

Гармонический осциллятор Дуффинга. Эволюция аттрактора

Юлия Владимировна Азарова, Даниил Николаевич Казаков,
Владимир Андреевич Бунин, Сергей Владимирович Кузнецов

Национальный исследовательский Московский государственный
строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Рассмотрена задача анализа нелинейных колебаний гармонического осциллятора Дуффинга, актуальная для оценки устойчивости механических и строительных систем с упругими и демпфирующими элементами. Актуальность исследования обусловлена необходимостью описания переходов от регулярных колебаний к хаосу в элементах сейсмоизоляции и виброзащиты зданий. Новизна работы заключается в применении метода Розенштейна для количественной оценки экспонентоподобной величины e_1 вместо традиционного визуального анализа, использованного в классических исследованиях Ю. Уэды (1979).

Материалы и методы. Математическая модель осциллятора описывается уравнением $\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos(\omega t)$. Численное решение получено в среде MATLAB с применением пакета «+ueda». Для анализа динамики построены сечения Пуанкаре и рассчитаны экспонентоподобные величины e_1 методом Розенштейна, основанном на отслеживании расхождения траекторий в реконструированном фазовом пространстве.

Результаты. Показано, что при увеличении амплитуды возбуждения B (при $k = 0,10$) система переходит от периодических режимов к хаотическим через квазипериодичность. При увеличении демпфирования k (при $B = 12,0$) наблюдается обратный процесс — постепенное подавление хаоса и возвращение к регулярным колебаниям. Построены зависимости $e_1(B)$ и $e_1(k)$, уточняющие границы переходов к хаосу по сравнению с данными Ю. Уэды. Метод Розенштейна позволил количественно подтвердить наличие критических интервалов $B_c = 11,9\text{--}12,2$ и $k_c = 0,26\text{--}0,30$.

Выводы. Результаты исследования подтвердили применимость метода Розенштейна для количественной идентификации хаотических режимов в системах Дуффинга. Полученные данные уточняют границы переходов, согласуясь с классическими работами, и могут быть использованы при проектировании сейсмоизоляторов и вибродемпфирующих устройств, где необходимо избегать хаотических колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: осциллятор Дуффинга, метод Розенштейна, аттрактор, хаос, сечение Пуанкаре, сейсмоизоляция, демпфирование

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Азарова Ю.В., Казаков Д.Н., Бунин В.А., Кузнецов С.В. Гармонический осциллятор Дуффинга. Эволюция аттрактора // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 6. С. 898–905. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.6.898-905

Авторы, ответственные за переписку: Сергей Владимирович Кузнецов, KuznetsovSV@mgsu.ru; Юлия Владимировна Азарова, AzarovaYV@yandex.ru.

Duffing harmonic oscillator. Evolution of the attractor

Yulia V. Azarova, Daniil N. Kazakov, Vladimir A. Bunin, Sergey V. Kuznetsov

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The paper investigates nonlinear oscillations of the Duffing harmonic oscillator, which are relevant for assessing the stability of mechanical and structural systems with elastic and damping components. The study's relevance is linked to understanding the transition from regular to chaotic oscillations in seismic isolation and vibration control elements. The novelty lies in applying the Rosenstein method to quantitatively estimate the exponent-like quantity e_1 , replacing the qualitative approach used in Ueda's classical studies (1979).

Materials and methods. The oscillator is described by the equation $\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos(\omega t)$. Numerical integration was performed in MATLAB using the custom “+ueda” package. The dynamics were analyzed through Poincaré sections and by calculating the exponent-like value e_1 using the Rosenstein algorithm, which tracks divergence of nearby trajectories in the reconstructed phase space.

Results. It is shown that increasing the excitation amplitude B (at $k = 0.10$) drives the system from periodic to chaotic motion via quasi-periodic states. Increasing the damping k (at $B = 12.0$) suppresses chaotic oscillations, restoring regular behaviour. The dependencies $e_1(B)$ and $e_1(k)$, refine the boundaries of chaos onset compared to Ueda's results, identifying critical intervals $B_c = 11.9\text{--}12.2$ and $k_c = 0.26\text{--}0.30$.

Conclusions. The results of the study confirmed the applicability of the Rosenstein method for the quantitative identification of chaotic modes in Duffing systems. The data obtained refine the boundaries of the transitions, in line with classical studies, and can be used in the design of seismic isolators and vibration-damping devices where it is necessary to avoid chaotic oscillations.

KEYWORDS: Duffing oscillator, Rosenstein method, attractor, chaos, Poincaré section, seismic isolation, damping

FOR CITATION: Azarova Yu.V., Kazakov D.N., Bunin V.A., Kuznetsov S.V. Duffing harmonic oscillator. Evolution of the attractor. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(6):898-905. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.6.898-905 (rus.).

Corresponding authors: Sergey V. Kusnetsov, KuznetsovSV@mgsu.ru; Yulia V. Azarova, Azarovauv@yandex.ru.

ВВЕДЕНИЕ

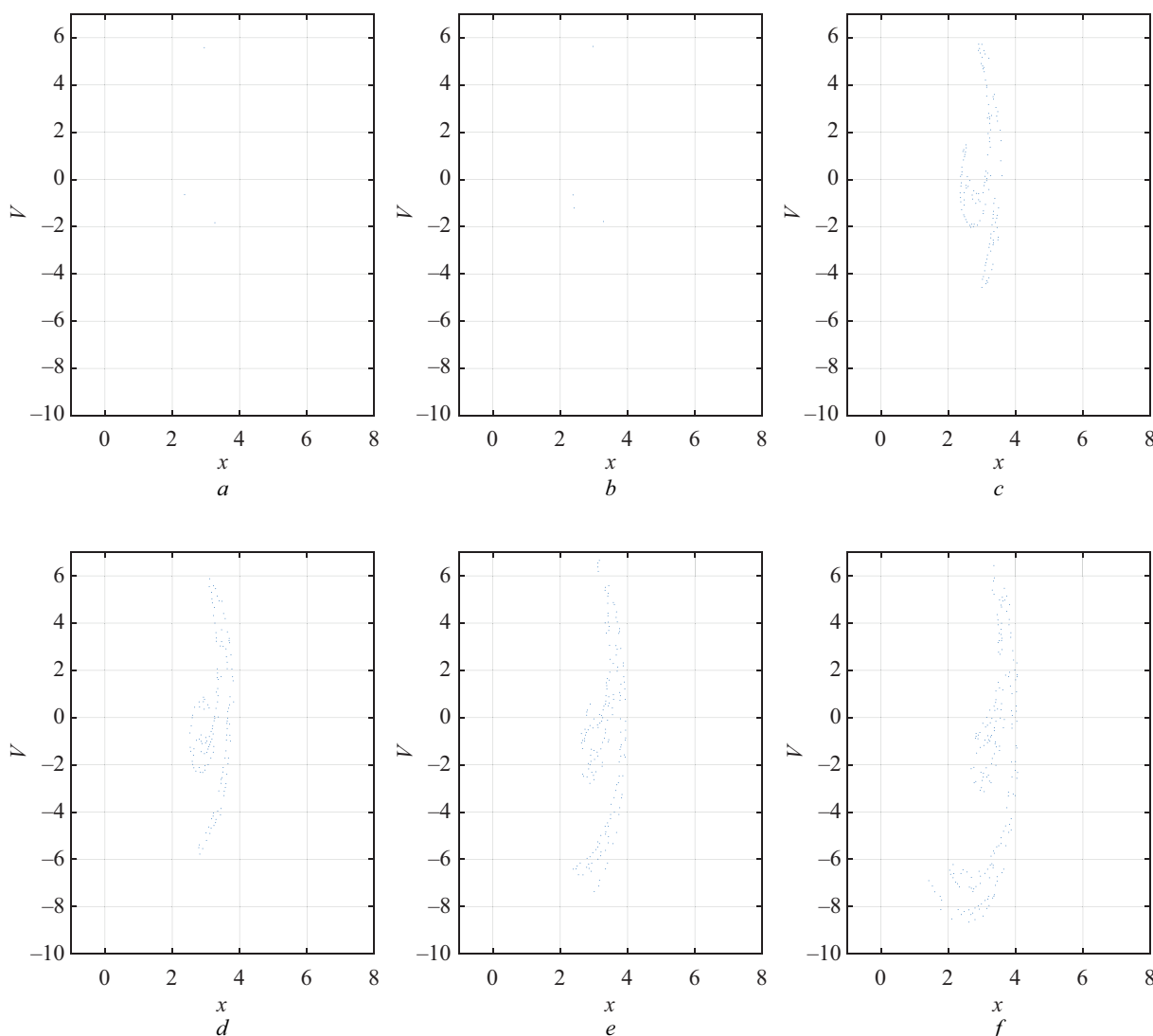
Исследование нелинейных колебаний остается одной из центральных проблем прикладной динамики и строительной механики [1–5]. Сложные режимы движения от периодических до хаотических проявляются в системах с упругими и диссипативными элементами, включая сейсмоизоляторы, вибрационные опоры и демпферы [6–8].

Одной из базовых моделей, описывающих нелинейную упругость и переходы к хаосу, является осциллятор Дуффинга [9–13]. Он демонстрирует широкий спектр режимов, включая бифуркации, квазипериодичность и хаос, в зависимости от амплитуды возбуждения и коэффициента демпфирования.

Классические работы Ю. Уэды [14] впервые показали, что при увеличении амплитуды внешнего гармонического воздействия система переходит от устойчивых колебаний к хаотическим. Однако в его исследованиях использовались методики фазового анализа и визуального выделения аттракторов без количественной оценки скорости расхождения траекторий.

Современные подходы к анализу хаоса основаны на вычислении локальных показателей Ляпунова (или их аппроксимаций), позволяющих количественно отличать регулярные и хаотические движения [15, 16].

Цель настоящей работы — провести уточненное численное исследование эволюции аттрактора осциллятора Дуффинга при изменении параметров



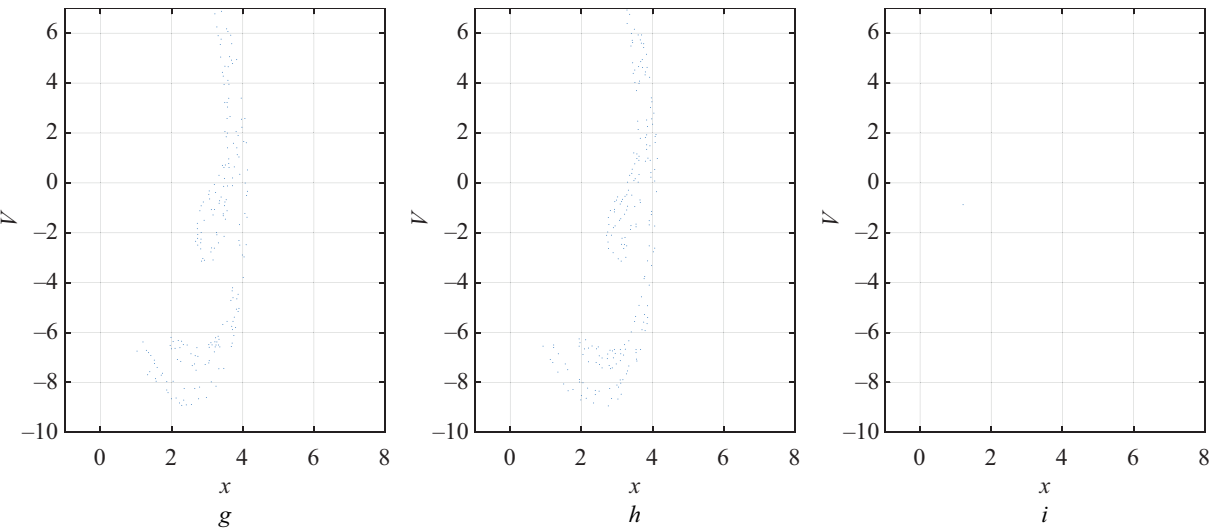


Рис. 1. Эволюция сечения Пуанкаре при росте амплитуды B (фиксированный $k = 0,10$): $a — B = 9,80$; $b — B = 9,90$; $c — B = 10,00$; $d — B = 11,00$; $e — B = 12,00$; $f — B = 13,00$; $g — B = 13,20$; $h — B = 13,30$; $i — B = 13,40$

Fig. 1. Evolution of Poincaré section with increasing size of B (fixed $k = 0.10$): $a — B = 9.80$; $b — B = 9.90$; $c — B = 10.00$; $d — B = 11.00$; $e — B = 12.00$; $f — B = 13.00$; $g — B = 13.20$; $h — B = 13.30$; $i — B = 13.40$

возбуждения с применением метода Розенштейна [17] для расчета экспонентоподобной величины e_1 , отражающей локальную степень хаотичности системы.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Математическая модель

Рассматривается безразмерное уравнение осциллятора Дуффинга:

$$\ddot{x} + k\dot{x} + x^3 = B\cos(\omega t), \tag{1}$$

где x — координата смещения; k — коэффициент демпфирования; B — амплитуда внешнего возбуждения; $\omega = 1$ — частота возбуждения.

Интегрирование выполнялось по схеме Рунге – Кутты 4-го порядка при $\Delta t = 0,01$ и общей длительности $T = 6000$. После переходного участка (≈ 2000 ед.)

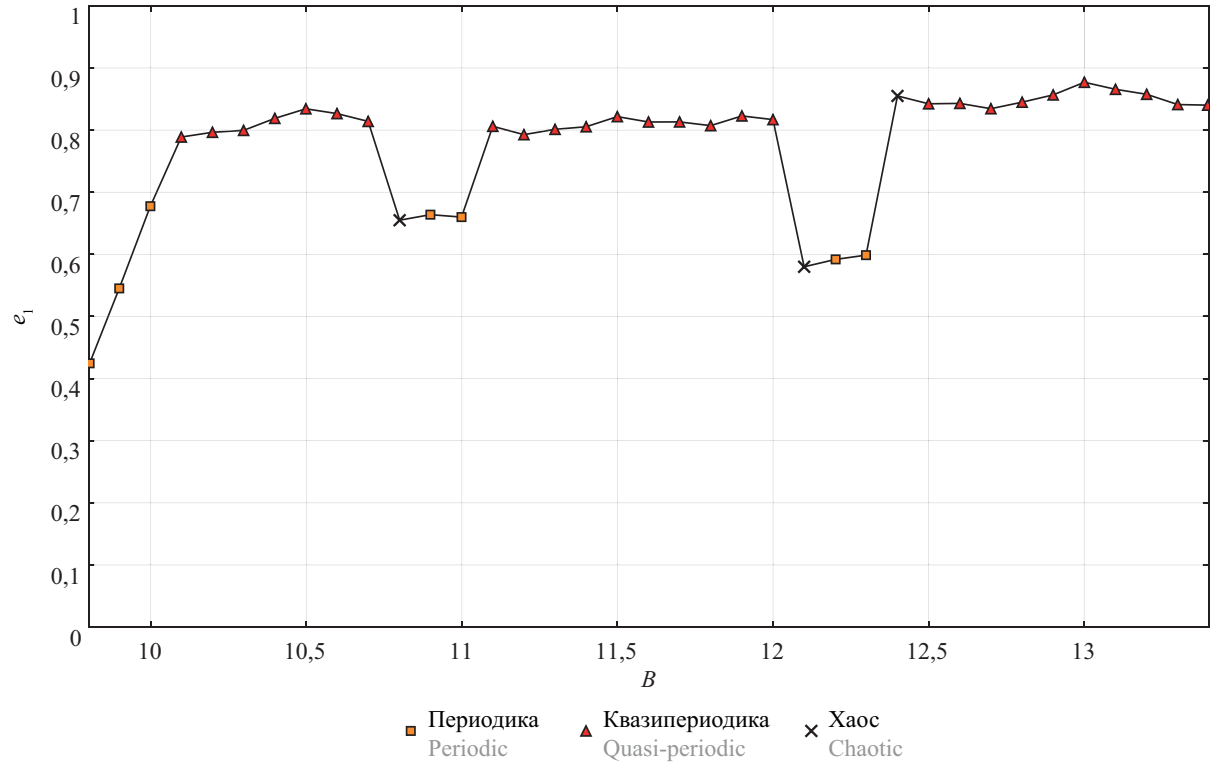


Рис. 2. Зависимость $e_1(B)$ при фиксированном $k = 0,10$

Fig. 2. Dependence $e_1(B)$ with a fixed $k = 0.10$

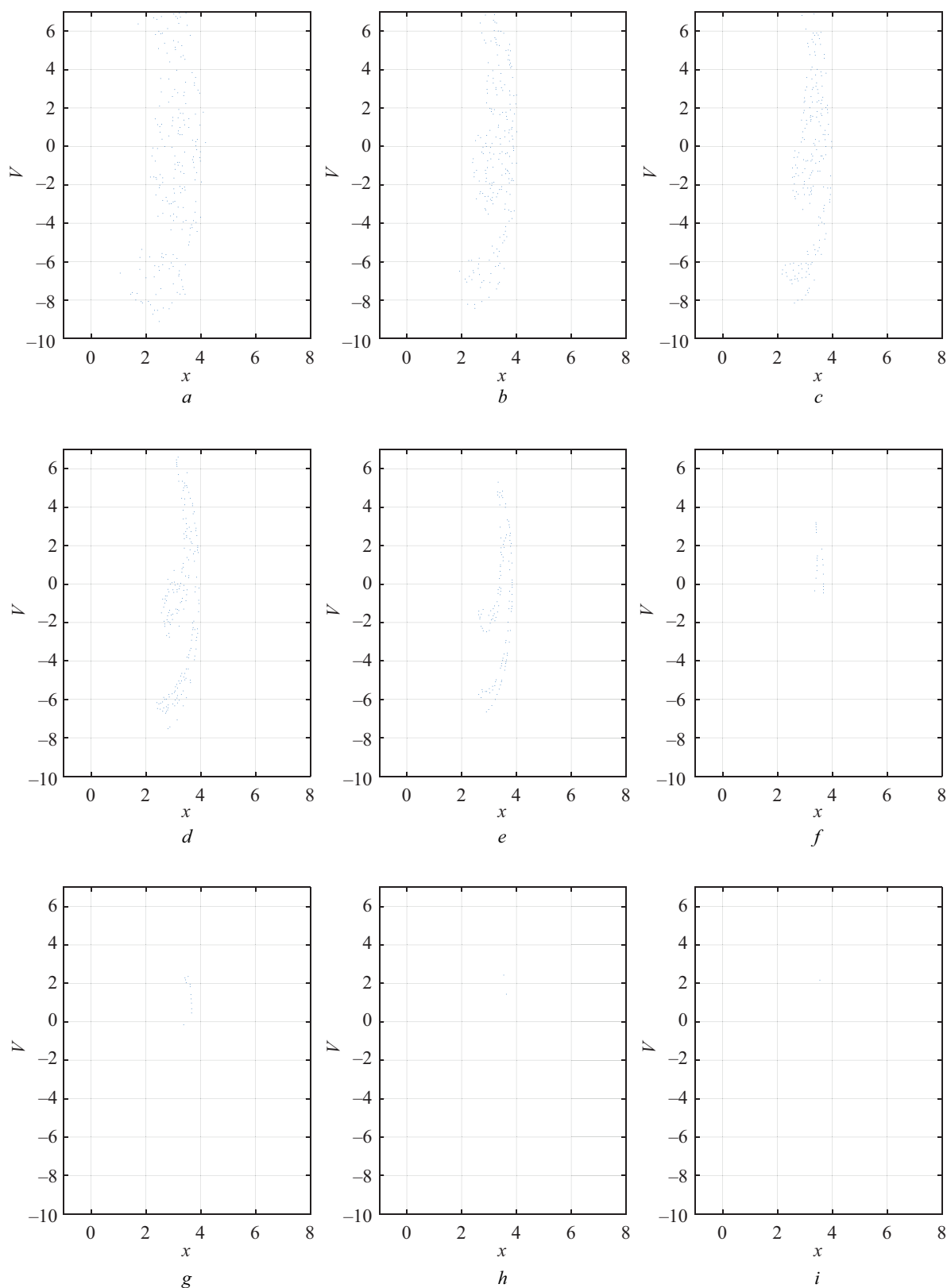


Рис. 3. Эволюция аттрактора при росте k (фиксированная $B = 12,0$): $a — k = 0,01$; $b — k = 0,03$; $c — k = 0,05$; $d — k = 0,10$; $e — k = 0,20$; $f — k = 0,30$; $g — k = 0,31$; $h — k = 0,32$; $i — k = 0,34$

Fig. 3. Evolution of attractor with increasing size k (fixed $B = 12,0$): $a — k = 0.01$; $b — k = 0.03$; $c — k = 0.05$; $d — k = 0.10$; $e — k = 0.20$; $f — k = 0.30$; $g — k = 0.31$; $h — k = 0.32$; $i — k = 0.34$

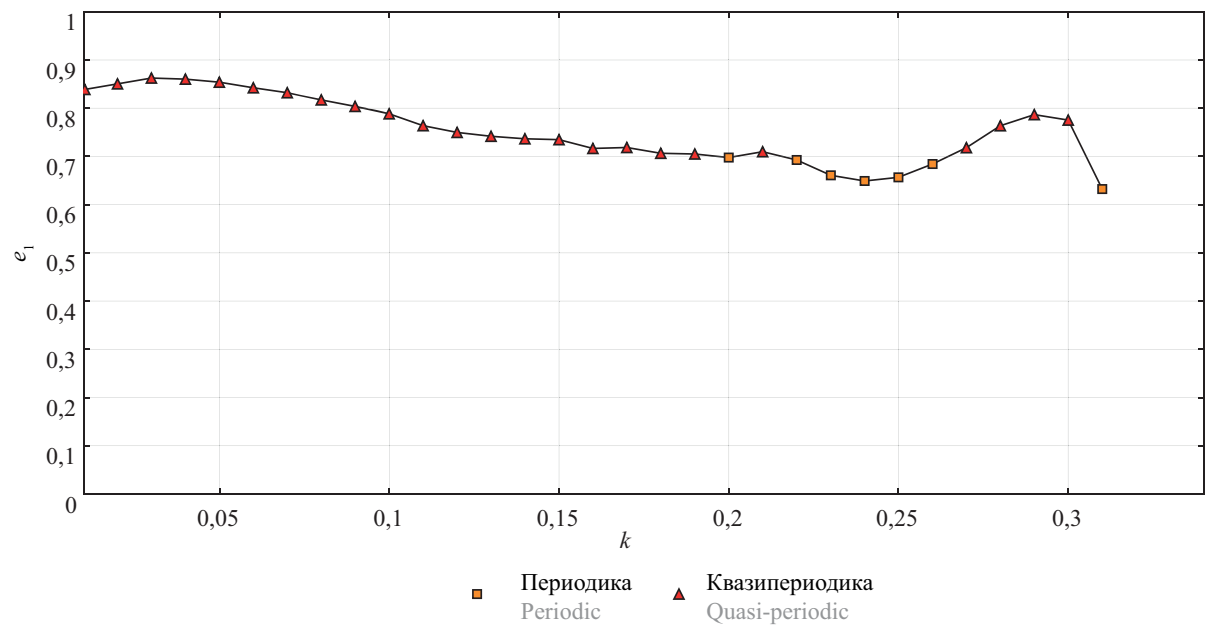


Рис. 4. Зависимость $e_1(k)$ при фиксированной $B = 12,0$
Fig. 4. Dependence of $e_1(k)$ with a fixed $B = 12.0$

Сравнение с классическими результатами
Comparison with classical results

Параметр Parameter	Граница хаоса по Ю. Уэде [9] Ueda's chaos boundary	Получено (метод Розенштейна) Received (Rozenstein method)	Характер перехода Nature of the transition
B_c при $k = 0,10$ B_c when $k = 0.10$	$\approx 11,8$	11,9–12,2	Периодика $\rightarrow$ хаос Periodic $\rightarrow$ chaos
k_c при $B = 12,0$ k_c when $B = 12.0$	$\approx 0,25$	0,26–0,30	Хаос $\rightarrow$ стабилизация Chaos $\rightarrow$ stabilization
$B < 10.0$	Регулярное движение Regular movement	Подтверждено Confirmed	Периодика / Periodic

из временного ряда выбирались 4000 точек для анализа.

Для каждого набора параметров (B, k) формировалось сечение Пуанкаре в моменты $t_n = 2\pi n/\omega$. Полученные множества (x_n, x'_n) использовались для визуального анализа и расчета экспонентоподобной величины e_1 .

Метод оценки экспонентоподобной величины e_1

В отличие от Ю. Уэды [14], где границы хаоса определялись по геометрической структуре аттрактора, в данной работе используется метод Розенштейна [17, 18], предназначенный для расчета максимального показателя Ляпунова по одномерному сигналу $x(t)$.

Метод основан на анализе расхождения соседних траекторий в реконструированном фазовом пространстве:

$$Y_i = [x_i, x_{i+\tau}, x_{i+2\tau}, \dots, x_{i+(m-1)\tau}], \tag{2}$$

где m — размерность вложения; τ — задержка, определяемая автокорреляцией сигнала.

Для каждой пары ближайших векторов Y_i и $Y_{j(t)}$ вычисляется среднее расстояние:

$$d_{(i,j)} = \|Y_i - Y_j\| \tag{3}$$

и отслеживается его рост во времени:

$$\langle \ln d(t) \rangle \approx e_1 t + C, \tag{4}$$

где коэффициент e_1 соответствует локальной экспоненте расходимости. Для регулярных движений $e_1 \approx 0$, для хаотических $e_1 > 0$.

В данном исследовании использовано усреднение по ансамблю близких траекторий с коррекцией на «временной зазор» (Theiler window) $\Delta_t = 0,5f_s$, что исключает автокорреляционные искажения.

Критерии классификации режима движения

Для каждого режима применялась следующая классификация:

- периодика — $e_1 < 0,7$;
- квазипериодика — $(0,7 \leq e_1 < 0,95)$;
- хаос — $(e_1 \geq 0,95$ или $|\Delta e_1| > 0,15)$.

Классификация выполнялась автоматически в MATLAB, а графики $e_1(B)$ и $e_1(k)$ строились с цвето-

вой дифференциацией по типу режима (оранжевые — периодические, красные — квазипериодические, черные — хаотические).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Анализ результатов вычислений

Изменение режима при росте амплитуды B

На рис. 1 представлены сечения Пуанкаре при $k = 0,10$. При малых амплитудах $B < 10,0$ наблюдается регулярная периодика, далее формируется двухчленный аттрактор, переходящий в квазипериодический (рис. 1, *e, f*). В диапазоне $B = 11,9–12,2$ происходит переход к хаосу — траектория становится неупорядоченной и заполняет фазовое пространство.

Соответствующая зависимость $e_1(B)$ (рис. 2) демонстрирует рост экспоненты в интервале $B > 11,8$, что подтверждает переход в хаотическое состояние.

Влияние демпфирования k

При фиксированной амплитуде $B = 12,0$ (рис. 3) видно, что с ростом демпфирования хаотические области постепенно исчезают. Уже при $k > 0,25$ система возвращается в квазипериодический режим, а при $k \geq 0,3$ — полностью стабилизируется. Зависимость $e_1(k)$ представлена на рис. 4.

Сравнение с классическими результатами

В таблице приведено сравнение с классическими результатами.

Использование метода Розенштейна позволило уточнить границы хаотических режимов с точностью до $\pm 0,05$ по B и $\pm 0,01$ по k , что подтверждает его эффективность по сравнению с визуальными критериями Ю. Уэды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проведенное исследование подтверждает, что переход к хаосу в осцилляторе Дуффинга происходит при достижении критических амплитуд возбуждения. Методика Розенштейна дает возможность количественно оценивать степень хаотичности без необходимости построения глобального аттрактора, что повышает устойчивость анализа при шумных данных.

Полученные результаты важны для инженерных задач сейсмоизоляции и виброзащиты, где элементы с нелинейными характеристиками могут демонстрировать аналогичные переходы. Учет границ хаоса позволяет корректно выбирать демпфирующие свойства и исключать резонансные состояния, приводящие к разрушению конструкций [19, 20].

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear Oscillations. Wiley, 1979.
2. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos. CRC Press, 2018. DOI: 10.1201/9780429492563
3. Tanekou S.Ts., Ramadoss Ja., Kengne Ja., Kenmoe G.D., Rajagopal K. Coexistence of Periodic, Chaotic and Hyperchaotic Attractors in a System Consisting of a Duffing Oscillator Coupled to a van der Pol Oscillator // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2023. Vol. 33. Issue 2. DOI: 10.1142/S0218127423300045. EDN XALVGC.
4. Kuznetsov S.V. Forced harmonic vibrations of duffing oscillator with cubic-quintic spring nonlinearity // Chaos, Solitons & Fractals. 2025. Vol. 199. Issue 1. DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116699. EDN KKPYUH.
5. Da L., Soares I., Krol M.F., Rech P.C. Coexisting attractors and basins of attraction of an extended forced Duffing oscillator // The European Physical Journal B. 2024. Vol. 97. Issue 6. P. 71. DOI: 10.1140/epjb/s10051-024-00709-0. EDN JWBVIF.
6. Moon F.C. Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers. Wiley, 1987.
7. Kovacic I., Brennan M.J. The Duffing Equation. Wiley, 2011. DOI: 10.1002/9780470977859
8. Thompson J.M.T., Stewart H.B. Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists. Wiley, 2002.
9. Rand R.H. Lecture Notes on Nonlinear Vibrations. Cornell University, 2005.
10. Chen G., Ueta T. Chaos in Circuits and Systems // World Scientific Series on Nonlinear Science Series B. 2002. DOI: 10.1142/4945
11. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields // Applied Mathematical Sciences. 1983. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2
12. Montenegro Joo J. Evolution of the Lyapunov Exponent during a Chaotic Event in the Nonlinear Damped and Forced Oscillator // Chaos and Complexity Letters. 2022. Vol. 16. Issue 1.
13. Abohamer Mk., Amer Ts., Arab A., Galal Aa. Analyzing the chaotic and stability behavior of a duffing oscillator excited by a sinusoidal external force // Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control. 2024. Vol. 44. Issue 2. Pp. 969–986. DOI: 10.1177/14613484241298998. EDN PUDJES.
14. Ueda Y. Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation // Journal of Statistical Physics. 1979. Vol. 20. Issue 2. Pp. 181–196. DOI: 10.1007/bf01011512. EDN WDFUCD.
15. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. Vol. 16. Issue 3. Pp. 285–317. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9

16. Kantz H., Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/cbo9780511755798

17. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993. Vol. 65. Issue 1–2. Pp. 117–134. DOI: 10.1016/0167-2789(93)90009-p

18. Gao J.B., Zheng Z., Sanjuán M.A.F. *Chaos Theory and Complex Systems*. Springer, 2020.

19. Luongo A., Zulli D. Nonlinear dynamic models for seismic isolation systems // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014. Vol. 58. Pp. 156–166.

20. Casciati F., Rodellar J. *Smart Structures: Innovative Systems for Seismic Response Control*. WIT Press, 2011.

Поступила в редакцию 17 ноября 2025 г.

Принята в доработанном виде 27 ноября 2025 г.

Одобрена для публикации 11 января 2026 г.

ОБ АВТОРАХ: Юлия Владимировна Азарова — аспирант; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; azarova.uv@yandex.ru;

Даниил Николаевич Казаков — аспирант; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; denialkazakov9@mail.ru;

Владимир Андреевич Бунин — аспирант; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ORCID: 0000-0002-0271-8193; buninw2001@gmail.com;

Сергей Владимирович Кузнецов — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; Scopus: 7202573564, ResearcherID: H-9448-2013, ORCID: 0000-0001-9426-0791; KuznetsovSV@mgsu.ru.

Вклад авторов:

Азарова Ю.В. — сбор и обработка материала, написание исходного текста, итоговые выводы.

Казаков Д.Н. — доработка текста, написание и оформление статьи.

Бунин В.А. — доработка текста, написание и оформление статьи.

Кузнецов С.В. — идея, научное руководство, научное редактирование текста.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations*. Wiley, 1979.

2. Strogatz S.H. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. CRC Press, 2018. DOI: 10.1201/9780429492563

3. Tanekou S.Ts., Ramadoss Ja., Kengne Ja., Kenmoe G.D., Rajagopal K. Coexistence of Periodic, Chaotic and Hyperchaotic Attractors in a System Consisting of a Duffing Oscillator Coupled to a van der Pol Oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2023; 33(2). DOI: 10.1142/S0218127423300045. EDN XALVGC.

4. Kuznetsov S.V. Forced harmonic vibrations of duffing oscillator with cubic-quintic spring nonlinearity. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2025; 199(1). DOI: 10.1016/j.chaos.2025.116699. EDN KKP YUH.

5. Da L., Soares I., Krol M.F., Rech P.C. Coexisting attractors and basins of attraction of an extended forced Duffing oscillator. *The European Physical Journal B*. 2024; 97(6):71. DOI: 10.1140/epjb/s10051-024-00709-0. EDN JWB VIF.

6. Moon F.C. *Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. Wiley, 1987.

7. Kovacic I., Brennan M.J. *The Duffing Equation*. Wiley, 2011. DOI: 10.1002/9780470977859

8. Thompson J.M.T., Stewart H.B. *Nonlinear Dynamics and Chaos: Geometrical Methods for Engineers and Scientists*. Wiley, 2002.

9. Rand R.H. *Lecture Notes on Nonlinear Vibrations*. Cornell University, 2005.

10. Chen G., Ueta T. Chaos in Circuits and Systems. *World Scientific Series on Nonlinear Science Series B*. 2002. DOI: 10.1142/4945

11. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. *Applied Mathematical Sciences*. 1983. DOI: 10.1007/978-1-4612-1140-2

12. Montenegro Joo J. Evolution of the Lyapunov Exponent during a Chaotic Event in the Nonlinear Damped and Forced Oscillator. *Chaos and Complexity Letters*. 2022; 16(1).

13. Abohamer Mk., Amer Ts., Arab A., Galal Aa. Analyzing the chaotic and stability behavior of a duffing oscillator excited by a sinusoidal external force. *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*. 2024; 44(2):969-986. DOI: 10.1177/14613484241298998. EDN PUDJES.
14. Ueda Y. Randomly transitional phenomena in the system governed by Duffing's equation. *Journal of Statistical Physics*. 1979; 20(2):181-196. DOI: 10.1007/bf01011512. EDN WDFUCD.
15. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1985; 16(3):285-317. DOI: 10.1016/0167-2789(85)90011-9
16. Kantz H., Schreiber T. *Nonlinear Time Series Analysis*. Cambridge University Press, 2004. DOI: 10.1017/cbo9780511755798
17. Rosenstein M.T., Collins J.J., De Luca C.J. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993; 65(1-2):117-134. DOI: 10.1016/0167-2789(93)-90009-p
18. Gao J.B., Zheng Z., Sanjuán M.A.F. *Chaos Theory and Complex Systems*. Springer, 2020.
19. Luongo A., Zulli D. Nonlinear dynamic models for seismic isolation systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2014; 58:156-166.
20. Casciati F., Rodellar J. *Smart Structures: Innovative Systems for Seismic Response Control*. WIT Press, 2011.

Received November 17, 2025.

Adopted in revised form on November 27, 2025.

Approved for publication on January 11, 2026.

B I O N O T E S : **Yulia V. Azarova** — postgraduate student; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; azarovauv@yandex.ru;

Daniil N. Kazakov — postgraduate student; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; denialkazakov9@mail.ru;

Vladimir A. Bunin — postgraduate student; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ORCID: 0000-0002-0271-8193; buninw2001@gmail.com;

Sergey V. Kuznetsov — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Scopus: 7202573564, ResearcherID: H-9448-2013, ORCID: 0000-0001-9426-0791; KuznetsovSV@mgsu.ru.

Contribution of the authors:

Yulia V. Azarova — collection and processing of materials, writing of the initial text, final conclusions.

Daniil N. Kazakov — text revision, writing, and formatting of the article.

Vladimir A. Bunin — text revision, writing, and formatting of the article.

Sergey V. Kuznetsov — idea, academic advising, scientific editing of the text.

The authors declare that there is no conflict of interest.