

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.075.4

DOI: 10.22227/1997-0935.2026.6.885-897

Расчетная длина центрально-сжатой двутавровой колонны с линейно изменяющейся высотой стенки

Александр Олегович Ильюшенко

Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект» (ТПИ «Хабаровскпромпроект»);
г. Хабаровск, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Представлен комплексный аналитический анализ потери устойчивости двутавровых колонн с линейно изменяющейся высотой стенки по длине. Решения получены в замкнутом виде с помощью аналитического метода Бубнова – Галеркина и прямого интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси стержня. Проверяется эффективность метода Бубнова – Галеркина для решения задачи о нахождении коэффициента расчетной длины шарнирно-опертой центрально-сжатой колонны переменной жесткости. Также предлагаются альтернативный взгляд на проблему потери устойчивости колонны переменной жесткости и дополнение решения путем пересмотра базисной функции, основанной на параметре ψ_1 . Такой подход решения образует независимый взгляд на анализ задачи потери устойчивости двутавровых колонн с конической стенкой. Полученные значения коэффициента расчетной длины оказываются близкими друг к другу, а средняя относительная погрешность не превышает 5 %.

Материалы и методы. Использованы аналитический метод Бубнова – Галеркина и прямое интегрирование дифференциального уравнения.

Результаты. На основе аналитических методов получены уравнения коэффициента расчетной длины двутавровой колонны переменной жесткости в замкнутой форме. Всего представлены три формулы для расчета.

Выводы. Предлагаемые формулы коэффициента расчетной длины позволяют выполнить расчет шарнирно-опертой двутавровой колонны с линейно изменяющейся высотой стенки по длине на устойчивость. Результаты исследования также содержат дополнительную информацию о внецентренно-нагруженных двутавровых элементах с конической стенкой.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: упругая потеря устойчивости, элемент переменной жесткости, двутавровая колонна, параметр высоты, базисная функция, метод Бубнова – Галеркина, коэффициент расчетной длины

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Ильюшенко А.О. Расчетная длина центрально-сжатой двутавровой колонны с линейно изменяющейся высотой стенки // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 6. С. 885–897. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.6.885-897

Автор, ответственный за переписку: Александр Олегович Ильюшенко, revivaltree@gmail.com.

Effective length of web-tapered pinned I-section column

Alexander O. Ilyushenkov

Territorial Design Institute “Khabarovskpromproekt”; Khabarovsk, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. This paper presents a comprehensive analytical study of the buckling of I-section columns with web depth varying linearly along the column length. Closed-form solutions were obtained using the analytical Bubnov – Galerkin method and direct integration of the differential equation of the deflected axis for the member. The effectiveness of the Bubnov – Galerkin method is assessed for determining the effective length factor of a pinned centrally compressed column with variable stiffness. An alternative view of the buckling problem for a variable-stiffness column is also proposed, and the solution is supplemented by reconsidering the basis function based on parameter ψ_1 . This approach provides an independent analysis of the buckling problem of I-section columns with a tapered web. The obtained values of the effective length factor are close to each other, and the mean relative error does not exceed 5 %.

Materials and methods. The analytical Bubnov – Galerkin method and direct integration of the differential equation were used.

Results. Using analytical methods, closed-form equations for the effective length factor of an I-section column with variable stiffness were obtained. In total, three calculation formulas are presented.

Conclusions. The proposed formulas for the effective length factor make it possible to perform a stability calculation of a pinned I-section column with linearly varying web depth along its length. The study also provides additional information on eccentrically loaded I-section members with a tapered web.

KEYWORDS: elastic buckling, variable-stiffness member, I-section column, depth parameter, basis function, Bubnov – Galerkin method, effective length factor

FOR CITATION: Ilyushenkov A.O. Effective length of web-tapered pinned I-section column. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(6):885-897. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.6.885-897 (rus.).

Corresponding author: Alexander O. Ilyushenkov, revivaltree@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос устойчивости центрально-сжатых стержней переменной жесткости можно считать хорошо изученным. Два больших труда, написанные А.Н. Динником [1] и А.Р. Ржаницыным [2], позволяют в полной мере исследовать конкретику данной задачи. В книге Ф. Блейха [3] также уделено некоторое внимание стержням переменной жесткости.

А.Ф. Смирнов [4] рассматривает устойчивость стержней с непрерывно меняющейся жесткостью, решает дифференциальное уравнение в функциях Бесселя и приводит сводную таблицу решений в элементарных функциях при разных степенях закона изменения жесткости. В.Е. Gatewood [5] также решает приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси с помощью функций Бесселя. Т.А. Branch [6] представляет краткую справку об основных методах решения задачи устойчивости центрально-сжатого стержня переменной жесткости, включая работу А.Н. Динника, а также сравнительную таблицу значений критических сил, вычисленных аналитическим и численным способами.

Л.М. Каган-Розенцвейг [7] считает, что решение задачи об устойчивости стержня переменного сечения получить в замкнутом виде можно лишь для частных законов изменения жесткости. Известно, что при рассмотрении стержня с переменной жесткостью, или конического стержня, необходимо задаться законом изменения жесткости. Формулировка закона зависит от: граничных условий; вида профиля и поперечного сечения; линейного, либо параболического изменения высоты сечения профиля по длине.

Бифуркационную задачу о потере устойчивости центрально-сжатого стержня с переменной жесткостью возможно решить любым из известных аналитических методов. В текущем исследовании использованы метод Бубнова – Галеркина и метод прямого интегрирования дифференциального уравнения, который следует считать точным. Для детального изучения аналитических методик расчета центрально-сжатого стержня постоянной и переменной жесткости достаточно применять специальный курс по строительной механике В.А. Киселева [8].

В статье [9] Н.К. Снитко предлагает исследовать устойчивость стержней переменного сечения при любом законе изменения жесткости путем разделения его на ряд конечных элементов постоянного сечения. Таким образом предлагается перейти от стержня с непрерывной переменной жесткостью к многоступенчатому стержню. Уравнение изогнутой

оси интегрируется по методу начальных параметров, что позволяет получить уравнение прогиба в замкнутой форме. Точность решения зависит от количества учитываемых слагаемых в ряде.

Ю.Э. Сеницкий и А.С. Ишутин [10] рассматривают устойчивость составного стержня переменной жесткости, изменяющегося по степенному закону с учетом деформаций поперечного сдвига. Авторы статьи используют прием, основанный на повышении порядка разрешающего дифференциального уравнения. Это дает возможность проанализировать набор разных случаев закрепления стержня, например шарнирно-опертая решетчатая стрела крана или уголкового опора линий электропередач. Решения для несимметричных форм потери устойчивости получены в цилиндрических функциях (функции Бесселя), а для симметричных форм потери устойчивости и квадратичного закона изменения жесткости в элементарных функциях (уравнение Эйлера).

В книге П.И. Алексеева [11] рассмотрен графоаналитический метод определения устойчивости центрально-сжатого и изгибаемого стержня переменного сечения. Метод основан на математической аналогии между решением, полученным А.Н. Динником, и нахождением частоты колебания струны переменной жесткости, найденной М.Г. Крейном при граничных условиях, описывающих шарнирно опертый стержень, натянутый единичной силой. Критические значения сил сжатого и изгибаемого стержня определяются суммированием площадей эпюр по результатам графической интерпретации интегралов. Метод позволяет учитывать влияние ослабления сечения отверстиями. М.Г. Salvadori [12] решает задачу численным способом методом конечных разностей. М. Eisenberger и R. Cohen [13] решают задачу методом конечных элементов для 12 случаев закрепления. Дополнительно перечислим некоторые из работ, где были предложены формулировки упругой критической силы стержня переменной жесткости: М.А. Hirt и соавт. [14], G.C. Lee [15], А.М. Baptista и соавт. [16], V. Sapalas и соавт. [17], W.G. Smith [18], J.C. Etmoroulos [19, 20].

Цель настоящего исследования — показать разрешение вопроса устойчивости с помощью аналитического метода Бубнова – Галеркина, но с видоизмененной базисной функцией. На основании существующих работ и решений производится сравнительный анализ. Приводится новая формулировка коэффициента расчетной длины шарнирно опертого двутаврового стержня переменной жесткости, которая в целом по-

может взглянуть на проблему устойчивости стержней переменной жесткости иначе.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Расчетная схема рассматриваемой колонны показана на рис. 1. Начало отсчета $z = 0$ принято при наибольшем поперечном сечении колонны h_1 и моменте инерции $I_{x,1}$. Изменение момента инерции для симметричных стержней с непрерывно меняющейся жесткостью по длине подчинено квадратично-му закону [4]:

$$I_{x,z} = I_{x,1}(1 - bz)^2, \quad (1)$$

где $b = (1 - t_h)/l$; $t_h = \sqrt{I_{x,0}/I_{x,1}}$ — параметр переменности; l — длина стержня.

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси двутавровой колонны с линейно изменяющейся высотой стенки по длине с учетом изменения момента инерции $I_{x,z}$:

$$(1 - bz)^2 \eta^{IV} + k^2 \eta'' = 0, \quad (2)$$

где $k^2 = P/EI_{x,1}$.

Выражение (2) — это дифференциальное уравнение задачи устойчивости внецентренно и центрально-сжатого стержня по изгибной форме. Части системы трех дифференциальных уравнений задачи пространственной устойчивости стержня переменной жесткости [21] впервые получены Z. Cywinski [22] на основании уточнений технической теории В.З. Власова [23].

Произведем замену производной переменной $\frac{dz}{dy} = \frac{dy}{dt}$ и приведем дифференциальное уравнение (2)

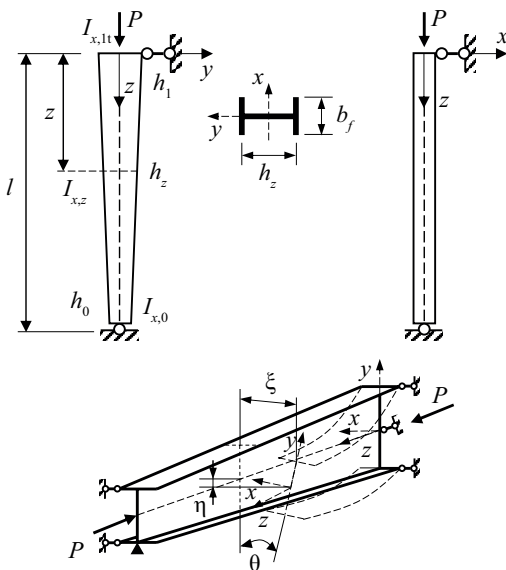


Рис. 1. Шарнирно-опертая двутавровая колонна с линейно изменяющейся высотой стенки

Fig. 1. Web-tapered I-section column

к его характеристической форме. Для этого обозначим $e' = 1 - bz$, тогда:

$$dz = \left(\frac{1 - e'}{b} \right)' dt \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{e'}{b}. \quad (3)$$

Уравнение (2) обладает свойством понижения степени. Поэтому будет достаточным найти первую и вторую производные с новой переменной:

- первая производная. Умножим и разделим на dt и подставим выражение (3):

$$\begin{aligned} \eta' &= \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dz} = \frac{dy/dt}{dz/dt} = \\ &= \frac{dy/dt}{e'/b} = be^{-t} \frac{dy}{dt}; \end{aligned} \quad (4)$$

- вторая производная. Отталкиваемся от найденной первой производной:

$$\eta'' = b^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \quad (5)$$

Подставим производные (4) и (5) в новых переменных в дифференциальное уравнение (2):

$$e^{2t} b^2 e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) + k^2 y = 0. \quad (6)$$

Сократим e^{2t} и e^{-2t} . Получим полное квадратное уравнение вида:

$$y'' - y' + k^2 b^{-2} y = 0. \quad (7)$$

Его характеристическая форма:

$$\lambda^2 - \lambda + k^2 b^{-2} = 0. \quad (8)$$

При решении задачи методом Бубнова – Галеркина будем пользоваться уравнением (2), а в методе непосредственного интегрирования выражением (8).

В аналитическом методе Бубнова – Галеркина следует задаться рядом. В самом общем случае:

$$y = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(z), \quad (9)$$

где A_i — неизвестные постоянные коэффициенты; $\varphi_i(z)$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям задачи.

Если ряд (9) подставить в дифференциальное уравнение плоской формы потери устойчивости центрально-сжатого стержня (2), должно получиться тождество:

$$EI_{x,1} \sum_{i=1}^n f_i A_i \varphi_i^{IV}(z) + P \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i''(z) = 0, \quad (10)$$

где $f_i = (1 - bz)^2$; $t_h = \sqrt{I_{x,0}/I_{x,1}}$.

Тождество (10) не будет нарушено в том случае, если его умножить на любую функцию $\varphi_k(z)$ и составить интеграл по всей длине стержня:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left(EI_{x,1} \sum_{i=1}^n f_i A_i \varphi_i^{IV}(z) + P \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i''(z) \right) \times \\ \times \varphi_k(z) dz = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Равенство (11) справедливо при любом $k = 1, 2, \dots, n$.

В канонической форме:

$$c_{k1}A_1 + c_{k2}A_2 + c_{k3}A_3 + \dots + c_{kn}A_n = 0, \quad (12)$$

где $c_{ki} = \int_0^l (EI_{x,1} f_i \varphi_i^{IV}(z) + P \varphi_i''(z)) \varphi_k(z) dz$.

Если решение дифференциального уравнения представляется рядом, включающим только первое слагаемое, тогда:

$$c_{11}A_1 = 0. \quad (13)$$

В самом общем случае, когда принимается несколько функций, уравнения получаются однородными. Поэтому в итоге возникает система из n -го числа алгебраических уравнений устойчивости при неизвестных коэффициентах:

$$\begin{cases} c_{11}A_1 + c_{12}A_2 + c_{13}A_3 + \dots + c_{1n}A_n = 0 \\ \dots \\ c_{n1}A_1 + c_{n2}A_2 + c_{n3}A_3 + \dots + c_{nn}A_n = 0 \end{cases}. \quad (14)$$

Ее удобно решать путем приравнивания определителя к нулю размером $[n \times n]$:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

Для шарнирно опертого стержня при возможности свободно закручиваться (без стеснения деформации) за базисную функцию обычно принимается ряд синуса:

$$\varphi(z) = A_1 \sin \frac{\pi z}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi z}{l} + \dots + A_i \sin \left(\frac{i\pi z}{l} \right). \quad (16)$$

Производные при удержании четырех слагаемых в ряде (16):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n=4} \eta_i'' = \eta_1'' + \eta_2'' + \eta_3'' + \eta_4'' \\ \sum_{i=1}^{n=4} \eta_i^{IV} = \eta_1^{IV} + \eta_2^{IV} + \eta_3^{IV} + \eta_4^{IV} \end{cases}, \quad (17)$$

где $\eta_1^{IV} = A_1 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right);$

$$\eta_1'' = -A_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \left(\frac{\pi z}{l} \right);$$

$$\eta_2^{IV} = A_2 \frac{16\pi^4}{l^4} \sin \left(\frac{2\pi z}{l} \right);$$

$$\eta_2'' = -A_2 \frac{4\pi^2}{l^2} \sin \left(\frac{2\pi z}{l} \right);$$

$$\eta_3^{IV} = A_3 \frac{81\pi^4}{l^4} \sin \left(\frac{3\pi z}{l} \right);$$

$$\eta_3'' = -A_3 \frac{9\pi^2}{l^2} \sin \left(\frac{3\pi z}{l} \right);$$

$$\eta_4^{IV} = A_4 \frac{256\pi^4}{l^4} \sin \left(\frac{4\pi z}{l} \right);$$

$$\eta_4'' = -A_4 \frac{16\pi^2}{l^2} \sin \left(\frac{4\pi z}{l} \right).$$

Коэффициент канонического уравнения в безразмерной форме в уравнении (12):

$$A_i c_{ki} = A_i \left(\frac{i^4 \pi^4}{l^4} EI_{x,1} \int_0^1 (1 - (1 - t_h) \xi)^2 \times \right. \\ \left. \times \sin(i\pi \xi) \sin(k\pi \xi) d\xi - \right. \\ \left. - P \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \int_0^1 \sin(i\pi \xi) \sin(k\pi \xi) d\xi \right), \quad (18)$$

где k — номер строки; i — номер столбца; $\xi = z/l$.

Для главных диагональных членов матрицы (15) решение интегралов приводит к следующему выражению:

$$A_i c_{ki} = A_i \left(\frac{i^4 \pi^4}{l^4} EI_{x,1} a_{ki} \frac{l}{2} - P \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \frac{l}{2} \right) = \\ = A_i \left(i^4 \frac{\pi^2 EI_{x,1}}{l^2 P} a_{ki} - i^2 \right). \quad (19)$$

Для остальных членов матрицы (15):

$$A_i c_{ki} = A_i \frac{i^4 \pi^4}{l^4} EI_{x,1} a_{ki} \frac{l}{2} - 0 = A_i i^4 \frac{\pi^2 EI_{x,1}}{l^2 P} a_{ki}, \quad (20)$$

где $a_{ki}(t_h)$ — коэффициенты редукции (переменности), зависящие от t_h в форме квадратичных полиномов.

В методе непосредственного интегрирования дифференциального уравнения задаемся поиском некоторого состояния системы на границе устойчивости. В комплексном случае квадратное уравнение (8) имеет решение:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = 0,5 \pm i\sqrt{(k^2/b^2) - 0,25}. \quad (21)$$

Характеристическое уравнение имеет простые комплексно-сопряженные корни. α и β — это действительные числа, а $i = -\sqrt{1}$. И им соответствуют комплексные решения:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha - i\beta \\ \lambda_2 = \alpha + i\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = e^{\lambda_1 z} = e^{(\alpha - i\beta)z} \\ y_2 = e^{\lambda_2 z} = e^{(\alpha + i\beta)z} \end{cases}. \quad (22)$$

На основании третьей теоремы о свойствах решений линейного однородного уравнения будем иметь так же и действительные решения. Решим линейную комбинацию и подставим полученные комплексные решения:

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ \bar{y}_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = \frac{1}{2}(e^{(\alpha - i\beta)z} + e^{(\alpha + i\beta)z}) \\ \bar{y}_2 = \frac{1}{2}(e^{(\alpha - i\beta)z} - e^{(\alpha + i\beta)z}) \end{cases}. \quad (23)$$

Между показательной функцией e^z и тригонометрическими функциями $\sin z$ и $\cos z$ имеется связь. Пусть $z = it$ и t — комплексное число. Получим уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} e^{it} = \cos t + i \sin t \\ e^{-it} = \cos t - i \sin t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \\ \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{y}_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t \\ \bar{y}_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t \end{cases} \quad (24)$$

Тогда решение уравнения (8):

$$y(z) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t). \quad (25)$$

В выражении (25) выполняем обратную замену $z = e^t \rightarrow t = \ln z$ и $e^{\alpha t} = e^{0,5t} = z^{0,5} = \sqrt{z}$, получаем уравнение прогиба стержня с двумя постоянными неизвестными коэффициентами C_1, C_2 , зависящими от граничных условий:

$$y(z) = C_1 \sqrt{v} \cdot \cos[\beta \cdot \ln(v)] + C_2 \sqrt{v} \cdot \sin[\beta \cdot \ln(v)], \quad (26)$$

где $\beta = \sqrt{(k^2/b^2) - 0,25}$ — параметр переменности, связанный с критическим параметром нагружения k^2 ; $v = 1 - bz$; $b = (1 - t_h)/l$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В методе Бубнова – Галеркина решаем поочередно определитель матрицы $[2 \times 2]$, $[3 \times 3]$ и $[4 \times 4]$ с тем, чтобы проследить влияние увеличения слагаемых ряда (16) на точность вычисления коэффициента расчетной длины μ . Коэффициенты переменности представляют собой простые квадратичные функции в зависимости от переменности момента инерции t_h по концам стержня:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{a_{11}}{a_{cr,1}} - 1 & 16 \frac{a_{12}}{a_{cr,1}} & 81 \frac{a_{13}}{a_{cr,1}} & 256 \frac{a_{14}}{a_{cr,1}} \\ \frac{a_{21}}{a_{cr,1}} & 16 \frac{a_{22}}{a_{cr,1}} - 4 & 81 \frac{a_{23}}{a_{cr,1}} & 256 \frac{a_{24}}{a_{cr,1}} \\ \frac{a_{31}}{a_{cr,1}} & 16 \frac{a_{32}}{a_{cr,1}} & 81 \frac{a_{33}}{a_{cr,1}} - 9 & 256 \frac{a_{34}}{a_{cr,1}} \\ \frac{a_{41}}{a_{cr,1}} & 16 \frac{a_{42}}{a_{cr,1}} & 81 \frac{a_{43}}{a_{cr,1}} & 256 \frac{a_{44}}{a_{cr,1}} - 16 \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

где $a_{11} = 0,283t_h^2 + 0,434t_h + 0,283$; $a_{12} = a_{21} = -0,18t_h^2 + 0,18$; $a_{22} = 0,32t_h^2 + 0,36t_h + 0,32$; $a_{13} = a_{31} = 0,038t_h^2 - 0,076t_h + 0,038$; $a_{23} = a_{32} = -0,195t_h^2 + 0,195$; $a_{33} = 0,328t_h^2 + 0,344t_h + 0,328$; $a_{14} = a_{41} = -0,0144t_h^2 + 0,0144$; $a_{24} = a_{42} = 0,045t_h^2 - 0,09t_h + 0,045$; $a_{34} = a_{43} = -0,199t_h^2 + 0,199$ и $a_{44} = 0,33t_h^2 + 0,34t_h + 0,33$ — коэффициенты редукции; $t_h = \sqrt{I_{x,0}/I_{x,1}}$; $a_{cr,1} = P/P_{cr,1}$ — упругий коэффициент запаса устойчивости; $P_{cr,1} = (\pi^2 EI_{x,1})/l^2$ — упругая критическая сила при наибольшей изгибной жесткости.

Решение уравнения при удержании только первого слагаемого в выражении (13):

$$\frac{a_{11}}{a_{cr,1}} = 1 \rightarrow P_{cr,t_h} = \frac{\pi^2 EI_{x,1}}{l^2} a_{11} = P_{cr,1} a_{11}. \quad (28)$$

В методе непосредственного интегрирования дифференциального уравнения подставляем граничные условия шарнирно опертого стержня. При $z = 0$, $y = 0$, $C_1 = 0$. А в точке $z = l$, $v = t_h$ приводят к следующему сокращенному трансцендентному уравнению (26):

$$C_2 \cdot \sin[\beta \cdot \ln(t_h)] = 0. \quad (29)$$

Так как $C_2 \neq 0 \rightarrow \sin[\beta \cdot \ln(t_h)] = 0$ иначе стержень остается прямолинейным и не теряет устойчивость. Устанавливаем, что:

$$\beta \cdot \ln(t_h) = \pi. \quad (30)$$

Подставляя $u = \pi/\mu$ и преобразовывая уравнение (30) относительно коэффициента расчетной длины μ шарнирно опертого центрально-сжатого стержня переменного сечения с изменяющейся жесткостью по длине по параболическому закону при наибольшем поперечном сечении двутавра:

$$\mu = \frac{1}{\frac{(1-t_h)}{\pi} \sqrt{\left[\frac{\pi^2}{\ln^2 t_h} + \frac{1}{4} \right]}}. \quad (31)$$

Формулу (31) следует считать точной. Она позволит не только верифицировать последующие решения, но и произвести оценку точности метода Бубнова – Галеркина.

Ошибка оценивается через соотношение:

$$\gamma_{err} = \frac{P_{cr,b-g}}{P_{cr,t}}, \quad (32)$$

где $P_{cr,b-g}$ — упругая критическая сила, найденная методом Бубнова – Галеркина; $P_{cr,t}$ — упругая кри-

Табл. 1. Ошибка γ_{err} в зависимости от числа слагаемых в ряде синуса

Table 1. The error γ_{err} as a function of the number of terms in the sine series

t_h	Размер матрицы / Matrix size				
	[1 × 1]	[2 × 2]	[3 × 3]	[4 × 4]	[6 × 6]
1	1	1	1	1	1
0,9					
0,8	1,01				
0,7	1,02				
0,6	1,05				
0,5	1,08	1,01			
0,4	1,15	1,02			
0,3	1,25	1,04	1,01		
0,2	1,45	1,11	1,04		
0,1	1,90	1,30	1,14	1,05	

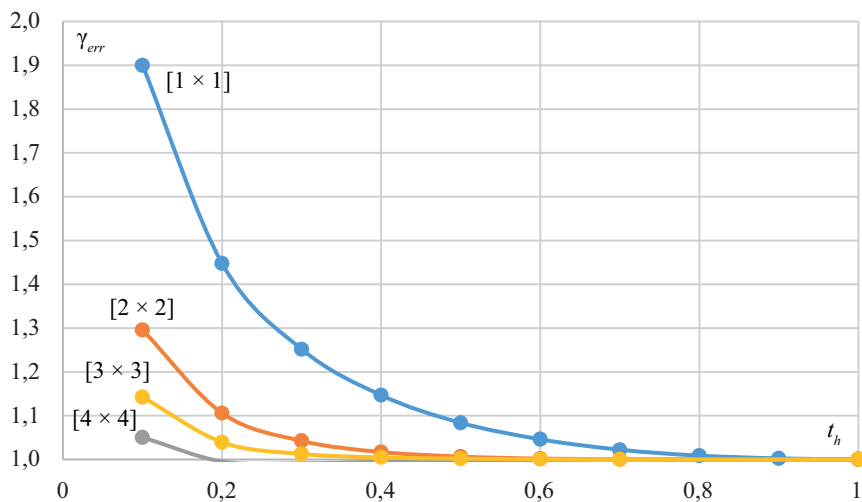


Рис. 2. Ошибка γ_{err} в зависимости от числа слагаемых в ряде синуса
Fig. 2. The error γ_{err} as a function of the number of terms in the sine series

тическая сила, определенная при непосредственном интегрировании дифференциального уравнения.

Результаты оценки погрешности сведены в табл. 1 и показаны на рис. 2. По графику видно, что при удержании четырех членов в ряде синуса (16) ошибка отсутствует. Лишь при очень малых значениях $t_h \leq 0,1$ погрешность составляет 5 % от точного решения. Однако такие значения t_h не имеют практической значимости, как и прикладного назначения в стальных конструкциях, и относятся скорее к теоретическим.

Из решения (28) можно установить, что коэффициент расчетной длины:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{a_{11}}}. \tag{33}$$

Поэтому из уравнения (31) следует, что:

$$a_{11} = \frac{(1-t_h)^2}{\pi^2} \left[\frac{\pi^2}{\ln^2 t_h} + \frac{1}{4} \right]. \tag{34}$$

Коэффициент a_{11} по выражению (34) может быть аппроксимирован в форме линейного уравнения:

$$a_{11} = 0,92t_h + 0,08. \tag{35}$$

Это подтверждается, если посмотреть на график зависимости $a_{11} - t_h$, показанный на рис. 3, и на прямую, полученную в результате решения определителя матрицы $[4 \times 4]$. Поэтому заключаем, что коэффициент расчетной длины вместо (31) может быть приведен к более простой, но по-прежнему точной форме:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{0,92t_h + 0,08}}. \tag{36}$$

В книге М.А. Hirt и М. Crisinel [14] приводится идентичная (36) формула.

Коэффициент расчетной длины μ_z для стержня переменной жесткости варьируется по длине. Упругая критическая сила остается постоянной. Поэтому можно заключить, что коэффициент расчетной длины в любой точке z при $I_{x,z}$:

$$\mu_z = \sqrt{\frac{1}{0,92t_h + 0,08}} \cdot \sqrt{\frac{I_{x,z}}{I_{x,1}}}. \tag{37}$$

Также на длине стержня можно найти некоторое эквивалентное значение момента инерции I_{eq} , при котором $\mu = 1$:

$$P_{cr,t_h} = \frac{\pi^2 EI_{eq}}{l^2 \cdot I^2}, \tag{38}$$

где $I_{eq} = I_{x,1}(0,92t_h + 0,08)$.

Изучим прогиб двутаврового стержня с линейно изменяющейся высотой стенки по длине (26). Так как это бифуркационная задача, будем отталкиваться

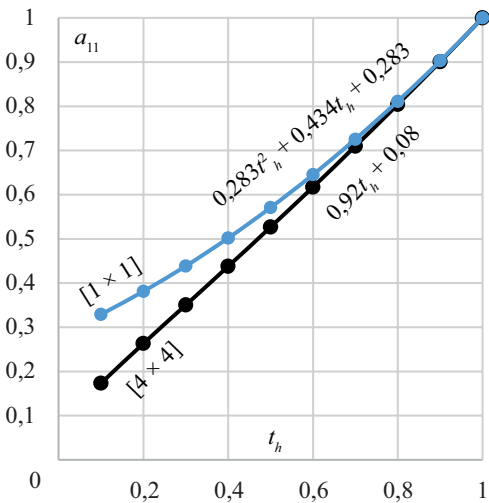


Рис. 3. График зависимости $a_{11} - t_h$
Fig. 3. Relationship between reduction factor t_h and function a_{11}

от уравнения прогиба внецентренно-сжатого стержня. Находим неизвестные коэффициенты C_1 и C_2 . При $z = 0, y = e_{x,1}$ первый неизвестный коэффициент:

$$C_1 = e_{x,1}, \quad (39)$$

где $e_{x,1}$ — эксцентриситет силы при наибольшем поперечном сечении.

Из второй производной при $z = l, v = 1 - bz = t_h$ следует:

$$y'' = -\frac{k^2 y}{v^2} = -\frac{k^2 e_{x,0}}{\left(1 - \frac{1-t_h}{l} l\right)^2} = -\frac{k^2 e_{x,0}}{t_h^2}, \quad (40)$$

где $e_{x,0}$ — эксцентриситет силы при наименьшем поперечном сечении.

Подставляем выражения (39) и (40) в (26) и находим C_2 :

$$C_2 = e_{x,1} \frac{\frac{e_{x,0}}{e_{x,1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_h}} - \cos[\beta \cdot \ln(t_h)]}{\sin[\beta \cdot \ln(t_h)]}. \quad (41)$$

Записываем уравнение прогиба (26) с найденными коэффициентами C_1 и C_2 :

$$y(z) = e_{x,1} \left(\sqrt{v} \cdot \cos[\beta \cdot \ln(v)] + \frac{\frac{e_{x,0}}{e_{x,1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_h}} - \cos[\beta \cdot \ln(t_h)]}{\sin[\beta \cdot \ln(t_h)]} \times \sqrt{v} \cdot \sin[\beta \cdot \ln(v)] \right). \quad (42)$$

Для шарнирно опертого стержня с соблюдением граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ и $e_{x,1} = e_{x,0}$ получим:

$$y(z) = \sqrt{v} \cdot \cos[\beta \cdot \ln(v)] + \frac{\frac{1}{\sqrt{t_h}} - \cos[\beta \cdot \ln(t_h)]}{\sin[\beta \cdot \ln(t_h)]} \sqrt{v} \cdot \sin[\beta \cdot \ln(v)] - 1. \quad (43)$$

Интересует точка z_{cr} по длине стержня, когда прогиб становится максимальным $y(z_{cr}) = y_{\max}$ (см. рис. 4, а). Для стержня постоянной жесткости $z_{cr} = 0,5l$ находится точно на середине длины стержня. Но для стержня переменной жесткости такая точка будет смещаться

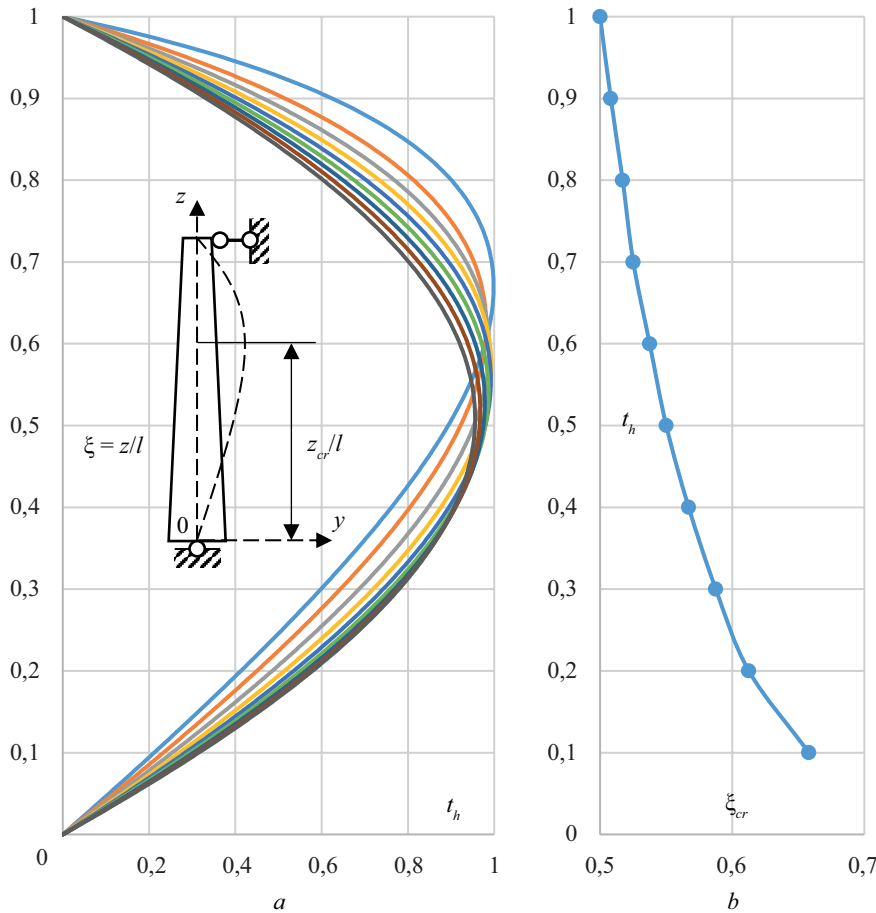


Рис. 4. Нормализованные формы потери устойчивости шарнирно опертой колонны в зависимости от параметра переменности t_h (а); смещение точки ξ_{cr} , вызванное переменностью стержня (б)

Fig. 4. Normalized buckling modes of a pinned column depending on the non-uniformity parameter t_h (а); maximum point displacement caused by member non-uniformity (б)

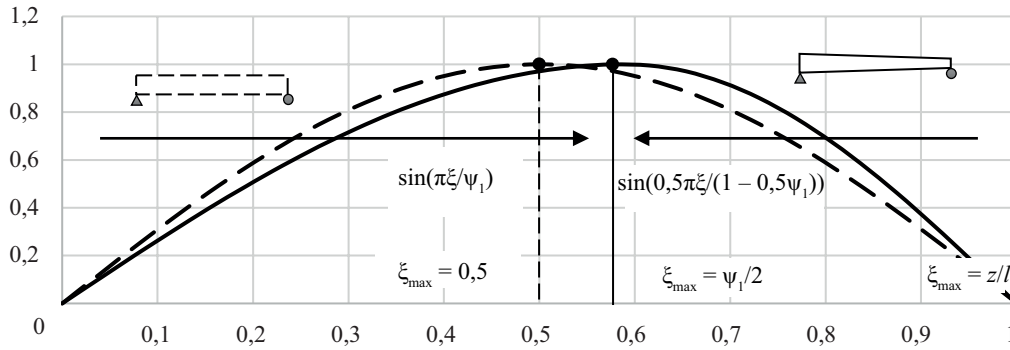


Рис. 5. Нормализованные формы потери устойчивости призматического и конического элемента

Fig. 5. Normalized buckling modes of prismatic and non-prismatic members

в зависимости от t_h . Введем некоторую функцию ψ_1 , которая поможет определить точное положение точки z_{cr} по длине стержня в зависимости от t_h :

$$z_{cr} = 0,5l\psi_1 \rightarrow \xi_{cr} = z_{cr}/l = 0,5\psi_1. \quad (44)$$

Чтобы получить такую точку потребуется построить ряд кривых прогиба. Для этого выбираем характеристики некоторого стержня и подсчитываем упругую критическую силу P_{cr} с коэффициентом расчетной длины по выражению (31) или (36). Сила P_{cr} подставляется в коэффициент переменности β . Таким образом, получаем форму потери устойчивости стержня и нормализуем ее. Кривые в зависимости от t_h показаны на рис. 4, а. Варьируя $0,1 \leq t_h \leq 1$ с шагом 0,1, построим кривую зависимости $\xi_{cr} - t_h$ и покажем на рис. 4, б. Если переменность близка к чрезвычайно малому отношению t_h , так что $I_{x,0}/I_{x,1} \rightarrow 0$ максимальная точка сместится на расстояние $z_{cr} = 0,667l$ от наибольшего момента инерции $I_{x,1}$. Аппроксимируя кривую из рис. 4, б, получим следующее уравнение для параметра ψ_1 в выражении (44):

$$\psi_1 = 1 + 0,35(1 - t_h)^2, \quad (45)$$

где $\psi_1 \geq 1$.

Уравнение (45) дает возможность изменить функцию синуса (16) и представить базисную функцию с введением параметра асимметричности ψ_1 . Функцию возможно преобразовать к следующему виду:

$$\int_0^1 \sin(\pi\xi) d\xi = \int_0^{\frac{\psi_1}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\frac{\psi_1}{2}}\right) d\xi + \int_{\frac{\psi_1}{2}}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-\xi}{1-\frac{\psi_1}{2}}\right) d\xi. \quad (46)$$

На рис. 5 для наглядности продемонстрировано, как переменность оказывает влияние на форму потери устойчивости стержня. Точка максимума смещается в сторону поперечного сечения с наименьшей жесткостью. А форма потери устойчивости

конического стержня становится асимметричной относительно середины длины. Поэтому будет удобным представить такую форму потери устойчивости в виде суммы из двух слагаемых.

Найдем вновь коэффициент канонического уравнения (12) c_{11} , но уже с подстановкой в выражение (46). Интегральное выражение при осевой сжимающей силе изменять не нужно, потому как любой член интегрального уравнения, не содержащий бинорма, будет иметь табличное решение даже с измененной функцией синуса:

$$c_{11} = \frac{\pi^4}{l^4} EI_{x,1} \left(\int_0^{0,5\psi_1} (1 - (1 - t_h)\xi)^2 \sin^2\left(\frac{\pi\xi}{\psi_1}\right) d\xi + \int_{0,5\psi_1}^{1-0,5\psi_1} (t_h + (1 - t_h)\xi)^2 \times \sin^2\left(\frac{0,5\pi\xi}{1-0,5\psi_1}\right) d\xi \right) - P \frac{\pi^2}{l^2} \frac{l}{2}. \quad (47)$$

Интегрируя, получим алгебраическое уравнение:

$$c_{11} = \frac{l}{2} \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{\pi^2}{l^2} EI_{x,1} a_{11}^* - P \right) = 0, \quad (48)$$

в котором диакритическим знаком обозначен видоизменившийся коэффициент редукции жесткости стержня:

$$a_{11}^* = \psi_1 \left[\left(\frac{0,131}{\psi_1} + 0,152 \right) t_h^2 + \left(\frac{0,333}{\psi_1} + 0,101 \right) t_h + \left(\frac{0,536}{\psi_1} - 0,253 \right) \right]. \quad (49)$$

Если $\psi_1 = 1$, то выражение (49) вернется к виду a_{11} из уравнения (27). На рис. 6 нанесены кривая по (49), коэффициент редукции a_{11} при удержании только первого слагаемого в ряде синуса и точная зависимость по (35). Можно наблюдать, что коэффициент редукции (49)

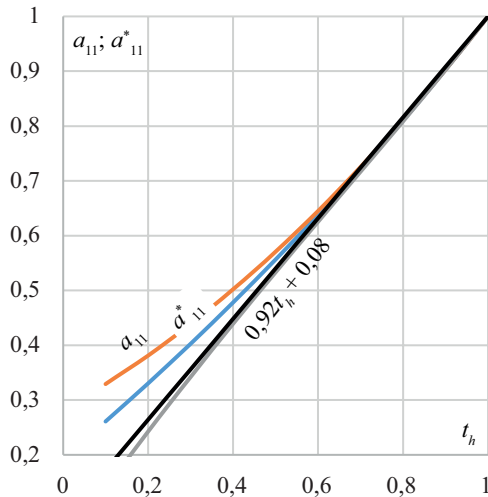


Рис. 6. График зависимости $a_{11} - t_h$

Fig. 6. Relationship between reduction factor t_h and function a_{11}

оказывается значительно ближе к (35), что также означает лучшую сходимость ряда при включении параметра асимметричности ψ_1 . Серым цветом показан коэффициент редукции a_{11}^* при удержании большего числа слагаемых в ряду синуса по (46), который может быть аппроксимирован как:

$$a_{11}^* = \psi_1 \left[0,283t_h^2 + 0,434t_h + \left(\frac{1}{\psi_1} - 0,717 \right) \right]. \quad (50)$$

Как видно, выражение (50) полностью повторяет точную зависимость из метода непосредственного интегрирования дифференциального уравнения. Из этого следует, что коэффициент расчетной длины может быть представлен в новой форме:

$$\mu = \sqrt{\frac{1}{\psi_1 \left(0,283t_h^2 + 0,434t_h + \left(\frac{1}{\psi_1} - 0,717 \right) \right)}}. \quad (51)$$

Сравнительный анализ коэффициента расчетной длины

Вначале сравним значения коэффициента расчетной длины по методу Бубнова – Галеркина. Проследим, как число удерживаемых слагаемых ряда синуса влияет на быстроту сходимости. Результаты занесены в сводную табл. 2. С небольшой погрешностью будет достаточным решать матрицу $[3 \times 3]$. А если взять за основу практические результаты проектирования рам и, в частности, проанализировать некоторые из работ по оптимизации рам переменной жесткости, например Н. Aisamp [24] и Р. Hradil [25], станет ясно, что переменность t_h скорее будет тяготеть к границе $t_h \geq 0,5$ и ниже этого значения может не иметь практического применения, что означает пригодность решения $[1 \times 1]$.

Далее занесем в табл. 3 значения коэффициента расчетной длины, полученные с помощью графоаналитического метода П.И. Алексеева [11]. Результаты

оказываются вновь близкими к точным значениям, что делает такой метод полезным в силу своей возможности учитывать наличие отверстий и перфораций в стенке двутавра.

И последним выполним сравнительный анализ с формулой, предложенной G.C. Lee [15]. Формула была получена путем аппроксимации кривой результата опытов над серией стержней с пятью разными поперечными сечениями:

$$\mu_0 = 1 - 0,375\gamma_0 + 0,08\gamma_0^2(1 - 0,0775\gamma_0), \quad (52)$$

где $\gamma_0 = (h_1/h_0) - 1$, $\gamma \leq 0,268 \cdot (l/h_0) \leq 6$.

Коэффициент расчетной длины (52) определен при наименьшем поперечном сечении. Для перевода μ_0 к μ^1 при наибольшем поперечном сечении воспользуемся формулой:

$$\mu_1 = \mu_0/t_h. \quad (53)$$

На примере колонны высотой 60 см получена сводная табл. 4 результатов. И вновь значения оказываются близкими к друг другу и имеют лишь некоторое расхождение при очень низких значениях t_h . В работах [26–28] также проведен параметрический анализ коэффициента расчетной длины, в том числе и по формуле (52), подтверждающий полученные здесь значения.

Критическая точка z_{cr}

В документе Design Guide 25 [29] упругую критическую силу P_{cr} шарнирно опертого двутаврового стержня с переменной высотой стенки колонны предлагается вычислять при моменте инерции с $\mu = 1$, используя эмпирическую формулу z_{cr} , полученную с помощью МКЭ:

$$z_{cr} = 0,5l \cdot t_h^{0,1464}. \quad (54)$$

В работе [30] по результатам численного анализа и в статье [31] энергетическим способом были получены некоторые другие зависимости. Одна из них

Табл. 2. Коэффициент расчетной длины μ

Table 2. Effective length factor μ

t_h	(51)	Размер матрицы / Matrix size				(31)
		[1 × 1]	[2 × 2]	[3 × 3]	[4 × 4]	
1	1					
0,9	1,053	1,052	1,054	1,054	1,054	1,054
0,8	1,112	1,110	1,115	1,115	1,115	1,115
0,7	1,181	1,174	1,187	1,187	1,187	1,187
0,6	1,264	1,245	1,272	1,273	1,274	1,273
0,5	1,369	1,324	1,374	1,377	1,380	1,378
0,4	1,509	1,412	1,499	1,508	1,515	1,511
0,3	1,709	1,510	1,655	1,679	1,697	1,689
0,2	2,031	1,620	1,853	1,912	1,954	1,949
0,1	2,682	1,743	2,110	2,248	2,344	2,402

Табл. 3. Коэффициент расчетной длины μ

Table 3. Effective length factor μ

$t_h^2 = I_{x,0}/I_{x,1}$	$t_h = \sqrt{I_{x,0}/I_{x,1}}$	μ		
		(51)	(36)	П.И. Алексеев / P.I. Alekseyev [11]
0,1	0,316	1,671	1,642	1,778
0,2	0,447	1,438	1,426	1,495
0,3	0,548	1,316	1,309	1,351
0,5	0,707	1,176	1,170	1,189
0,7	0,837	1,089	1,085	1,093
0,9	0,949	1,026	1,024	1,027
1	1	1		

Табл. 4. Коэффициент расчетной длины μ

Table 4. Effective length factor μ

γ_0	$h_1, \text{ cm} / \text{ cm}$	$h_0, \text{ cm} / \text{ cm}$	$I_{x,0}, \text{ cm}^4 / \text{ cm}^4$	$I_{x,1}, \text{ cm}^4 / \text{ cm}^4$	t_h	μ	
						(36)	G.C. Lee [15]
0,00	60	60	118 331	118 331	1		
0,09		55	97 525		0,908	1,045	1,065
0,20		50	78 969		0,817	1,097	1,136
0,33		45	62 583		0,727	1,156	1,215
0,50		40	48 292		0,639	1,224	1,302
1,00		30	25 682		0,466	1,402	1,500
1,40		25	17 209		0,381	1,524	1,612
2,00		20	10 520		0,298	1,680	1,745
3,00		15	5540		0,216	1,894	1,976
5,00		10	2190		0,136	2,208	2,573

Табл. 5. Максимальное смещение точки ξ_{cr} , вызванное переменностью стержня

Table 5. Maximum displacement of point ξ_{cr} caused by rod non-uniformity

$\gamma_1 = h_1/h_0$	$t_h = \sqrt{I_{x,0}/I_{x,1}}$	$\xi_{cr} = \frac{z_{cr}}{l}$		
		(44)	(54)	(55)
1	1	0,5		
1,09	0,908	0,499	0,493	0,491
1,33	0,727	0,487	0,477	0,471
2,00	0,466	0,450	0,447	0,433
2,40	0,381	0,433	0,434	0,417
4,00	0,216	0,392	0,400	0,375
6,00	0,136	0,369	0,373	0,344
12,00	0,058	0,345	0,329	0,298

приведена в схожей формулировке через отношение высоты колонны:

$$z_{cr} = 0,5l \left(\frac{h_1}{h_0} \right)^{-0,21}. \quad (55)$$

В табл. 5 занесены значения по выражениям (54) и (55), которые сравниваются с формулой (44) и параметром ψ_1 (45) на примере колонны высотой 60 см, взятой из предыдущей табл. 4. В формулах (54) и (55) расстояние отсчитывается от наименьшего поперечного сечения. В текущем исследовании, напомним, ноль принят при наибольшем поперечном сечении. Поэтому значения в табл. 5 для выражения (44) приведены как $1 - \xi_{cr}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показанный способ определения коэффициента расчетной длины μ колонны переменной жесткости с введением в него параметра асимметричности ψ_1 указывает на возможность распространения текущего подхода на задачу плоской формы потери устойчивости балки и изгибно-крутильной потери устойчивости внецентренно-сжатой колонны переменной жесткости. Используя аналитический метод Бубнова – Галеркина, возможно получить эквивалентные величины геометрических характеристик конического стержня с помощью коэффициентов редукции. По результатам проведенного исследования для вычисления коэффициента расчетной длины может быть рекомендована любая из формул: (31), (36) или (51).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. М. ; Л. : ОНТИ НКТП СССР, 1935. 183 с.
2. Ржаницын А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем. М. : Гостехиздат, 1955. 475 с.
3. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. М. : Физматгиз, 1959. 544 с.
4. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений. М. : Трансжелдориздат, 1958. 571 с.
5. Gatewood B.E. Buckling loads for columns of variable cross section // Journal of the Aeronautical Sciences. 1954. Vol. 21. Issue 4. Pp. 287–288. DOI: 10.2514/8.3001
6. Branch T.A. Buckling loads for tapered slender elastic columns : thesis. Montana State University, 1967. 96 p.
7. Казан-Розенцвейг Л.М., Халецкая О.Б. Простая приближенная формула для критической силы в упругом стержне переменного сечения // Вестник гражданских инженеров. 2018. № 1 (66). С. 50–52. DOI: 10.23968/1999-5571-2018-15-1-50-52. EDN URZTYO.
8. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс. 3-е изд., перераб. и доп. М. : Стройиздат, 1980. 616 с.
9. Снитко Н.К. Устойчивость стержней переменного сечения // Строительная механика и расчет сооружений. 1968. № 1. С. 34–35.
10. Сеницкий Ю.Э., Ишутин А.С. Общая устойчивость сжатых составных стержней переменного сечения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 2. С. 341–357. DOI: 10.14498/vsgtu1350. EDN UGXOBF.
11. Алексеев П.И. Устойчивость стержней и балок. К. : Будивельник, 1964. 126 с.
12. Salvadori M.G. Numerical computation of buckling loads by finite differences // Transactions of the American Society of Civil Engineers. 1951. Vol. 116. Issue 1. Pp. 590–624. DOI: 10.1061/taceat.0006570
13. Eisenberger M., Cohen R. Flexural-Torsional Buckling of Variable and Open Cross-Section Members // Journal of Engineering Mechanics. 1995. Vol. 121. Issue 2. Pp. 244–254. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1995)121:2(244)
14. Hirt M.A., Crisinel M. Charpentes métalliques: Conception et dimensionnement des halles et bâtiments, traité de génie civil. Press polytechniques et universitaires romandes, 2001. Vol. 11. 714 p.
15. Lee G.C., Morrell M.L., Ketter R.L. Design of tapered members // Welding Research Council Bulletin. 1972. Vol. 173. Pp. 1–32.
16. Baptista A.M., Muzeau J.P. Design of tapered compression members according to Eurocode 3 // Journal of Constructional Steel Research. 1998. Vol. 46. Issue 1–3. Pp. 146–148. DOI: 10.1016/S0143-974X(98)00064-9
17. Sapalas V., Samofalov M., Saraskinas V. Fem stability analysis of tapered beam-columns // Journal of Civil Engineering and Management. 2005. Vol. 11. Issue 3. Pp. 211–216. DOI: 10.1080/13923730.2005.9636352
18. Smith W.G. Analytic solutions for tapered column buckling // Computers & Structures. 1988. Vol. 28. Issue 5. Pp. 677–681. DOI: 10.1016/0045-7949(88)-90011-9
19. Ermopoulos J.C. Buckling of tapered bars under stepped axial loads // Journal of Structural Engineering. 1986. Vol. 112. Issue 6. Pp. 1346–1354. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:6(1346)
20. Ermopoulos J.C. Equivalent buckling length of non-uniform members // Journal of Constructional Steel Research. 1997. Vol. 42. Issue 2. Pp. 141–158. DOI: 10.1016/s0143-974x(97)00010-2
21. Belyy G., Askinazi V. Overall stability of steel web-tapered members // Materials Physics and Mechanics. 2017. Vol. 31. Issue 1/2. Pp. 63–66.
22. Cywinski Z. Statyka I Dynamika Skrecanego Cienkosciennego Dwuteownika o Zmiennym, Bisyme-

trycznym Przekroju Poprzecznym // Engineering Transactions. 1969. Vol. 17. Issue 2. Pp. 185–217.

23. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М. : Физматгиз, 1959. 574 с.

24. Aucamp H. The optimization of web-tapered portal frame buildings: master thesis. University of Stellenbosch, South Africa, 2017. 180 p.

25. Hradil P., Mielonen M., Fulop L. Optimization tools for steel portal frames — Effective modelling of lateral supports // VTT Technical Research Centre of Finland. 2010. 33 p.

26. Ibrahim Sh.M. Effective buckling length of frames with tapered columns and partially tapered beams // Journal of Constructional Steel Research. 2021. Vol. 187. P. 106993. DOI: 10.1016/j.jcsr.2021.106993. EDN SXGMQI.

27. Doksanovic T., Radic I., Bisercic B. Buckling resistance of tapered steel columns // Applied Sciences.

2023. Vol. 13. Issue 20. P. 11498. DOI: 10.3390/app132011498. EDN ACBTHY.

28. Tankova T., Martins J.P., da Silva L.S., Simoes R., Craveiro H.D. Experimental buckling behaviour of web tapered I-section steel columns // Journal of Constructional Steel Research. 2018. Vol. 147. Pp. 293–312. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.04.015

29. White D.W., Woo Y.K., Slein R. Frame Design Using Nonprismatic Members. 2st Ed. Design Guide 25. Chicago, AISC, 2021. 406 p.

30. Marques L.R.S. Tapered steel members flexural and lateral-torsional buckling : PhD dissertation. University of Coimbra, Portugal, 2012. 271 p.

31. Marques L.R.S., Da Silva L.S., Rebelo C. Rayleigh-Ritz procedure for determination of the critical load of tapered columns // Steel and Composite Structures. 2014. Vol. 16. Issue 1. Pp. 45–58. DOI: 10.12989/scs.2014.16.1.045

Поступила в редакцию 24 ноября 2025 г.

Принята в доработанном виде 17 января 2026 г.

Одобрена для публикации 18 января 2026 г.

ОБ АВТОРЕ: Александр Олегович Ильюшенко — инженер промышленного и гражданского строительства, ведущий инженер архитектурно-строительного отдела; Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект» (ТПИ «Хабаровскпромпроект»); 680000, г. Хабаровск, Уссурийский бульвар, д. 2; revivaltree@gmail.com.

REFERENCES

1. Dinnik A.N. *Stability of elastic systems*. Moscow; Leningrad, USTP PCHI USSR, 1935; 183. (rus.).

2. Rzhantsyn A.R. *Stability of equilibrium of elastic systems*. Moscow, Gostekhizdat, 1955; 475. (rus.).

3. Bleich F. *Stability of steel constructions*. Moscow, Fizmatgiz, 1959; 544. (rus.).

4. Smirnov A.F. *Stability and vibrations of structures*. Moscow, Transzheldorizdat, 1958; 571. (rus.).

5. Gatewood B.E. Buckling loads for columns of variable cross section. *Journal of the Aeronautical Sciences*. 1954; 21(4):287-288. DOI: 10.2514/8.3001

6. Branch T.A. *Buckling loads for tapered slender elastic columns : thesis*. Montana State University, 1967; 96.

7. Kagan-Rosenzweig L.M., Khaletska O.B. Simple approximate formula for critical force in elastic rod with variable cross-section. *Bulletin of Civil Engineers*. 2018; 1(66):50-52. DOI: 10.23968/1999-5571-2018-15-1-50-52. EDN URZTYO. (rus.).

8. Kiselev V.A. *Structural Mechanics. Special Course. 3rd ed., revised and expanded*. Moscow, Stroiizdat, 1980; 616. (rus.).

9. Snitko N.K. Stability of rods of variable cross-section. *Structural Mechanics and Structural Analysis*. 1968; 1:34-35. (rus.).

10. Senitsky Yu.E., Ishutin A.S. Overall stability of compressed compound bars in variable cross section.

Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2015; 19(2):341-357. DOI: 10.14498/vsgtu1350. EDN UGXOBF. (rus.).

11. Alekseev P.I. *Stability of rods and beams*. Kiev, Budivelnik, 1964; 126. (rus.).

12. Salvadori M.G. Numerical computation of buckling loads by finite differences. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*. 1951; 116(1):590-624. DOI: 10.1061/taceat.0006570

13. Eisenberger M., Cohen R. Flexural-Torsional Buckling of Variable and Open Cross-Section Members. *Journal of Engineering Mechanics*. 1995; 121(2):244-254. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1995)121:2(244)

14. Hirt M.A., Crisinel M. *Charpentes métalliques: Conception et dimensionnement des halles et bâtiments, traité de génie civil*. Press polytechniques et universitaires romandes, 2001; 11:714.

15. Lee G.C., Morrell M.L., Ketter R.L. Design of tapered members. *Welding Research Council Bulletin*. 1972; 173:1-32.

16. Baptista A.M., Muzeau J.P. Design of tapered compression members according to Eurocode 3. *Journal of Constructional Steel Research*. 1998; 46(1-3):146-148. DOI: 10.1016/S0143-974X(98)00064-9

17. Sapalas V., Samofalov M., Saraskinas V. Fem stability analysis of tapered beam-columns. *Journal of Civil*

Engineering and Management. 2005; 11(3):211-216. DOI: 10.1080/13923730.2005.9636352

18. Smith W.G. Analytic solutions for tapered column buckling. *Computers & Structures*. 1988; 28(5):677-681. DOI: 10.1016/0045-7949(88)90011-9

19. Ermopoulos J.C. Buckling of tapered bars under stepped axial loads. *Journal of Structural Engineering*. 1986; 112(6):1346-1354. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:6(1346)

20. Ermopoulos J.C. Equivalent buckling length of non-uniform members. *Journal of Constructional Steel Research*. 1997; 42(2):141-158. DOI: 10.1016/s0143-974x(97)00010-2

21. Belyy G., Askinazi V. Overall stability of steel web-tapered members. *Materials Physics and Mechanics*. 2017; 31(1/2):63-66.

22. Cywinski Z. Statyka i Dynamika Skrecanego Cienkosciennego Dwuteownika o Zmiennym, Bisymetrycznym Przekroju Poprzecznym. *Engineering Transactions*. 1969; 17(2):185-217.

23. Vlasov V.Z. *Thin-walled elastic rods*. Moscow, Fizmatgiz, 1959; 574. (rus.).

24. Aucamp H. *The optimization of web-tapered portal frame buildings : master thesis*. University of Stellenbosch, South Africa, 2017; 180.

25. Hradil P., Mielonen M., Fulop L. Optimization tools for steel portal frames — Effective modelling of lateral

supports. *VTT Technical Research Centre of Finland*. 2010; 33.

26. Ibrahim Sh.M. Effective buckling length of frames with tapered columns and partially tapered beams. *Journal of Constructional Steel Research*. 2021; 187:106993. DOI: 10.1016/j.jcsr.2021.106993. EDN SXGMQI.

27. Doksanovic T., Radic I., Bisercic B. Buckling resistance of tapered steel columns. *Applied Sciences*. 2023; 13(20):11498. DOI: 10.3390/app132011498. EDN ACBTHY.

28. Tankova T., Martins J.P., da Silva L.S., Simoes R., Craveiro H.D. Experimental buckling behaviour of web tapered I-section steel columns. *Journal of Constructional Steel Research*. 2018; 147:293-312. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.04.015

29. White D.W., Woo Y.K., Slein R. Frame Design Using Nonprismatic Members. *2st Ed. Design Guide 25*. Chicago, AISC, 2021; 406.

30. Marques L.R.S. *Tapered steel members flexural and lateral-torsional buckling : PhD dissertation*. University of Coimbra, Portugal, 2012; 271.

31. Marques L.R.S., Da Silva L.S., Rebelo C. Rayleigh-Ritz procedure for determination of the critical load of tapered columns. *Steel and Composite Structures*. 2014; 16(1):45-58. DOI: 10.12989/scs.2014.16.1.045

Received November 24, 2025.

Adopted in revised form on January 17, 2026.

Approved for publication on January 18, 2026.

B I O N O T E S : **Alexander O. Ilyushenkov** — industrial and civil construction engineer, leading engineer of the Architectural and Construction Department; **Territorial Design Institute “Khabarovskpromproekt”**; 2 Ussuriysky boulevard, Khabarovsk, 680000, Russian Federation; revivaltree@gmail.com.