

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 69.04

DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1880-1891

Сингулярное разложение динамической реакции зданий и сооружений на элементарные составляющие

Юрий Александрович Колотовичев^{1,2}

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;

² СОДИС Лаб; г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Приводятся результаты декомпозиции синтезированных свободных колебаний линейной неконсервативной консольной динамической модели на элементарные составляющие с помощью сингулярного разложения матрицы перемещений.

Материалы и методы. Использовано известное представление прямоугольной матрицы в виде произведения трех матричных множителей, получившее название сингулярного разложения (Singular Value Decomposition — SVD).

Результаты. При представлении динамической реакции сооружения в определенной матричной форме результаты сингулярного разложения имеют ясную физическую интерпретацию: левые сингулярные векторы аппроксимируют собственные векторы, сингулярные значения определяют вклад отдельных форм собственных колебаний в общую динамическую реакцию, а произведения сингулярных значений и правых сингулярных векторов аппроксимируют модальные координаты колебательной системы в каждый рассматриваемый момент времени. Сингулярное разложение позволяет «автоматически» получить априорный векторный базис, основываясь на внешних проявлениях динамической реакции (перемещении, скорости или ускорении точек конструкции), в то время как традиционно используемые для этих целей собственные векторы являются базисом апостериорным, основанным на исследовании внутренних инерционных, жесткостных и демпфирующих свойств колебательной системы.

Выводы. Подтверждена возможность использования SVD матрицы перемещений для определения основных динамических параметров линейных колебательных систем: форм и частот собственных колебаний, количественных параметров демпфирования. Все этапы получения и последующего анализа элементарных составляющих динамической реакции легко автоматизируются, что дает возможность рассматривать SVD в качестве основы для разработки программного обеспечения стационарных систем динамического мониторинга строящихся и эксплуатируемых зданий и сооружений.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамика сооружений, операционный модальный анализ, сингулярное разложение матриц, SVD, собственные векторы, собственные частоты, демпфирование, система мониторинга конструкций, СММК, динамический мониторинг

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Колотовичев Ю.А. Сингулярное разложение динамической реакции зданий и сооружений на элементарные составляющие // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. Вып. 12. С. 1880–1891. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1880-1891

Автор, ответственный за переписку: Юрий Александрович Колотовичев, ykol@sodislab.com.

Singular value decomposition of dynamic response of structures

Yury A. Kolotovich^{1,2}

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation;

² SODIS Lab; Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. This paper presents the results of the decomposition of the synthesized free damped vibrations of a linear cantilever dynamic model into elementary components using singular value decomposition of the displacement matrix.

Materials and methods. The well-known representation of a rectangular matrix in the form of a product of three matrix multipliers, called singular value decomposition (SVD), was used in the study.

Results. Representing the dynamic response of a structure in a certain matrix form allows for the results of the singular value decomposition to have a clear physical interpretation: the left singular vectors approximate the eigenvectors, the singular values themselves determine the contribution of individual eigenmodes to the overall dynamic response, and the products of singular values and right singular vectors approximate the modal coordinates of the dynamic system at the time under consideration. Singular value decomposition allows to “automatically” obtain an a priori vector basis based on the external manifestations of the dynamic reaction (displacement, velocity or acceleration of the points of the structure), whereas the eigenvectors traditionally used for these purposes are a posteriori basis based on the study of the internal inertia, stiffness and damping properties.

Conclusions. This study confirmed the possibility of using displacement matrix SVD to determine the major dynamic parameters of linear dynamic systems: eigenmodes, eigenfrequencies and quantitative damping parameters. All stages of obtaining and subsequent analysis of the dynamic response elementary components are easily automated, which allows to consider SVD as a basis for software development of automatic dynamic monitoring systems of structures under construction and in operation.

KEYWORDS: structural dynamics, operational modal analysis, singular value decomposition, SVD, eigenvectors, eigenfrequencies, damping, structural health monitoring, SHM, dynamic monitoring

FOR CITATION: Kolotovichev Yu.A. Singular value decomposition of dynamic response of structures. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2023; 18(12):1880-1891. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1880-1891 (rus.).

Corresponding author: Yury A. Kolotovichev, ykol@sodislab.com.

ВВЕДЕНИЕ

При решении прямых задач динамики сооружений инерционные, демпфирующие и упругие свойства математической модели исследуемой конструкции считаются известными (устанавливаются известными методами строительной механики). Построенная таким образом модель дает возможность определять динамические свойства сооружения и его реакцию на любые заданные воздействия.

При решении обратной задачи внутренние свойства сооружения наряду с действующей нагрузкой неизвестны, а основные динамические параметры конструкции определяют по известной реакции сооружения, которая может быть получена различными инструментальными средствами. Данный класс задач еще известен как операционный модальный анализ (operational modal analysis — ОМА) [1], основной целью которого является выявление параметров элементарных составляющих любой динамической реакции линейных систем: форм и частот собственных колебаний, а также характеристик демпфирования.

Знание действительных значений динамических параметров строящихся и эксплуатирующихся зданий и сооружений позволяет решать широкий перечень актуальных проблем, среди которых можно особо выделить: обследование и мониторинг технического состояния строительных конструкций [2–6], валидацию и калибровку компьютерных моделей [7–9], разработку цифровых двойников [10], контроль корректности принятых проектных решений [11].

В качестве исходной информации для проведения операционного модального анализа чаще всего используют инструментальные записи зависимостей перемещений, скоростей или ускорений

от времени, полученные в ограниченном (как правило, не более нескольких десятков) числе точек сооружения с помощью различных измерительных приборов (сейсмометров, велосиметров, акселерометров), и представляемые в цифровом виде [3, 4, 12, 13]. Динамическую реакцию реальных объектов всегда оказывается возможным измерить с некоторыми ошибками, вызванными как инструментальными погрешностями измерительных приборов, так и общим несовершенством методов измерения и их математической обработки, поэтому исследователям приходится иметь дело с некоторым исходным заведомо искаженным «зашумленным» дискретным сигналом.

Известные методы операционного модального анализа основаны на предварительной декомпозиции (разложении) исходного сигнала на элементарные составляющие [1, 14]. Методы принято условно разделять на два класса: декомпозиция во временной области (time domain decomposition — TDD) и декомпозиция в частотной области (frequency domain decomposition — FDD). Основой обоих классов методов является одна и та же идея о том, что любой вектор динамической реакции линейной динамической системы может быть разложен по базису векторов собственных форм колебаний. Ключевое отличие временной декомпозиции от частотной заключается в том, что первая не использует напрямую методы спектрального анализа [15], в то время как вторая базируется на исследовании частотного состава различных производных параметров исходного сигнала [16].

Исследование, результаты которого приводятся в настоящей статье, базируется на известном представлении прямоугольной матрицы в виде произведения трех матричных множителей, которое носит название сингулярное разложение (Singular Value

Decomposition — SVD) [17]. Необходимо заметить, что идея использования SVD для операционного модального анализа далеко не нова, эта техника активно используется обоими классами существующих методов [18–20], но применяется исключительно к автокорреляционным матрицам динамической реакции, что эквивалентно использованию все тех же собственных векторов в качестве базиса декомпозиции. Предлагаемое автором решение заключается в использовании SVD непосредственно к матрице динамической реакции, что эквивалентно применению иного, в общем случае отличного от форм собственных колебаний, априорного базиса разложения, который предоставляет сингулярное разложение.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Динамическую реакцию произвольной колебательной системы с конечным числом n степеней свободы, рассматриваемую в m дискретных моментов времени t , всегда можно представить в виде матрицы перемещений y размерностью $n \times m$:

$$y = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ y(t_1) & y(t_2) & \dots & y(t_m) \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t_1) & y_1(t_2) & \dots & y_1(t_m) \\ y_2(t_1) & y_2(t_2) & \dots & y_2(t_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_n(t_1) & y_n(t_2) & \dots & y_n(t_m) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $y_i(t_j)$ — перемещение i -й точки системы в момент времени t_j ; $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$.

Каждый столбец в матрице (1) полностью определяет деформированную форму сооружения в момент времени t_j .

Известно [21], что динамическая реакция линейных колебательных систем может быть разложена по базису системы линейно независимых векторов. При решении прямых задач динамики сооружений в качестве такого базиса обычно выбирают векторы собственных форм колебаний, тогда динамическая реакция может быть представлена суммой модальных перемещений $y_k(t)$:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) = \sum_{k=1}^n Y_k \cdot q_k(t). \quad (2)$$

Уравнение (2) известно как метод разложения по формам собственных колебаний, в нем: Y_k — собственный вектор k -й формы колебаний; $q_k(t)$ — модальная амплитуда, определяющая вклад (вес) k -й формы колебаний в общее динамическое перемещение системы.

Модальные амплитуды $q_k(t)$ удобно рассматривать в качестве обобщенных (модальных) координат вектора перемещений в n -мерном пространстве, а процедуру разложения (2) — как замену пространственных координат на модальные.

Уравнение (2) можно записать в матричной форме:

$$y(t) = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ | & | & \dots & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} = Y \cdot \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где Y — матрица собственных векторов, размерностью $n \times n$.

С учетом выражения (3) матрица перемещений (1) может быть представлена в виде:

$$y = YQ^T, \quad (4)$$

где

$$Q^T = \begin{bmatrix} - & q_1^T & - \\ - & q_2^T & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & q_n^T & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(t_1) & q_1(t_2) & \dots & q_1(t_m) \\ q_2(t_1) & q_2(t_2) & \dots & q_2(t_m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ q_n(t_1) & q_n(t_2) & \dots & q_n(t_m) \end{bmatrix} \quad (5)$$

— транспонированная матрица состояний $n \times m$, j -й столбец которой представляет собой модальные координаты динамической системы в момент времени t_j .

Рассмотрим одну из простейших динамических моделей строительных конструкций, упругий вертикальный консольный стержень длиной L с равномерно распределенной массой, и смоделируем режим его свободных колебаний. Произвольная динамическая реакция такого стержня может быть разложена по формам собственных колебаний (рис. 1), которые определяются семейством функций [22]:

$$y_k(x) = (\cosh \beta_k x - \cos \beta_k x) + \frac{\cos \lambda_k + \cosh \lambda_k}{\sin \lambda_k + \sinh \lambda_k} \cdot (\sin \beta_k x - \sinh \beta_k x), \quad (6)$$

где собственные числа $\lambda_k = \beta_k L$ являются корнями трансцендентного частотного уравнения $\cos \lambda_k \times \cosh \lambda_k = -1$:

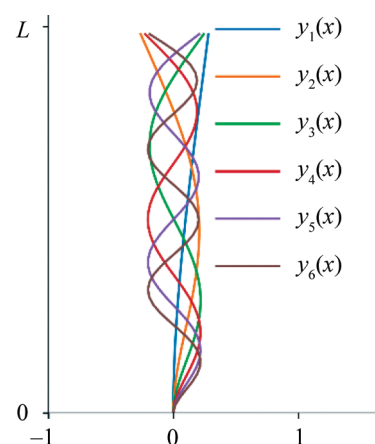


Рис. 1. Формы собственных колебаний консольного стержня с равномерно распределенной массой

Fig. 1. Eigenmodes of a cantilever beam with a uniformly distributed mass

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \beta_1 L = 0,596864\pi; \\ \lambda_2 &= \beta_2 L = 1,494180\pi; \\ \lambda_3 &= \beta_3 L = 2,500250\pi; \\ \lambda_4 &= \beta_4 L = 3,499999\pi; \\ \lambda_k &\approx \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k > 4.\end{aligned}\quad (7)$$

Связь собственных чисел с круговыми собственными частотами недемпфированных колебаний устанавливается формулой:

$$\omega_k = \beta_k^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad (8)$$

в которой EJ — изгибная жесткость стержня; m — погонная масса.

В режиме свободных колебаний при использовании модели модального демпфирования модальной амплитуда, ассоциированная с k -й формой колебаний, будет определяться выражением [23]:

$$q_k(t) = C_k \cdot e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_{D_k} t + \gamma_k), \quad (9)$$

где C_k — весовой коэффициент; ζ_k — безразмерный коэффициент затухания, выраженный в долях от критического коэффициента вязкости; $\omega_{D_k} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$ — круговая частота демпфированных колебаний; γ_k — начальная фаза колебаний. Задавая различные C_k и γ_k , можно имитировать произвольные начальные условия.

Матрицу состояний (5) при использовании выражения (9) удобно представлять в виде произведения:

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{C} \hat{\mathbf{Q}}^T, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

— диагональная матрица амплитудных коэффициентов C_k ; $\hat{\mathbf{Q}}^T$ — безразмерная транспонированная матрица состояний, состоящая из векторов $\hat{\mathbf{q}}_k^T$, компоненты которых вычисляются по формуле (9) без учета C_k . Таким образом, задавая различные величины C_k , можно «регулировать» вклад каждой отдельной формы колебаний в общее перемещение.

Окончательно получаем для матрицы перемещений (4):

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= C_1 \mathbf{Y}_1 \hat{\mathbf{q}}_1^T + C_2 \mathbf{Y}_2 \hat{\mathbf{q}}_2^T + \dots + C_n \mathbf{Y}_n \hat{\mathbf{q}}_n^T = \\ &= \mathbf{Y} \mathbf{C} \hat{\mathbf{Q}}^T.\end{aligned}\quad (12)$$

С другой стороны, эффективное сингулярное разложение (SVD) прямоугольной матрицы:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{y}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

состоящей из m столбцов длиной n , имеет вид [17]:

$$\begin{aligned}\mathbf{y} &= \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \dots + \sigma_m \mathbf{u}_m \mathbf{v}_m^T = \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T,\end{aligned}\quad (13)$$

где

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} | & | & \dots & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \quad (14)$$

— матрица левых сингулярных векторов;

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

— диагональная матрица сингулярных значений;

$$\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} - & \mathbf{v}_1^T & - \\ - & \mathbf{v}_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & \mathbf{v}_m^T & - \end{bmatrix} \quad (16)$$

— транспонированная матрица правых сингулярных векторов.

Матрица левых сингулярных векторов является унитарной матрицей с ортонормированными столбцами и, следовательно, может формировать базис для декомпозиции разлагаемой матрицы $\mathbf{y}$ на элементарные составляющие.

Рассмотрим консольный стержень длиной $L = 5$ м, примем модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^{11}$ Па, момент инерции поперечного сечения $J = 25$ см⁴ и массу $m = 1000$ кг/м. Дискретизируем динамическую модель с шагом 0,5 м, получив $n = 11$ точек, перемещения которых будут являться степенями свободы рассматриваемой конструкции.

Особенности динамического поведения реальных строительных конструкций позволяют учитывать небольшое $r < n$ ограниченное число форм собственных колебаний для получения приемлемой точности определения динамической реакции. Предположим, что динамическая реакция рассматриваемого стержня является суммой первых шести форм собственных колебаний (мод).

Матрица собственных векторов, вычисленная согласно формуле (6), для дискретизированной модели показана на рис. 2, а соответствующие дискретные формы колебаний — на рис. 3.

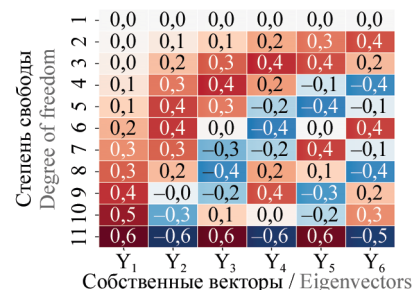


Рис. 2. Матрица собственных векторов $\mathbf{Y}$

Fig. 2. Eigenvector matrix $\mathbf{Y}$

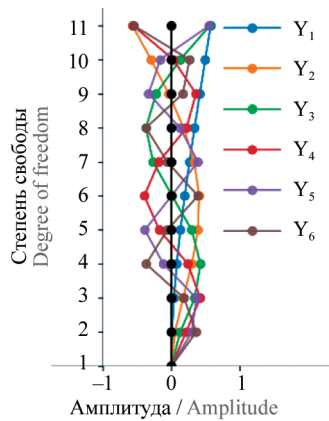


Рис. 3. Формы собственных колебаний дискретизированной динамической модели

Fig. 3. Eigenmodes of the lumped-mass dynamic model

Здесь и далее собственные векторы нормированы таким образом, чтобы они имели единичную длину, т.е. единичный результат вычисления евклидовой нормы $\|Y_k\| = 1$.

Вычислим по формуле (8) спектр собственных частот $f_k = \omega_k / 2\pi$ и зададим произвольным образом для каждой моды параметры ζ_k и γ_k . Записывая результаты в виде векторов, имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^T &= [0,16 \quad 1,01 \quad 2,84 \quad 5,57 \quad 9,22 \quad 13,77]_{[\text{Гц}]}; \\ \zeta^T &= [0,03 \quad 0,03 \quad 0,02 \quad 0,03 \quad 0,01 \quad 0,02]; \\ \gamma^T &= \left[\frac{\pi}{8} \quad \frac{\pi}{4} \quad -\frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{3} \quad -\frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{7} \right]_{[\text{рад.}]} \end{aligned} \quad (17)$$

Матрицу амплитудных коэффициентов C зададим таким образом (рис. 4), чтобы вклад в динамическое перемещение каждой последующей формы колебаний был меньше, чем предыдущей (что очень часто наблюдается в реальных сооружениях).

1	0	0	0	0	0
0	0,8	0	0	0	0
0	0	0,6	0	0	0
0	0	0	0,5	0	0
0	0	0	0	0,3	0
0	0	0	0	0	0,2

Рис. 4. Матрица амплитудных коэффициентов C , м

Fig. 4. Matrix of amplitude coefficients C , m

Вектор времени t для моделирования колебаний сформирован с учетом требований теоремы Котельникова – Найквиста – Шеннона [24] путем дискретизации с частотой $f_s = 40$ Гц временного промежутка $[0; 20]$ с (достаточного для реализации

трех полных циклов колебаний на частоте основного тона). Всего: 801 шаг по времени.

Безразмерная матрица состояний, полученная с учетом выражений (9) и (10), в виде тепловой карты представлена на рис. 5.

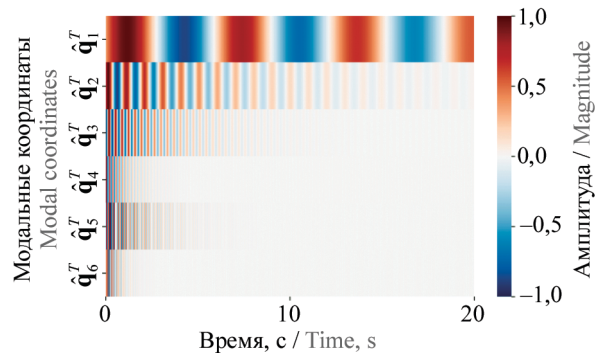


Рис. 5. Безразмерная матрица состояний $\hat{Q}^T$

Fig. 5. Dimensionless state matrix $\hat{Q}^T$

Визуализировав построчно произведения $C_k \hat{q}_k$ (рис. 6), получим зависимости модальных амплитуд (множителей к собственным векторам) от времени.

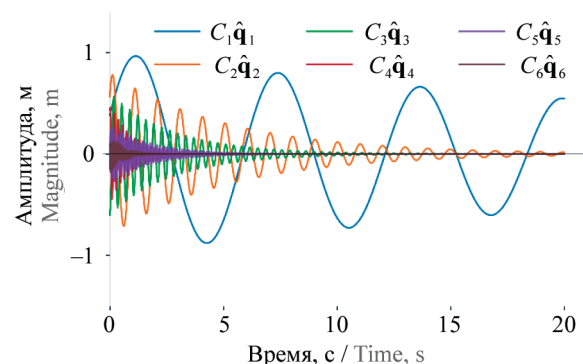


Рис. 6. Зависимость амплитуд модальных перемещений от времени, м

Fig. 6. Time dependence of modal displacement amplitudes, m

Матрица перемещений y , рассчитанная согласно выражению (12), изображена на рис. 7.

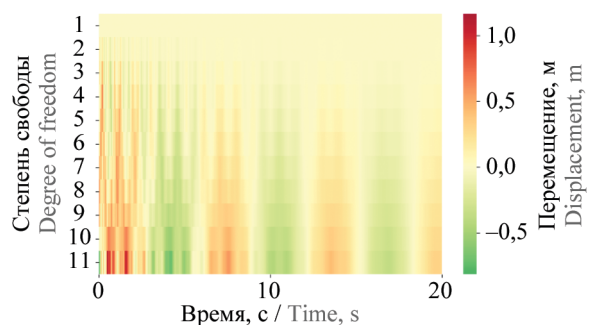


Рис. 7. Незашумленная матрица перемещений y

Fig. 7. Noise-free displacement matrix y

Воздействие помех и погрешностей при инструментальном измерении динамической реакции смоделировано добавлением к каждому компоненту матрицы перемещений 10%-ного дискретного белого шума. В результате получена зашумленная матрица перемещений $\tilde{y}$ (все параметры декомпозиции зашумленной матрицы перемещений авторы так же обозначают сверху знаком «тильда»), показанная на рис. 8. Визуально воздействие белого шума такого уровня практически незаметно, тем не менее его наличие скажется на результатах анализа.

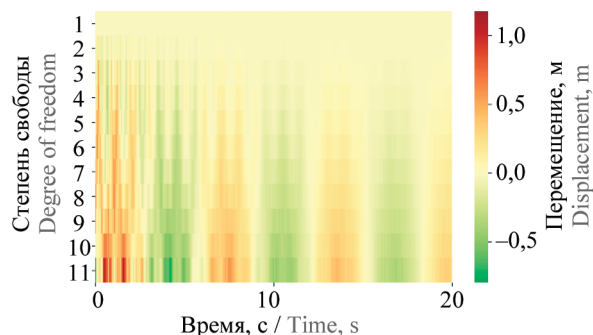


Рис. 8. Зашумленная матрица перемещений $\tilde{y}$

Fig. 8. Noisy displacement matrix $\tilde{y}$

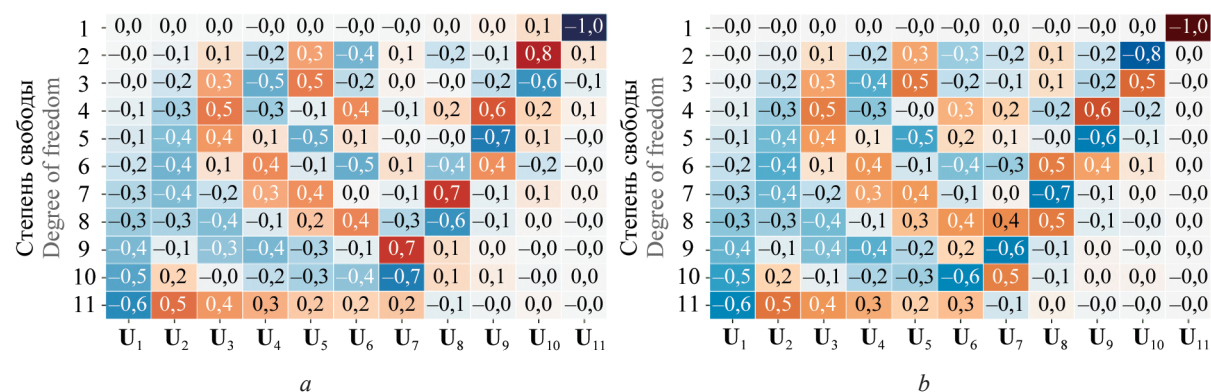


Рис. 9. Матрица U левых сингулярных векторов: a — незашумленной матрицы перемещений; b — зашумленной матрицы перемещений

Fig. 9. Left singular matrix U of the: a — noise-free displacement matrix; b — noisy displacement matrix



Рис. 10. Матрица Σ сингулярных значений: a — незашумленной матрицы перемещений; b — зашумленной матрицы перемещений

Fig. 10. Matrix Σ of singular values: a — noise-free displacement matrix; b — noisy displacement matrix

Синтезированные матрицы y и $\tilde{y}$ являются тем исходным сигналом с известной внутренней структурой, для которого производилось исследование свойств сингулярного разложения, выполненного с помощью функции `linalg.svd` библиотеки `SciPy` для языка программирования Python 3. Результаты SVD показаны на рис. 9–11.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Наиболее важным результатом является практически полное совпадение собственных векторов рассматриваемой модели с шестью первыми левыми сингулярными векторами матрицы перемещений (рис. 12). Влияние добавленного белого шума на элементы левых сингулярных векторов крайне незначительно.

График σ_k , построенный в полулогарифмическом масштабе для незашумленной матрицы (рис. 13, a), наглядно показывает ее структуру: наблюдается резкое уменьшение величины сингулярных значений, ассоциированных с теми сингулярными векторами, для которых отсутствуют соответствующие формы колебаний в исходном сигнале. Поэтому векторы U_k для $k > 6$ могут быть отброшены, что полностью соответствует физике рассматриваемого процесса.

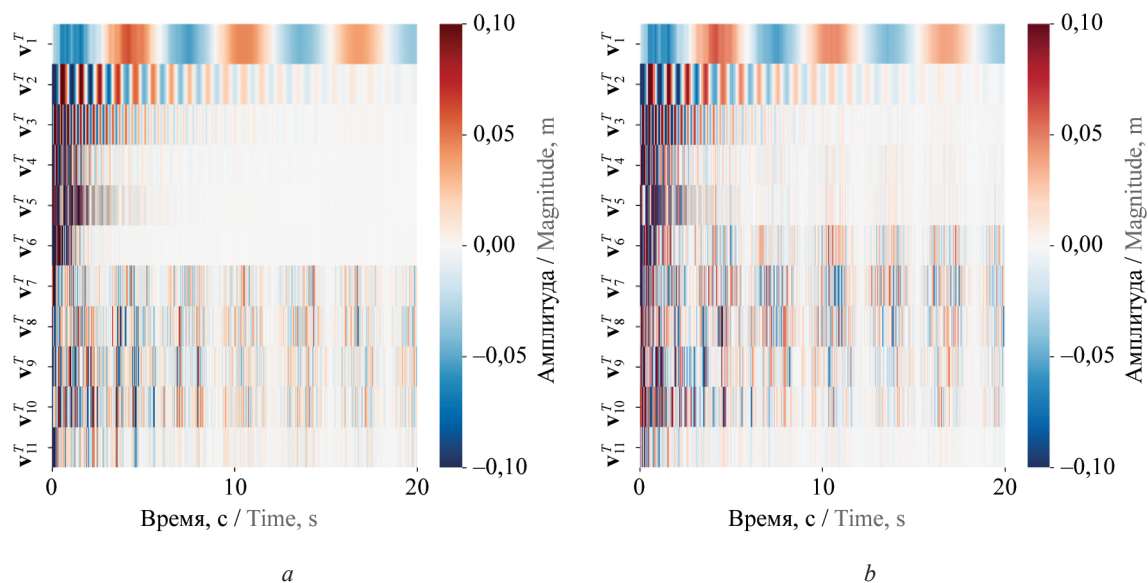


Рис. 11. Транспонированная матрица $\mathbf{V}^T$ правых сингулярных векторов: a — незашумленной матрицы перемещений; b — зашумленной матрицы перемещений

Fig. 11. Right singular matrix $\mathbf{V}^T$ of the: a — noise-free displacement matrix; b — noisy displacement matrix

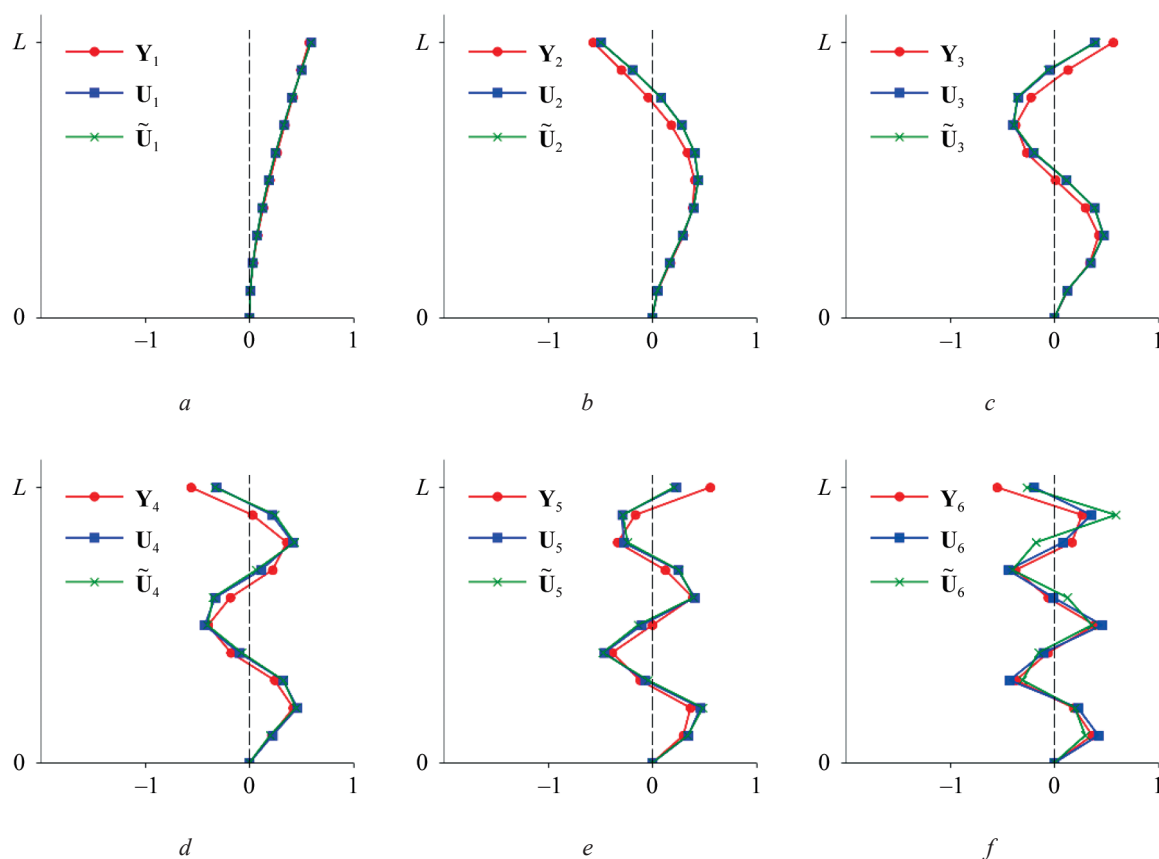


Рис. 12. Сопоставительный график динамических параметров рассматриваемой колебательной системы: $\mathbf{U}_k$ — левые сингулярные векторы незашумленной матрицы перемещений; $\tilde{\mathbf{U}}_k$ — левые сингулярные векторы зашумленной матрицы перемещений; $\mathbf{Y}_k$ — собственные векторы

Fig. 12. Comparative plot of dynamic parameters: $\mathbf{U}_k$ — left singular vectors of the noise-free displacement matrix; $\tilde{\mathbf{U}}_k$ — left singular vectors of the noisy displacement matrix; $\mathbf{Y}_k$ — eigenvectors

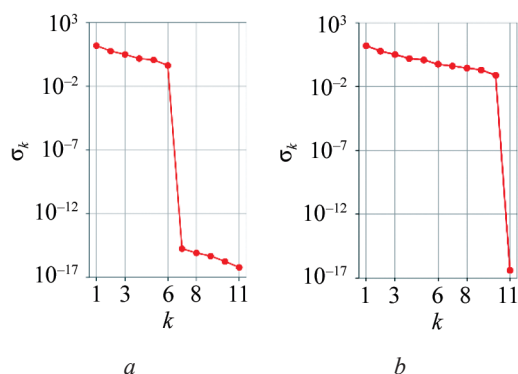


Рис. 13. Сингулярные значения σ_k : a — незашумленной матрицы перемещений; b — зашумленной матрицы перемещений

Fig. 13. Singular values σ_k of the: a — noise-free displacement matrix; b — noisy displacement matrix

Однако при наличии шума в исходной матрице по аналогичному графику (рис. 13, b) можно сделать ошибочный вывод о том, что в структуре колебаний присутствуют формы выше шестой. Другими словами, белый шум вызвал появление «паразитных» форм колебаний, которые полностью отсутствуют в исход-

ном сигнале. Очевидно, что для исключения подобных ошибок в декомпозиции необходимо получать дополнительную информацию иными методами.

Сопоставим формулы (12) и (13). Если собственный вектор $\mathbf{Y}_k$ равен левому сингулярному вектору $\mathbf{U}_k$ (совпадает геометрически и используется одинаковый способ нормирования), то справедливо следующее равенство:

$$C_k \hat{\mathbf{q}}_k = \sigma_k \mathbf{v}_k, \quad (18)$$

в котором и левую, и правую часть можно рассматривать в качестве модальной функции состояний (функции изменения модальных координат во времени). Справедливость равенства (18) подтверждена в ходе проведения численного эксперимента: модальные амплитуды незашумленной матрицы хорошо аппроксимируют модальные составляющие исходного сигнала (рис. 14).

При наличии помех шум накладывается на функцию состояний, что особенно заметно на графиках амплитуд, соответствующих высшим формам (рис. 14, e, f). Искажение амплитуд именно высших форм в рассматриваемой задаче объясняется их малым вкладом в общую динамическую реакцию, что понижает отношение «сигнал/шум».

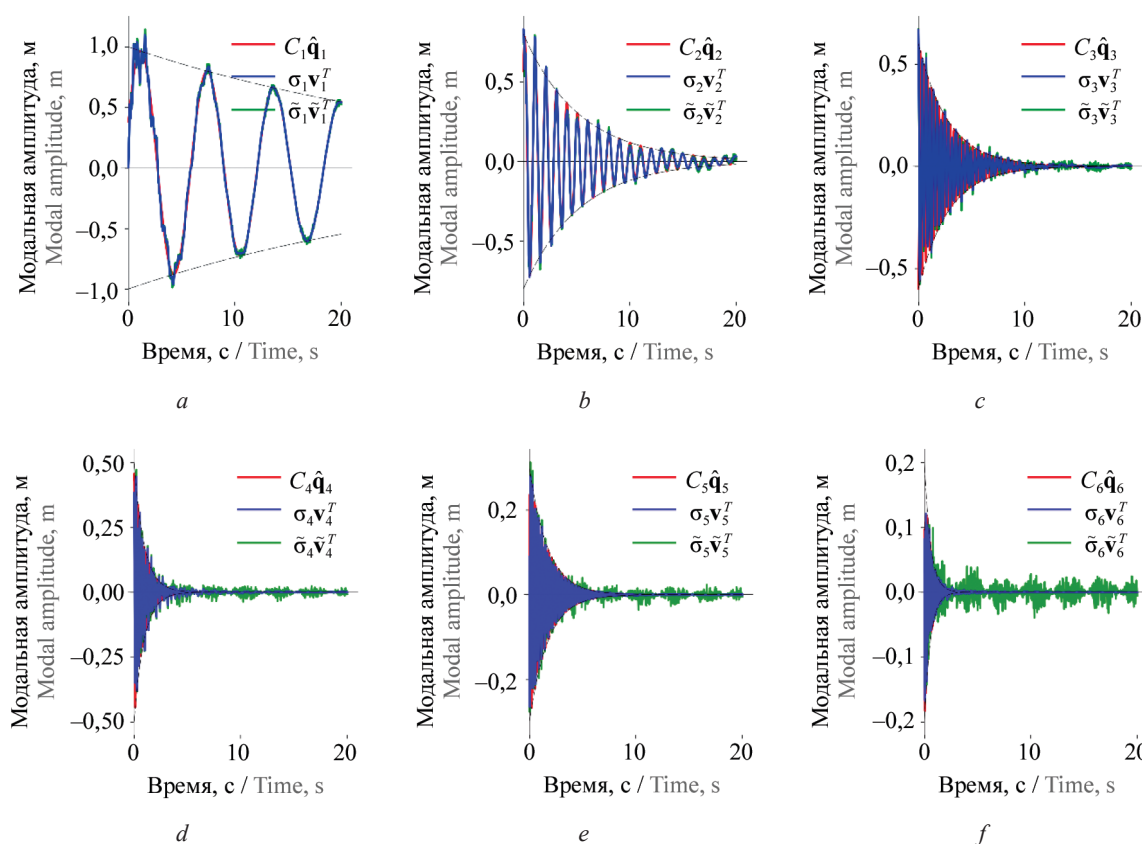


Рис. 14. Сопоставительный график функций состояний (модальных амплитуд): $C_k \hat{\mathbf{q}}_k$ — исходной матрицы перемещений; $\sigma_k \mathbf{v}_k$ — сингулярного разложения незашумленной матрицы перемещений; $\tilde{\sigma}_k \tilde{\mathbf{v}}_k$ — сингулярного разложения зашумленной матрицы перемещений

Fig. 14. Comparative plot of modal amplitudes for: $C_k \hat{\mathbf{q}}_k$ — initial displacement matrix; $\sigma_k \mathbf{v}_k$ — singular decomposition of the noise-free displacement matrix; $\tilde{\sigma}_k \tilde{\mathbf{v}}_k$ — singular decomposition of the noisy displacement matrix

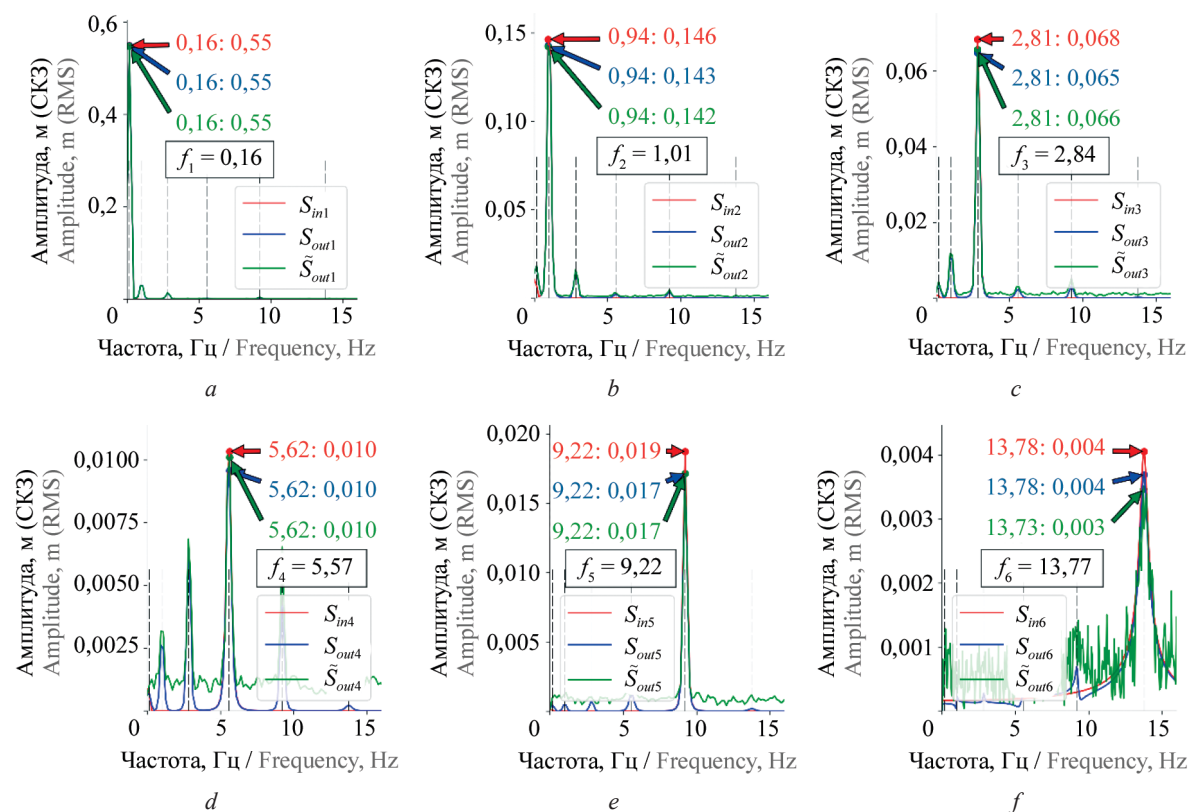


Рис. 15. Сопоставительный график спектрального состава модальных амплитуд: $S_{in,k}$ — исходной матрицы перемещений; $S_{out,k}$ — сингулярного разложения незашумленной матрицы перемещений; $\hat{S}_{out,k}$ — сингулярного разложения зашумленной матрицы перемещений; f_k — частота собственных колебаний исходного сигнала

Fig. 15. Comparative plot of modal amplitudes spectra for: $S_{in,k}$ — initial displacement matrix; $S_{out,k}$ — singular decomposition of the noise-free displacement matrix; $\hat{S}_{out,k}$ — singular decomposition of the noisy displacement matrix; f_k — eigenfrequency

Совпадение огибающих модальных амплитуд, полученных в результате сингулярного разложения, с огибающими модальными амплитудами исходного сигнала свидетельствует о равенстве параметров затухания всех шести элементарных составляющих колебательного процесса. Числовые значения коэффициентов демпфирования могут быть легко получены любым классическим методом, например путем определения логарифмического декремента затухания [25].

Исследование частотного состава модальных амплитуд выполнено методом Уэлча [26] (с применением процедуры *signal.welch* библиотеки *SciPy* для языка программирования Python 3). Спектры модальных амплитуд (рис. 15), полученных посредством сингулярного разложения, позволяют уверенно извлекать доминирующие частоты, невязка которых с частотами собственных колебаний исходного сигнала не превысила 7,5 % (рис. 15, b). При этом во всех исследуемых спектрах обнаружены частотные составляющие, соответствующие каждой из шести гармоник исходного сигнала (отмечены вертикальными пунктирными линиями на рис. 15). Этот эффект можно интерпретировать,

выражаясь фигурально, как «взаимопроникновение» элементарных составляющих колебаний. Предположительно, взаимопроникновение вызвано отличием (хотя и незначительным) базиса декомпозиции динамической реакции в процессе сингулярного разложения от собственных векторов. Тем не менее амплитуды паразитных пиков на спектрах оказываются значительно меньше доминирующей гармоник, что не препятствует решению задачи определения основных динамических параметров колебательной системы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

В результате проведенного исследования можно сделать следующие выводы.

Результаты численного эксперимента по декомпозиции свободных колебаний неконсервативной системы с конечным числом степеней свободы при использовании классической, допускающей разделение уравнения движения в модальных координатах, модели внутреннего трения подтверждают возможность использования сингулярного разложения матрицы перемещений для определения основ-

ных динамических параметров: форм и частот собственных колебаний, количественных параметров демпфирования.

Результаты сингулярного разложения (13) матрицы перемещений имеют ясную физическую интерпретацию: левые сингулярные векторы U_k аппроксимируют векторы собственных форм колебаний, сингулярные значения σ_k являются весовыми коэффициентами, определяющими вклад k -й формы колебаний в общую динамическую реакцию, а произведения $\sigma_k v_k$ сингулярных значений и правых сингулярных векторов аппроксимируют модальные амплитуды, которые определяют модальные координаты k -й собственной формы в каждый отдельный дискретный момент времени колебаний.

Левые сингулярные векторы не являются собственными векторами колебательной системы в том смысле, который обычно вкладывается в это понятие при решении проблемы собственных значений для системы уравнений движения. Сингулярное разложение позволяет «автоматически» получить априорный базис, основываясь на внешних проявлениях динамической реакции (перемещениях, скорости или ускорении точек конструкции), в то время как собственные векторы являются базисом апостериорным, основанным на исследовании внутренних инерционных, жесткостных и демпфирующих свойств колебательной системы.

Численные эксперименты, проведенные с моделью консольного стержня, рассмотренной в работе,

показали, что отличие соответствующих левых сингулярных и собственных векторов уменьшается при увеличении числа степеней свободы n . Бездоказательно можно предположить, что в предельном случае $n \Rightarrow \infty$ будет достигнуто строгое равенство между ними. Такой вывод кажется естественным и вполне правдоподобным, так как в предельном случае априорный базис формируется на основе максимально достоверной информации о геометрии перемещений.

Определенным недостатком сингулярного разложения служит тот факт, что порядок расположения столбцов U_k в матрице левых сингулярных векторов определяется вкладом k -й формы колебаний в суммарное перемещение (величиной сингулярного значения σ_k), а не величиной соответствующей частоты. Другими словами, порядковый номер левого сингулярного вектора в матрице может оказаться не равен порядковому номеру соответствующего собственного вектора. Однако эта проблема легко устраняется путем анализа частотного состава правых сингулярных векторов.

Результаты сингулярного разложения синтезированной динамической реакции оказались весьма устойчивыми к воздействию помех и обеспечили качественную аппроксимацию перемещений при сравнительно небольшом числе степеней свободы. Такие свойства позволяют рассматривать сингулярное разложение в качестве основы для разработки полностью автоматической стационарной системы мониторинга динамических параметров зданий и сооружений.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ghalishooyan M., Shooshtari A. Operational modal analysis techniques and their theoretical and practical aspects: A comprehensive review and introduction // IOMAC'15. 6th International Operational Modal Analysis Conference. 2015.
2. Белостоцкий А.М., Акимов П.А., Кайтуков Т.Б. Математическое и компьютерное моделирование в основе мониторинга зданий и сооружений. М. : АСВ, 2018. 714 с.
3. Шахрамьян А.М., Колотовичев Ю.А. Опыт использования автоматизированных систем мониторинга деформационного состояния несущих конструкций на Олимпийских объектах Сочи-2014 // Вестник МГСУ. 2015. № 12. С. 92–105. DOI: 10.22227/1997-0935.2015.12.92-105
4. Колотовичев Ю.А., Шахрамьян А.М. Автоматизированный мониторинг деформации несущих конструкций «Екатеринбург Арены» // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. № 3. С. 314–330. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.3.314-330
5. Rainieri C., Magalhães F., Ubertini F. Automated operational modal analysis and its applications in structural health monitoring // Shock and Vibration. 2019. Vol. 2019. Pp. 1–3. DOI: 10.1155/2019/5497065

6. Grosel J., Sawicki W., Pakos W. Application of classical and operational modal analysis for examination of engineering structures // Procedia Engineering. 2014. Vol. 91. Pp. 136–141. DOI: 10.1016/j.pro-eng.2014.12.035
7. Chandravanshi M.L., Mukhopadhyay A.K. Analysis of variations in vibration behavior of vibratory feeder due to change in stiffness of helical springs using FEM and EMA methods // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2017. Vol. 39. Issue 9. Pp. 3343–3362. DOI: 10.1007/s40430-017-0767-z
8. Jambova S.R., Kalsule D.J., Athavale S.M. Validation of FE models using experimental modal analysis // SAE Technical Paper Series. 2001. DOI: 10.4271/2001-26-0042
9. Friswell M.I., Mottershead J.E. Finite element model updating in structural dynamics. Springer Dordrecht, 2010. 292 p.
10. Nicoletti V., Martini R., Carbonari S., Gara F. Operational modal analysis as a support for the development of digital twin models of bridges // Infrastructures. 2023. Vol. 8. Issue 2. P. 24. DOI: 10.3390/infrastructures8020024

11. Белостоцкий А.М., Дмитриев Д.С., Петряшев С.О., Нагибович Т.Е. Расчетная оценка влияния геометрических отклонений от проекта на параметры механической безопасности многоярусных промышленных металлоконструкций (этажерок) в рамках научно-технического сопровождения строительства // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17. № 1. С. 19–29. DOI: 10.22363/1815-5235-2021-17-1-19-29. EDN AEOWML.

12. Brownjohn J.M.W., Magalhaes F., Caetano E., Cunha A. Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the humber bridge // Engineering Structures. 2010. Vol. 32. Issue 8. Pp. 2003–2018. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.02.034

13. Devriendt C., Magalhães F., El Kafafy M., De Sitter G., Cunha A., Guillaume P. Long-term dynamic monitoring of an offshore wind turbine // Topics in Dynamics of Civil Structures. 2013. Pp. 253–267. DOI: 10.1007/978-1-4614-6555-3_28

14. Bin Zahid F., Chao Ong Z., Yee Khoo S. A review of operational modal analysis techniques for in-service modal identification // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2020. Vol. 42. Issue 8. DOI: 10.1007/s40430-020-02470-8

15. Kim B.H., Stubbs N., Park T. A new method to extract modal parameters using output-only responses // Journal of Sound and Vibration. 2005. Vol. 282. Issue 1–2. Pp. 215–230. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.02.026

16. Zhang L., Wang T., Tamura Y. A frequency–spatial domain decomposition (FSDD) method for operational modal analysis // Mechanical Systems and Signal Processing. 2010. Vol. 24. Issue 5. Pp. 1227–1239. DOI: 10.1016/j.ymssp.2009.10.024

17. Brunton S.L., Kutz J.N. Data-driven science and engineering. machine learning, dynamical systems, and control. Cambridge University Press, 2019. Pp. 3–46.

18. Brincker R., Zhang L., Andersen P. Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition // Smart Materials and Structures. 2001. Vol. 10. Issue 3. Pp. 441–445. DOI: 10.1088/0964-1726/10/3/303

19. Brincker R., Andersen P., Jacobsen N.J. Automated frequency domain decomposition for operational modal analysis // IMAC-XXIV: A Conference and Exposition on Structural Dynamics Society for Experimental Mechanics. 2007.

20. Magalhães F., Caetano E., Cunha A. Operational modal analysis and finite element model correlation of the Braga Stadium suspended roof // Engineering Structures. 2008. Vol. 30. Issue 6. Pp. 1688–1698. DOI: 10.1016/j.engstruct.2007.11.010

21. Клаф Р., Пензиен Д. Динамика сооружений. М. : Стройиздат, 1979. 320 с.

22. Киселев В.А. Строительная механика: спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений. М. : Стройиздат, 1980. 616 с.

23. Колотовичев Ю.А., Каракозова А.И. Основы динамики сооружений : учеб.-метод. пособие. СПб. : Научные технологии, 2023. 206 с.

24. Сато Ю. Обработка сигналов. Первое знакомство. М. : Додека XXI, 2002. 175 с.

25. Wilson E.L. Static and dynamic analysis of structures: A physical approach with emphasis on earthquake engineering. Computers and Structures Inc., 2010. 394 p.

26. Welch P. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms // IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics. 1967. Vol. 15. Issue 2. Pp. 70–73. DOI: 10.1109/TAU.1967.1161901

Поступила в редакцию 15 мая 2023 г.

Принята в доработанном виде 20 мая 2023 г.

Одобрена для публикации 9 сентября 2023 г.

ОБ АВТОРЕ: **Юрий Александрович Колотовичев** — кандидат технических наук, доцент кафедры строительной и теоретической механики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; директор по научной работе; **СОДИС Лаб**; 121205, г. Москва, территория Инновационного центра «Сколково», ул. Нобеля, д. 5; РИНЦ ID: 829386, Scopus: 57209541589, ResearcherID: AAC-3892-2022, ORCID: 0000-0002-4030-2893; ykol@sodislab.com.

REFERENCES

1. Ghalishooyan M., Shooshtari A. Operational modal analysis techniques and their theoretical and practical aspects: A comprehensive review and introduction. *IOMAC'15. 6th International Operational Modal Analysis Conference*. 2015.

2. Belostotsky A.M., Akimov P.A., Kaytukov T.B. *Mathematical and computer modeling at the heart of monitoring of buildings and structures*. Moscow, Publishing House ASV, 2018; 714. (rus.).

3. Shakhraman'yan A.M., Kolotovichev Yu.A. Experience of using automated monitoring systems of the strain state of bearing structures on the olympic objects Sochi-2014. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2015; 12:92–105. DOI: 10.22227/1997-0935.2015.12.92-105 (rus.).

4. Kolotovichev Yu.A., Shakhramanyan A.M. An automated structural health monitoring system developed for Ekaterinburg Arena. *Vestnik MGSU* [Monthly

- Journal on Construction and Architecture]. 2022; 17(3):314-330. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.3.314-330 (rus.).
5. Rainieri C., Magalhães F., Ubertini F. Automated operational modal analysis and its applications in structural health monitoring. *Shock and Vibration*. 2019; 2019:1-3. DOI: 10.1155/2019/5497065
6. Grosel J., Sawicki W., Pakos W. Application of classical and operational modal analysis for examination of engineering structures. *Procedia Engineering*. 2014; 91:136-141. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.035
7. Chandravanshi M.L., Mukhopadhyay A.K. Analysis of variations in vibration behavior of vibratory feeder due to change in stiffness of helical springs using FEM and EMA methods. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2017; 39(9):3343-3362. DOI: 10.1007/s40430-017-0767-z
8. Jambovane S.R., Kalsule D.J., Athavale S.M. Validation of FE models using experimental modal analysis. *SAE Technical Paper Series*. 2001. DOI: 10.4271/2001-26-0042
9. Friswell M.I., Mottershead J.E. *Finite element model updating in structural dynamics*. Springer Dordrecht, 2010; 292.
10. Nicoletti V., Martini R., Carbonari S., Gara F. Operational modal analysis as a support for the development of digital twin models of bridges. *Infrastructures*. 2023; 8(2):24. DOI: 10.3390/infrastructures8020024
11. Belostotsky A.M., Dmitriev D.S., Petryashev S.O., Nagibovich T.E. Calculated assessment of the impact of geometric deviations from the design on the parameters of mechanical safety of building metal structures within the framework of scientific and technical support for construction. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2021; 17(1):19-29. DOI: 10.22363/1815-5235-2021-17-1-19-29. EDN AEOWML. (rus.).
12. Brownjohn J.M.W., Magalhães F., Caetano E., Cunha A. Ambient vibration re-testing and operational modal analysis of the Humber Bridge. *Engineering Structures*. 2010; 32(8):2003-2018. DOI: 10.1016/j.engstruct.2010.02.034
13. Devriendt C., Magalhães F., El Kafafy M., De Sitter G., Cunha Á., Guillaume P. Long-term dynamic monitoring of an offshore wind turbine. *Topics in Dynamics of Civil Structures*. 2013; 253-267. DOI: 10.1007/978-1-4614-6555-3_28
14. Bin Zahid F., Chao Ong Z., Yee Khoo S. A review of operational modal analysis techniques for in-service modal identification. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 2020; 42(8). DOI: 10.1007/s40430-020-02470-8
15. Kim B.H., Stubbs N., Park T. A new method to extract modal parameters using output-only responses. *Journal of Sound and Vibration*. 2005; 282(1-2): 215-230. DOI: 10.1016/j.jsv.2004.02.026
16. Zhang L., Wang T., Tamura Y. A frequency-spatial domain decomposition (FSDD) method for operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2010; 24(5):1227-1239. DOI: 10.1016/j.ymsp.2009.10.024
17. Brunton S.L., Kutz J.N. *Data-Driven Science and Engineering. Machine Learning, Dynamical Systems, and Control*. Cambridge University Press, 2019; 3-46.
18. Brincker R., Zhang L., Andersen P. Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. *Smart Materials and Structures*. 2001; 10(3):441-445. DOI: 10.1088/0964-1726/10/3/303
19. Brincker R., Andersen P., Jacobsen N.J. Automated frequency domain decomposition for operational modal analysis. *IMAC-XXIV: A Conference and Exposition on Structural Dynamics Society for Experimental Mechanics*. 2007.
20. Magalhães F., Caetano E., Cunha A. Operational modal analysis and finite element model correlation of the Braga Stadium suspended roof. *Engineering Structures*. 2008; 30(6):1688-1698. DOI: 10.1016/j.engstruct.2007.11.010
21. Clough R.W., Penzler J. *Dynamics of structures*. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979; 320. (rus.).
22. Kiselev V.A. *Structural mechanics: Special course. Structural dynamics and buckling*. Moscow, Stroyizdat Publ., 1980; 616. (rus.).
23. Kolotovichev Yu.A., Karakozova A.I. *Elementaries of Structural Dynamics : education materias*. St. Petersburg, Naukoyomkie tehnologii Publ., 2023; 206. (rus.).
24. Sato Y. *Signal Processing. Getting Started*. Moscow, Dodeka-XXI Publ., 2009; 175. (rus.).
25. Wilson E.L. *Static and Dynamic Analysis of Structures: A Physical Approach with Emphasis on Earthquake Engineering*. Computers and Structures Inc. Publ., 2010; 394.
26. Welch P. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*. 1967; 15(2):70-73. DOI: 10.1109/TAU.1967.1161901

Received May 15, 2023.

Adopted in revised form on May 20, 2023.

Approved for publication on September 9, 2023.

BIONOTES: Yury A. Kolotovichev — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; R&D Director; **SODIS Lab**; 5 Nobel st., Skolkovo Innovation center, Moscow, 121205, Russian Federation; ID RSCI: 829386, Scopus: 57209541589, ResearcherID: AAC-3892-2022, ORCID: 0000-0002-4030-2893; ykol@sodislab.com.