical multiphase models and multiscale analysis // Revista IBRACON de Estruturas e Materiais. 2023. Vol. 16. Issue 5. DOI: 10.1590/S1983-41952023000500001. EDN DBYSRR.

14. *Zaoui A.* Continuum micromechanics: Survey // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128. Issue 8. Pp. 808–816. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:8(808)

15. *Dvorak G.* Micromechanics of Composite Materials // Solid Mechanics and Its Applications. 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-4101-0

16. *Bennoura M., Aboutajedine A.* Predictive capabilities of micromechanical models for composite materials // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2016. Vol. 35. Issue 14. Pp. 1115–1125. DOI: 10.1177/0731-684416640365. EDN WPQLCD.

17. *Ogierman W.* Data-driven mean-field homogenization: Enhancing the accuracy of the Mori-Tanaka method // Composite Structures. 2025. Vol. 358. P. 118985. DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.118985. EDN PGSIWB.

18. *Bayat H., Rastgo M., Mansouri Zadeh M., Ver-ecken H.* Particle size distribution models, their characteristics and fitting capability // Journal of Hydrology.

2015. Vol. 529. Issue 3. Pp. 872–889. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2015.08.067

19. *Garboczi E., Berryman J.* New Effective Medium Theory for the Diffusivity or Conductivity of a Multi-Scale Concrete Microstructure Model // Concrete Science and Engineering. 2000. Vol. 2. Pp. 88–96.

20. *Беломесова К.Ю., Павлова И.П.* Аналитическая модель расчета количества базальтовой фибры для получения дисперсно-армированного напрягающего бетона оптимальной структуры // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия F. Строительство. Прикладные науки. 2023. № 1. С. 27–31. DOI: 10.52928/2070-1683-2023-33-1-27-31. EDN PRGKBP.

21. *Christensen R.M.* A critical evaluation for a class of micro-mechanics models // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1990. Vol. 38. Issue 3. Pp. 379–404. DOI: 10.1016/0022-5096(90)90005-o

22. *Klusemann B., Svendsen B.* Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks // Technische Mechanik. 2019. Vol. 30. Issue 4. Pp. 374–386.

23. *Chatzigeorgiou G., Meraghni F., Charalambakis N.* Multiscale Modeling Approaches for Composites. Amsterdam : Elsevier, 2022. 345 p. DOI: 10.1016/C2019-0-05214-4

24. *Boumiz A., Vernet C., Cohen Tenoudji F.* Mechanical properties of cement pastes and mortars at early ages // Advanced Cement Based Materials. 1996. Vol. 3. Issue 3–4. Pp. 94–106. DOI: 10.1016/S1065-7355(96)90042-5

25. *Ramesh G., Sotelino E.D., Chen W.F.* Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials // Cement and Concrete Research. 1996. Vol. 26. Issue 4. Pp. 611–622. DOI: 10.1016/0008-8846(96)00016-6

26. *Mura T.* Micromechanics of Defects in Solids // Mechanics of Elastic and Inelastic Solids. 1987. DOI: 10.1007/978-94-009-3489-4

27. *Dormand J.R., Prince P.J.* A family of embedded Runge-Kutta formulae // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1980. Vol. 6. Issue 1. Pp. 19–26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3

28. *Lebedev V.I., Laikov D.N.* A quadrature formula for the sphere of the 131st algebraic order of accuracy // Doklady Mathematics. 1999. Vol. 59. Issue 3. С. 477–481. EDN LPSYFV.

29. *Шалимо М.А.* Лабораторный практикум по технологии бетонных и железобетонных изделий. Минск : Вышэйшая школа, 1987. 196 с.

Поступила в редакцию 15 декабря 2025 г.

Принята в доработанном виде 31 декабря 2025 г.

Одобрена для публикации 29 января 2026 г.

ОБ АВТОРЕ: **Валентин Викторович Кравченко** — кандидат технических наук, доцент кафедры технологии бетона и строительных материалов; **Брестский государственный технический университет (БрГТУ)**; 224017, Республика Беларусь, г. Брест, ул. Московская, д. 267; vkravchenko@g.bstu.by.

REFERENCES

1. Nilsen A.U., Monteiro P.J.M. Concrete: A three phase material. *Cement and Concrete Research*. 1993; 23(1):147-151. DOI: 10.1016/0008-8846(93)90145-y
2. Scrivener K.L., Crumbie A.K., Laugesen P. The Interfacial Transition Zone (ITZ) Between Cement Paste and Aggregate in Concrete. *Interface Science*. 2004; 12(4):411-421. DOI: 10.1023/b:ints.0000042339.92990.4c
3. Bernard O., Ulm F.-J., Lemarchand E. A multi-scale micromechanics-hydration model for the early-age elastic properties of cement-based materials. *Cement and Concrete Research*. 2003; 33(9):1293-1309. DOI: 10.1016/S0008-8846(03)00039-5
4. Pichler C., Lackner R., Mang H.A. A multiscale micromechanics model for the autogenous-shrinkage deformation of early-age cement-based materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007; 74(1-2):34-58. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.01.034
5. Shi C., Tu Q., Fan H., Li S. An interphase model for effective elastic properties of concrete composites. *Journal of Micromechanics and Molecular Physics*. 2016; 1(1):1650005. DOI: 10.1142/S2424913016500053
6. Lavergne F., Ben Fraj A., Bayane I., Barthélemy J.F. Estimating the mechanical properties of hydrating blended cementitious materials: An investigation based on micromechanics. *Cement and Concrete Research*. 2018; 104:37-60. DOI: 10.1016/j.cemconres.2017.10.018
7. Lezgy-Nazargah M., Emamian S.A., Aghasizadeh E., Khani M. Predicting the mechanical properties of ordinary concrete and nano-silica concrete using micromechanical methods. *Sādhanā*. 2018; 43(12). DOI: 10.1007/s12046-018-0965-0. EDN PIIWMR.
8. Haile B.F., Jin D.W., Yang B., Park S., Lee H.K. Multi-level homogenization for the prediction of the mechanical properties of ultra-high-performance concrete. *Construction and Building Materials*. 2019; 229:116797. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2019.116797
9. Stefaniuk D., Niewiadomski P., Musiał M., Łydzba D. Elastic properties of self-compacting concrete modified with nanoparticles: Multiscale approach. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2019; 19(4):1150-1162. DOI: 10.1016/j.acme.2019.06.006. EDN EQQVLN.
10. Sharma M., Bishnoi S. Influence of properties of interfacial transition zone on elastic modulus of concrete: Evidence from micromechanical modelling. *Construction and Building Materials*. 2020; 246:118381. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2020.118381. EDN BCCLEV.
11. Onifade I., Birgisson B. Microstructural integrity characterization of cement-based construction materials. *Construction and Building Materials*. 2021; 307:125012. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2021.125012. EDN CQWZUK.
12. Li Y., Liu Y., Wang R. Evaluation of the elastic modulus of concrete based on indentation test and multi-scale homogenization method. *Journal of Building Engineering*. 2021; 43:102758. DOI: 10.1016/j.job.2021.102758. EDN WGUTZB.
13. Silva R.M.S.Da., Barboza A.Da.S.R. Concrete modeling using micromechanical multiphase models and multiscale analysis. *Revista IBRACON de Estruturas e Materiais*. 2023; 16(5). DOI: 10.1590/S1983-41952023000500001. EDN DBYSRR.
14. Zaoui A. Continuum micromechanics: Survey. *Journal of Engineering Mechanics*. 2002; 128(8):808-816. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:8(808)
15. Dvorak G. Micromechanics of Composite Materials. *Solid Mechanics and Its Applications*. 2013. DOI: 10.1007/978-94-007-4101-0
16. Bennoura M., Aboutajeddine A. Predictive capabilities of micromechanical models for composite materials. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2016; 35(14):1115-1125. DOI: 10.1177/0731684416640365. EDN WPQLCD.
17. Ogierman W. Data-driven mean-field homogenization: Enhancing the accuracy of the Mori-Tanaka method. *Composite Structures*. 2025; 358:118985. DOI: 10.1016/j.compstruct.2025.118985. EDN PGSIWB.
18. Bayat H., Rastgo M., Mansouri Zadeh M., Verecken H. Particle size distribution models, their characteristics and fitting capability. *Journal of Hydrology*. 2015; 529(3):872-889. DOI: 10.1016/j.jhydrol.2015.08.067
19. Garboczi E., Berryman J. New Effective Medium Theory for the Diffusivity or Conductivity of a Multi-Scale Concrete Microstructure Model. *Concrete Science and Engineering*. 2000; 2:88-96.
20. Belamesava K., Paulava I. Analytical model for calculating the amount of basalt fiber to produce dispersion-reinforced concrete with an optimal structure. *Vestnik of Polotsk State University. Part F. Constructions. Applied Sciences*. 2023; 1:27-31. DOI: 10.52928/2070-1683-2023-33-1-27-31. EDN PRGKBP. (rus.).
21. Christensen R.M. A critical evaluation for a class of micro-mechanics models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1990; 38(3):379-404. DOI: 10.1016/0022-5096(90)90005-o
22. Klusemann B., Svendsen B. Homogenization methods for multi-phase elastic composites: Comparisons and benchmarks. *Technische Mechanik*. 2019; 30(4): 374-386.
23. Chatzigeorgiou G., Meraghni F., Charalambakis N. *Multiscale Modeling Approaches for Composites*. Amsterdam, Elsevier, 2022; 345. DOI: 10.1016/C2019-0-05214-4
24. Boumiz A., Vernet C., Cohen Tenoudji F. Mechanical properties of cement pastes and mortars at early ages. *Advanced Cement Based Materials*. 1996; 3(3-4): 94-106. DOI: 10.1016/S1065-7355(96)90042-5
25. Ramesh G., Sotelino E.D., Chen W.F. Effect of transition zone on elastic moduli of concrete materials. *Cement and Concrete Research*. 1996; 26(4):611-622. DOI: 10.1016/0008-8846(96)00016-6

26. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. *Mechanics of Elastic and Inelastic Solids*. 1987. DOI: 10.1007/978-94-009-3489-4

27. Dormand J.R., Prince P.J. A family of embedded Runge-Kutta formulae. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1980; 6(1):19-26. DOI: 10.1016/0771-050X(80)90013-3

28. Lebedev V.I., Laikov D.N. A quadrature formula for the sphere of the 131st algebraic order of accuracy. *Doklady Mathematics*. 1999; 59(3):477-481. EDN LPSYFV.

29. Shalimo M.A. *Guide for the concrete and reinforced concrete technology*. Minsk, Higher School, 1987; 196. (rus.).

Received December 15, 2025.

Adopted in revised form on December 31, 2025.

Approved for publication on January 29, 2026.

BIONOTES: **Valentin V. Kravchenko** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Concrete and Building Materials Technology; **Brest State Technical University (BrSTU)**; 267 Moskovskaya st., Brest, 224017, Republic of Belarus; vvkravchenko@g.bstu.by.