

Точные границы области применения приближенного решения для некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений в комплексной области

Виктор Николаевич Орлов, Магомедюсуф Владимирович Гасанов

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка с полиномиальной правой частью седьмой степени, описывающее волновые процессы в балках. При исследовании такого класса уравнений в общем случае неразрешимых в квадратурах авторы используют метод, позволяющий получить аналитическое приближенное решение. Данного рода исследования основаны на решении нескольких математических задач. Дано обобщение полученных ранее результатов исследования одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особенностями на комплексную область.

Методы и материалы. Рассматривается задача о нахождении точных границ применения приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения в окрестности подвижной особой точки. Ранее были определены границы области применения приближенного решения на основе теоремы существования и единственности, но далее полученная область была уменьшена за счет возмущения подвижной особой точки. Используя элементы дифференциального исчисления для оценки погрешности решения, в данной работе удается расширить область применения приближенного решения и приблизить к полученной первоначально области.

Результаты. Получены точные границы области применения приближенного решения. Теоретические положения подтверждены численными расчетами, что характеризует их достоверность. Рассматривается два численных эксперимента. В первом взята точка, попадающая под предыдущую и новую, полученную в данной статье, область. Во втором — точка, попадающая лишь под действие новой теоремы.

Выводы. Авторский подход метода аналитического приближенного решения находит дальнейшее развитие на примере рассматриваемого класса нелинейных уравнений. Обобщаются результаты, полученные ранее при исследовании точных границ применения приближенного решения рассматриваемого класса уравнений в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Представленные исследования подтверждены с помощью численных экспериментов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: аспект нелинейности, возмущение подвижной особой точки, точные границы, априорная оценка, задача Коши

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Орлов В.Н., Гасанов М.В. Точные границы области применения приближенного решения для некоторого класса нелинейных дифференциальных уравнений в комплексной области // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. Вып. 12. С. 1892–1900. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1892-1900

Автор, ответственный за переписку: Виктор Николаевич Орлов, Orlovvn@mgsu.ru.

Exact boundaries of the scope of the approximate solution for a certain class of nonlinear differential equations in the complex domain

Victor N. Orlov, Magomedysuf V. Gasanov

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. A nonlinear differential equation of the third order with a polynomial right part of the seventh degree describing wave processes in beams is considered. When studying this class of equations, generally unsolvable in quadrature, the authors use a method allowing to obtain an analytical approximate solution. This kind of research is based on the solution of several mathematical problems. The paper generalizes previously obtained results of the study of one class of nonlinear differential equations with moving singularities to the complex domain.

Materials and methods. The problem of finding the exact limits of application of the approximate solution of a nonlinear differential equation in the neighborhood of a moving singular point is considered. Previously, the boundaries of the application area of the approximate solution were determined on the basis of the theorem of unique existence, but further, the obtained

area was reduced due to the perturbation of the moving singular point. Applying elements of differential calculus to estimate the error of the solution, in this work, it is possible to expand the scope of the approximate solution and bring it closer to the initially obtained area.

Results. The exact boundaries of the area of application of the approximate solution are obtained. Theoretical provisions are confirmed by numerical calculations, which characterizes their reliability. Two numerical experiments are considered. In the first one, a point falling under the previous and new area obtained in this paper is taken. In the second, the point falling only under the new theorem is taken.

Conclusions. The author's approach of the method of analytical approximate solution is further developed on the example of the considered class of nonlinear equations. The paper summarizes the results obtained earlier in the research of the exact limits of application of the approximate solution of the considered class of equations in the vicinity of a moving singular point in the complex domain. The presented studies are confirmed by numerical experiments.

KEYWORDS: nonlinearity aspect, perturbation of a moving singular point, exact boundaries, a priori estimation, Cauchy problem

FOR CITATION: Orlov V.N., Gasanov M.V. Exact boundaries of the scope of the approximate solution for a certain class of nonlinear differential equations in the complex domain. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2023; 18(12):1892-1900. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1892-1900 (rus.).

Corresponding author: Victor N. Orlov, Orlovvn@mgsu.ru.

ВВЕДЕНИЕ

В решении многих технических задач исследователи приходят к различным дифференциальным уравнениям, как линейным, так и нелинейным. В случае линейных уравнений проблем не возникает, в случае нелинейных дифференциальных уравнений приходится учитывать некоторые аспекты этого класса уравнений, а именно наличие подвижных особых точек, что является достаточным условием невозможности в общем случае разрешить в квадратурах эти уравнения. Отметим, что все известные на данный момент классические, аналитические и численные методы непригодны для решения такого типа уравнений. Эта ситуация актуализирует развитие исследований методов решения подобных классов уравнений. Такие уравнения возникают, к примеру, при исследовании волновых процессов в эластичных балках или стержнях [1, 2], при наблюдении разрывных усилий в строительных конструкциях [3], в теплотехнике [4–6], при изучении модификационных уравнений Шредингера [7, 8]. Известны публикации разрешимости такого рода уравнений в частных случаях [9–15], развитие авторского метода в работах [16–18] и асимптотического подхода [19–22], а также метода линеаризации уравнения для нахождения различных параметров [23–26]. Следует отметить, что асимптотический подход не позволяет получить результаты, представленные в данном исследовании. В настоящей работе продолжается исследование рассматриваемого класса уравнений, представленных в работах [27–29], где на первом этапе решена задача существования и единственности решения рассматриваемого уравнения для окрестности подвижной особой точки. Затем получено аналитическое приближенное решение, доказаны априорные оценки погрешности. Далее получены результаты влияния возмущения подвижной особой точки на аналитическое приближенное решение. В ходе этих исследований наблюдается значительное уменьшение области, где возможно проведение расчетов для аналитиче-

ского приближенного решения. Применив элементы дифференциального исчисления при оценке погрешности, удастся значительно расширить эту область. В данном исследовании проводится обобщение результатов работы [29] о точных границах области применения приближенного решения некоторого класса уравнений в окрестности подвижной особой точки на комплексную область. Полученные теоретические положения подтверждены численными экспериментами.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для классической задачи Коши:

$$y'''(z) = y'(z) + r(z); \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(z_0) = y_0 \\ y'(z_0) = y_1 \\ y''(z_0) = y_2, \end{cases} \quad (2)$$

в работе [27] построено аналитическое приближенное решение для окрестности подвижной особой точки в форме:

$$y(z) = (z^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z^* - z)^{\frac{n}{2}}. \quad (3)$$

Так как существующие на данный момент методы позволяют рассчитывать значение подвижной особой точки приближенно, то вместо выражения (3) получаем новую структуру решения:

$$\tilde{y}_N(z) = (\tilde{z}^* - z)^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{n=0}^N \tilde{C}_n (\tilde{z}^* - z)^{\frac{n}{2}}, \quad (4)$$

где $\tilde{C}_n$ — возмущенные значения коэффициентов.

При оценке погрешности решения формулы (4) в работе [28] отмечаем сужение области для решения (4) по сравнению с теоремой существования в труде [27]. Применяя элемент дифференциального исчисления при оценке погрешности решения (4), удастся значительно приблизиться к области в работе [27], но для приближенного решения выражения (4).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Теорема

Потребуется выполнение следующих условий:

- 1) $r(z) \in C^1$ в области $|\tilde{z}^* - z| < \rho_1$, где $0 < \rho_1 = \text{const}$;
- 2) $\exists M_n : \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \leq M_n, M_n = \text{const}$;
- 3) $|\tilde{z}^*| \leq |z^*|$;
- 4) выполняется следующая оценка для $|\tilde{z}^* - z^*| \leq \Delta \tilde{z}^*$;
- 5) $\Delta \tilde{z}^* < \frac{1}{(M+1)^4}$.

В этом случае приближенное решение формулы (4) задачи (1), (2) имеет следующую оценку погрешности:

$$\Delta \tilde{y}_N \leq \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

в области:

$$F = F_1 \cap F_2 \cap F_3,$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\leq \frac{\sqrt[6]{15}}{2\sqrt[6]{8}} \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}_1^* - z|^{\frac{3}{2}}}; \\ \Delta_1 &\leq \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1 - (M+1)^6 |\tilde{z}^* - z|^{\frac{3}{2}}} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \right. \\ &\left. + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

в случае $N+1 = 3k$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{8M(M+1)^{2N}}{1 - (M+1)^6 |\tilde{z}^* - z|^{\frac{3}{2}}} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \right. \\ &\left. + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

для варианта $N+1 = 3k+1$, и:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1 - (M+1)^6 |\tilde{z}^* - z|^{\frac{3}{2}}} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \right. \\ &\left. + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{(N+2)N(N-2)} \right); \end{aligned}$$

при $N+1 = 3k+2$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &\leq \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3}{2}}}{1 - 2^3 (M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} \times \\ &\times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| + \right. \\ &\left. + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^2 \right) \times \\ &\times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3}{2}} \right); \\ \Delta_3 &\leq \frac{4\Delta \tilde{x}^* M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3}{2}}}{\left(1 - (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{3}{2}} \right)^2} \times \\ &\times \left(3 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| \left(7|\tilde{z}_2^* - z| + 5 \right) - \right. \\ &\left. - 2(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{5}{2}} \left(2|\tilde{z}_2^* - z| + 1 \right) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \min \left\{ \rho_1, \frac{1}{(M+1)^4}, \frac{1}{(M+\Delta M+1)^4} \right\}; \\ M &= \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \right\}, |y_0|, |y_1|, |y_2| \right\}; \\ \Delta M &= \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \right\}, |y_0|, |y_1|, |y_2| \right\} \cdot \Delta \tilde{z}^*; \\ n &= 0, 1, 2, \dots; \\ F_1 &= \left\{ z : |z| < |\tilde{z}_1^*| \right\}, F_2 = \left\{ z : |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{(M+1)^4} \right\}, \\ F_3 &= \left\{ z : |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{(M+\Delta M+1)^4} \right\}, \\ |\tilde{z}_1^*| &= |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^*, |\tilde{z}_2^*| = |\tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*. \end{aligned}$$

Доказательство

Основываясь на классическом подходе, имеем:

$$\Delta \tilde{y}_N(z) = |y(z) - \tilde{y}_N(z)| \leq |y(z) - \tilde{y}(z)| + |\tilde{y}(z) - \tilde{y}_N(z)|.$$

Оценим выражение $|y(z) - \tilde{y}(z)|$, используя методы дифференциального исчисления [30]:

$$|y(z) - \tilde{y}(z)| \leq \sup_U \left| \frac{\partial \tilde{y}(z)}{\partial \tilde{z}^*} \right| \Delta \tilde{z}^* + \sum_0^\infty \sup_U \left| \frac{\partial \tilde{y}(z)}{\partial \tilde{C}_n} \right| \Delta \tilde{C}_n,$$

где $U = \{z : |\tilde{z}^* - z| < \Delta \tilde{z}^*\}$.

Далее анализируем выражение:

$$\begin{aligned} \sup_U \left| \frac{\partial \tilde{y}(z)}{\partial \tilde{z}^*} \right| &= \sup_U \left| \sum_0^\infty \tilde{C}_n \frac{n-1}{2} (\tilde{z}^* - z)^{\frac{n-3}{2}} \right| \leq \\ &\leq \sum_0^\infty \sup_U |\tilde{C}_n| \frac{n-1}{2} \sup_U |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-3}{2}}. \end{aligned}$$

Учитывая разложение функции $r(z)$ в регулярный ряд, по условию теоремы, $r(z) = \sum_{n=0}^\infty A_n (\tilde{z}^* - z)^n$,

можем записать в общем случае $\tilde{C}_n$ в виде $\tilde{C}_n = \tilde{C}_n(A_0, A_1, \dots, A_m)$. Напоминаем оценки для $\tilde{C}_n$ [27]:

$$|\tilde{C}_{3n}| \leq \frac{8M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{(3n-1)(3n-3)(3n-5)};$$

$$|\tilde{C}_{3n+1}| \leq \frac{8M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{3n(3n-2)(3n-4)};$$

$$|\tilde{C}_{3n+2}| \leq \frac{8M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{(3n+1)(3n-1)(3n-3)}.$$

А также оценки для $\Delta\tilde{C}_n$ [28]:

$$|\Delta\tilde{C}_{3n}| \leq \frac{8\Delta M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{(3n-1)(3n-3)(3n-5)};$$

$$|\Delta\tilde{C}_{3n+1}| \leq \frac{8\Delta M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{3n(3n-2)(3n-4)};$$

$$|\Delta\tilde{C}_{3n+2}| \leq \frac{8\Delta M(M + \Delta M + 1)^{6n}}{(3n+1)(3n-1)(3n-3)}.$$

Теперь оценим выражение $\sup_U |\tilde{C}_n|$ с учетом рекуррентных соотношений, данных в работе [27], и, выполняя ряд преобразований, получим:

$$\begin{aligned} \sup_U |\tilde{C}_n| &\leq \tilde{C}_n(|A_0 + \Delta A_0|, |A_1 + \Delta A_1|, \dots, |A_m + \Delta A_m|) \leq \\ &\leq \frac{8M(M + \Delta M + 1)^{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil}}{(n-1)(n-3)(n-5)} = T_n, \end{aligned}$$

где

$$\Delta M = \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \right\}, |y_0|, |y_1|, |y_2| \right\} \cdot \Delta \tilde{z}^*;$$

$$n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$M = \max \left\{ \sup_n \left\{ \frac{|r^{(n)}(\tilde{z}^*)|}{n!} \right\}, |y_0|, |y_1|, |y_2| \right\}.$$

С учетом того, что

$$\sup_U |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-3}{2}} \leq \begin{cases} |\tilde{z}_1^* - z|^{\frac{n-3}{2}}, & n = 0, 1, 2 \\ |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-3}{2}}, & n > 2 \end{cases}$$

$$(\text{где } |\tilde{z}_1^*| = |\tilde{z}^*| - \Delta \tilde{z}^*, |\tilde{z}_2^*| = |\tilde{z}^*| + \Delta \tilde{z}^*);$$

$$\text{и } \sup_U \left| \frac{\partial \tilde{y}(z)}{\partial \tilde{C}_n} \right| = \sup_U |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-1}{2}} \leq \begin{cases} |\tilde{z}_1^* - z|^{\frac{n-1}{2}}, & n = 0 \\ |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}}, & n > 0, \end{cases}$$

а также

$$C_0 = \tilde{C}_0 = \pm \sqrt[6]{\frac{15}{8}};$$

$$C_1 = C_2 = \dots = C_6 = \tilde{C}_1 = \dots = \tilde{C}_6 = 0,$$

получим следующую оценку для $|y(z) - \tilde{y}(z)|$:

$$\begin{aligned} |y(z) - \tilde{y}(z)| &\leq \sum_0^\infty \sup_U |\tilde{C}_n| \left| \frac{n-1}{2} \right| \sup_U |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-3}{2}} + \\ &+ \sum_7^\infty \Delta \tilde{C}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} \leq \frac{\sqrt[6]{15}}{2\sqrt[6]{8}} \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}} + \\ &+ \Delta \tilde{z}^* \sum_7^\infty \frac{n-1}{2} T_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-3}{2}} + \sum_7^\infty \Delta \tilde{C}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} |y(z) - \tilde{y}_N(z)| &\leq \frac{\sqrt[6]{15}}{2\sqrt[6]{8}} \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}} + \\ &+ \sum_{n=N+1}^\infty |\tilde{C}_n| |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-1}{2}} + \sum_7^\infty \Delta \tilde{C}_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} + \\ &+ \Delta \tilde{z}^* \sum_7^\infty \frac{n-1}{2} T_n |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-3}{2}} = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$\Delta_0 \leq \frac{\sqrt[6]{15}}{2\sqrt[6]{8}} \frac{\Delta \tilde{z}^*}{|\tilde{z}_1^* - z|^{3/2}}.$$

Для оценки Δ_1 воспользуемся теоремой второй работы [27]:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{8M(M+1)^{2(N+1)}}{1 - (M+1)^6} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \right. \\ &\left. + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

в случае $N+1 = 3k$,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{8M(M+1)^{2N}}{1 - (M+1)^6} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \right. \\ &\left. + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

для варианта $N+1 = 3k+1$, и

$$\begin{aligned} \Delta_1 &\leq \frac{8M(M+1)^{2(N-1)}}{1 - (M+1)^6} |\tilde{z}^* - z|^{\frac{N}{2}} \times \\ &\times \left(\frac{1}{N(N-2)(N-4)} + \frac{|\tilde{z}^* - z|^{\frac{1}{2}}}{(N+1)(N-1)(N-3)} + \right. \\ &\left. + \frac{|\tilde{z}^* - z|}{(N+2)N(N-2)} \right) \end{aligned}$$

при $N+1 = 3k+2$.

Данные оценки справедливы в области

$$F_2 = \left\{ z : |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{(M+1)^4} \right\}.$$

Далее переходим к оценкам для Δ_2 :

$$\Delta_2 \leq \sum_7^\infty |\Delta \tilde{C}_n| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} = \sum_4^\infty |\Delta \tilde{C}_{2n}| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{2n-1}{2}} + \\ + \sum_4^\infty |\Delta \tilde{C}_{2n-1}| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} = \Delta_{21} + \Delta_{22}.$$

Рассмотрим случай дробных степеней с учетом закономерности оценок для $\tilde{\Delta C}_n$ и полученных оце-

нок $\sup_U |\tilde{z}^* - z|^{\frac{n-1}{2}}$:

$$\Delta_{21} = \sum_4^\infty |\Delta \tilde{C}_{2n}| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{2n-1}{2}} \leq \sum_1^\infty |\Delta \tilde{C}_{6n-2}| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{6n-3}{2}} + \\ + \sum_1^\infty |\Delta \tilde{C}_{6n}| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{6n-1}{2}} + \sum_1^\infty |\Delta \tilde{C}_{6n+2}| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{6n+1}{2}} \leq \\ \leq \sum_1^\infty \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12n-6}}{(6n-3)(6n-5)(6n-7)} |\tilde{z}_2^* - z|^{3n-3/2} + \\ + \sum_1^\infty \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12n}}{(6n-1)(6n-3)(6n-5)} |\tilde{z}_2^* - z|^{3n-1/2} + \\ + \sum_1^\infty \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12n-6}}{(6n+1)(6n-1)(6n-3)} |\tilde{z}_2^* - z|^{3n+1/2} \leq \\ \leq \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{1-(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} + \\ + \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^{5/2}}{1-(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} + \\ + \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{7/2}}{1-(M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} = \\ = \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{1-(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} \times \\ \times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| + \right. \\ \left. + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^2 \right).$$

Аналогичная ситуация и для случая целых степеней Δ_{22} :

$$\Delta_{22} \leq \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3}{1-(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} \times \\ \times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| + \right. \\ \left. + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^2 \right).$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для оценки Δ_2 :

$$\Delta_2 \leq \frac{8\Delta M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{1-2^3(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} \times \\ \times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| + \right. \\ \left. + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^2 \right) \times \\ \times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2} \right).$$

Данная оценка Δ_2 справедлива в области

$$F_2 = \left\{ z : |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{(M+1)^4} \right\}.$$

Осталось показать справедливость оценки Δ_3 :

$$\Delta_3 \leq \Delta \tilde{z}^* \left(\sum_7^\infty |\tilde{C}_n| |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}} \right)' = \\ = \Delta \tilde{z}^* \left(\sum_7^\infty \frac{8M(M+\Delta M+1)^{6[\frac{n}{3}]} |\tilde{z}_2^* - z|^{\frac{n-1}{2}}}{(n-1)(n-3)(n-5)} \right)' \leq \\ \leq \Delta \tilde{z}^* \left(\frac{8M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{1-(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^3} \times \right. \\ \times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| + \right. \\ \left. + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^2 \right) \times \\ \left. \times \left(1 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2} \right) \right)' = \\ = \frac{4\Delta \tilde{z}^* \Delta M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{\left(1-(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2} \right)^2} \times \\ \times \left(3 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| (7|\tilde{z}_2^* - z| + 5) - \right. \\ \left. - 2(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^{5/2} (2|\tilde{z}_2^* - z| + 1) \right).$$

После преобразований получаем оценку для Δ_3 :

$$\Delta_3 \leq \frac{4\Delta \tilde{z}^* M(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2}}{\left(1-(M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z|^{3/2} \right)^2} \times \\ \times \left(3 + (M+\Delta M+1)^6 |\tilde{z}_2^* - z| (7|\tilde{z}_2^* - z| + 5) - \right. \\ \left. - 2(M+\Delta M+1)^{12} |\tilde{z}_2^* - z|^{5/2} (2|\tilde{z}_2^* - z| + 1) \right).$$

Оценка Δ_3 работает в области

$$F_3 = \left\{ z : |\tilde{z}_2^* - z| < \frac{1}{(M+\Delta M+1)^4} \right\}.$$

Окончательно получаем область

$$F = F_1 \cap F_2 \cap F_3.$$

Численный эксперимент

Пример 1. Проведем расчеты задачи Коши (1), (2) с условиями:

$$\begin{aligned} r(z) &= z^5; \quad y(0) = 0,2 + 0,5i; \\ y'(0) &= -0,3 - 0,7i; \quad y''(0) = 0,95i; \\ \tilde{z}^* &= 5,8563; \quad \Delta \tilde{z} = 0,0005. \end{aligned}$$

Рассматриваемая задача (1), (2) при данных условиях неразрешима в квадратурах. Применяя полученные результаты, рассчитаем приближенное решение (4) при $N = 9$ для значения аргумента $\tilde{z}_1$ с учетом области $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$, для которой теорема [28] является применимой — $\rho = 0,015625$ (принятое обозначение в работе [28]). Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши (1), (2) с условиями:

$$\begin{aligned} r(z) &= z^5; \quad y(0) = 0,2 + 0,5i; \\ y'(0) &= -0,3 - 0,7i; \quad y''(0) = 0,95i; \\ \tilde{z}^* &= 5,8563; \quad \Delta \tilde{z} = 0,0005. \end{aligned}$$

Рассматриваем значение x_2 , удовлетворяющее условию настоящей теоремы, находящееся в области $F = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ — $\rho_2 = 0,06249$, $z_2 = 5,78$, но при этом не подпадающее под результаты теоремы работы [28]. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Табл. 1. Характеристики приближенного решения

Table 1. Characteristics of the approximate solution

z_1	$\tilde{y}_9(z_1)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
5,841	$1,5081 \cdot 10^7 - 1,3799 \cdot 10^6$	0,04	0,07	0,0005

Примечание: $\tilde{y}_9(z_1)$ — аналитическое приближенное решение (4); Δ_1 — оценка погрешности, полученная согласно работе [28]; Δ_2 — оценка погрешности согласно данной работе; Δ_3 — апостериорная оценка для решения (4). В случае $\Delta_3 = 0,0005$ доказанная теорема требует $N = 14$. Слагаемые с 10 по 14 в общей сумме не влияют на точность полученного результата — $\varepsilon = 0,0005$, это означает, что при $N = 9$ получаем значение $\tilde{y}_9(z_1)$ с точностью $\varepsilon = 0,0005$. Следует отметить, что априорные оценки данной работы и работы [28] имеют одинаковый порядок.

Note: $\tilde{y}_9(z_1)$ — analytical approximate solution (4); Δ_1 — error estimate obtained according to [28]; Δ_2 — error estimate

according to this paper; Δ_3 — posteriori estimate for the solution (4). In the case of $\Delta_3 = 0,0005$ the proved theorem requires $N = 14$. The summands 10 to 14 in the total sum do not affect the accuracy of the obtained result — $\varepsilon = 0,0005$ this means that when $N = 9$ we obtain a value $\tilde{y}_9(z_1)$ with accuracy $\varepsilon = 0,0005$. It should be noted that the priori estimates of this paper and the paper [28] are of the same order.

Табл. 2. Характеристики приближенного решения

Table 2. Characteristics of the approximate solution

z_2	$\tilde{y}_9(z_2)$	Δ'_1	Δ'_2
5,78	$378\,980,6054 + 532\,683,1167i$	0,02	0,0009

Примечание: $\tilde{y}_9(z_2)$ — приближенное решение (4); Δ'_1 — погрешность, согласно настоящей работе; Δ'_2 — апостериорная погрешность решения (4). Для варианта $\Delta'_2 = 0,0009$ по доказанной в работе теореме следует $N = 13$. Слагаемые с 10 по 13 не влияют на точность проведенных расчетов — $\varepsilon = 0,0009$. Это означает, что при $N = 9$ полученное значение $\tilde{y}_9(z_2)$ имеет точность $\varepsilon = 0,0009$.

Note: $\tilde{y}_9(z_2)$ — approximate solution (4); Δ'_1 — error, according to this paper; Δ'_2 — posteriori error of the solution (4). For the variant $\Delta'_2 = 0,0009$, according to the theorem proved in this paper, it follows that $N = 13$. The summands 10 to 13 do not affect the accuracy of the calculations — $\varepsilon = 0,0009$. This means that when $N = 9$ the obtained value has an accuracy of $\varepsilon = 0,0009$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Авторский подход метода аналитического приближенного решения находит дальнейшее развитие на примере рассматриваемого класса нелинейных уравнений. В исследовании полученные результаты основывались на элементах дифференциального исчисления, которые позволили улучшить предыдущие результаты. В статье обобщаются результаты, полученные ранее при исследовании точных границ применения приближенного решения, рассматриваемого класса уравнений в окрестности подвижной особой точки в комплексной области. Представленные исследования подтверждены с помощью численных экспериментов, с одной стороны, подтверждающих полученные теоретические результаты; с другой стороны, хорошо согласующиеся с результатами предыдущей публикации в общей области.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation // Computers and Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56. Issue 1. Pp. 2507–2514. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.05.021
2. Чугайнова А.П. Нестационарные решения обобщенного уравнения Кортевега–де Фри-

- за–Бюргерса // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 215. DOI: 10.1134/S0371968513020179. EDN QZXEUL.

3. Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models // Journal of Physics: Conference Series. 2019.

Vol. 1425. Issue 1. P. 012107. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012107

4. Jamshed W., Uma Devi S.S., Goodarzi M., Prakash M., Sooppy Nisar K., Zakarya M. et al. Evaluating the unsteady Casson nanofluid over a stretching sheet with solar thermal radiation: An optimal case study // *Case Studies in Thermal Engineering*. 2021. Vol. 26. P. 101160. DOI: 10.1016/j.csite.2021.101160

5. Dwivedi P., Sudhakar K., Soni A., Solomin E., Kirpichnikova I. Advanced cooling techniques of P.V. modules: A state of art // *Case Studies in Thermal Engineering*. 2020. Vol. 21. P. 100674. DOI: 10.1016/j.csite.2020.100674

6. Li P., Zhao W. Image fire detection algorithms based on convolutional neural networks // *Case Studies in Thermal Engineering*. 2020. Vol. 19. P. 100625. DOI: 10.1016/j.csite.2020.100625

7. Kudryashov N.A. Optical solitons of the Schrödinger–Hirota equation of the fourth order // *Optik*. 2023. Vol. 274. P. 170587. DOI: 10.1016/j.ijleo.2023.170587

8. Kudryashov N.A. Dispersive optical solitons of the generalized Schrödinger–Hirota model // *Optik*. 2023. Vol. 272. P. 170365. DOI: 10.1016/j.ijleo.2022.170365

9. Carillo S., Chichurin A., Filipuk G., Zullo F. Schwarzian derivative, Painlevé XXV–Ermakov equation, and Bäcklund transformations // *Mathematische Nachrichten*. 2023. DOI: 10.1002/mana.202200180

10. Вересович П.П., Яблонский А.И. О подвижных особых точках систем дифференциальных уравнений третьего порядка // *Дифференциальные уравнения*. 1977. Т. 13. № 11. С. 1932–1939.

11. Писаренко В.П., Яблонский А.И. Дифференциальное уравнение, имеющее решения с алгебраическими подвижными особыми точками // *Дифференциальные уравнения*. 1976. Т. 12. № 5. С. 928–930.

12. Соболевский С.Л. Подвижные особые точки полиномиальных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения*. 2004. Т. 40. № 6. С. 756–762. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e

13. Соболевский С.Л. Подвижные особые точки алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений // *Дифференциальные уравнения*. 2005. Т. 41. № 8. С. 1092–1099. DOI: 10.1007/s10625-005-0260-9

14. Filipuk G., Kecker T. On singularities of certain non-linear second-order ordinary differential equations // *Results in Mathematics*. 2022. Vol. 77. Issue 1. DOI: 10.1007/s00025-021-01577-1

15. Filipuk G., Halburd R.G. Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations // *Journal of Mathematical Physics*. 2009. Vol. 50. Issue 2. DOI: 10.1063/1.3068414

16. Леонтьева Т.Ю. Об одном обобщении точных критериев существования подвижных особых точек одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной об-

ласти // *Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика*. 2017. № 13 (262). С. 51–57. EDN ZCJDNR.

17. Пчелова А.З. Границы области применения приближенного решения в окрестности возмущенной подвижной особой точки одного дифференциального уравнения в комплексной области // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*. 2014. № 4. С. 170–179. EDN SXXCML.

18. Орлов В.Н., Ив Б.Б. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка с полиномиальной правой частью второй степени в окрестности подвижной особой точки // *Вестник Башкирского университета*. 2018. Т. 23. № 4. С. 980–986. EDN YUXNSH.

19. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity // *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2016. Pp. 191–203. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7_18

20. Astashova I., Bartušek M., Došlá Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations // *Advances in Nonlinear Analysis*. 2022. Vol. 11. Issue 1. Pp. 1598–1613. DOI: 10.1515/anona-2022-0254

21. Kruskal M.D., Joshi N., Halburd R. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painlevé property // *Integrability of Nonlinear Systems*. 2007. Pp. 171–205. DOI: 10.1007/BFb0113696

22. Řehák P. On asymptotic relationships between two higher order dynamic equations on time scale // *Applied Mathematics Letters*. 2017. Vol. 73. Pp. 84–90. DOI: 10.1016/j.aml.2017.02.013

23. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Time-varying linearization and the perron effects // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007. Vol. 17. Issue 4. Pp. 1079–1107. DOI: 10.1142/S0218127407017732

24. Hartman P. On the local linearization of differential equations // *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1963. Vol. 14. Issue 4. Pp. 568–573. DOI: 10.1090/s0002-9939-1963-0152718-3

25. Ramos J.I. Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations // *Applied Mathematics and Computation*. 2005. Vol. 161. Issue 2. Pp. 525–542. DOI: 10.1016/j.amc.2003.12.047

26. Jimenez J.C., Shoji I., Ozaki T. Simulation of stochastic differential equations through the local linearization method. A comparative study // *Journal of Statistical Physics*. 1999. Vol. 94. Pp. 587–602. DOI: 10.1023/A:1004504506041

27. Орлов В.Н., Гасанов М.В. Теорема существования решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений третьего порядка

с полиномиальной правой частью седьмой степени в окрестности подвижной особой точки // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 1 (43). С. 92–100. DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.011. EDN LDNWP.

28. Orlov V.N., Gasanov M.V. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021.

Vol. 1030. Issue 1. P. 012081. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012081

29. Orlov V.N., Gasanov M.V. Analytic approximate solution in the neighborhood of a moving singular point of a class of nonlinear equations // Axioms. 2022. Vol. 11. Issue 11. P. 637. DOI: 10.3390/axioms11110637

30. Бахвалов Н.С. Численные методы. М. : Наука, 1970. 632 с.

Поступила в редакцию 12 августа 2023 г.

Принята в доработанном виде 10 октября 2023 г.

Одобрена для публикации 13 октября 2023 г.

О Б А В Т О Р А Х : **Виктор Николаевич Орлов** — доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; РИНЦ ID: 711175, Scopus: 57202806960, ResearcherID: ABF-7635-2020, ORCID: 0000-0001-7606-5490; Orlovvn@mgsu.ru;

Магомедюсуп Владимирович Гасанов — преподаватель кафедры высшей математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; SPIN-код: 5571-4447, Scopus: 57222119930, ResearcherID: AFZ-3342-2022, ORCID: 0000-0003-4669-4506; GasanovMV@mgsu.ru.

Вклад авторов:

Орлов В.Н. — научное руководство, концепция исследования, развитие методологии, итоговые выводы.

Гасанов М.В. — сбор материала, обработка материала, написание статьи.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Feng Y. Existence and uniqueness results for a third-order implicit differential equation. *Computers and Mathematics with Applications*. 2008; 56(1):2507-2514. DOI: 10.1016/j.camwa.2008.05.021

2. Chugainova A.P. Nonstationary solutions of the generalized Korteweg-de Vries-Burgers equation. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni V.A. Steklova*. 2013; 281:215. DOI: 10.1134/S0371968513020179. EDN QZXEUL. (rus.).

3. Chichurin A., Filipuk G. The properties of certain linear and nonlinear differential equations of the fourth order arising in beam models. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019; 1425(1):012107. DOI: 10.1088/1742-6596/1425/1/012107

4. Jamshed W., Uma Devi S.S., Goodarzi M., Prakash M., Sooppy Nisar K., Zakarya M. et al. Evaluating the unsteady Casson nanofluid over a stretching sheet with solar thermal radiation: An optimal case study. *Case Studies in Thermal Engineering*. 2021; 26:101160. ISSN 2214-157X, DOI: 10.1016/j.csite.2021.101160

5. Dwivedi P., Sudhakar K., Soni A., Solomin E., Kirpichnikova I. Advanced cooling techniques of P.V. modules: A state of art. *Case Studies in Thermal Engineering*. 2020; 21:100674. DOI: 10.1016/j.csite.2020.100674

6. Li P., Zhao W. Image fire detection algorithms based on convolutional neural networks. *Case Studies in Thermal Engineering*. 2020; 19:100625. DOI: 10.1016/j.csite.2020.100625

7. Kudryashov N.A. Optical solitons of the Schrödinger–Hirota equation of the fourth order. *Optik*. 2023; 274:170587. DOI: 10.1016/j.ijleo.2023.170587

8. Kudryashov N.A. Dispersive optical solitons of the generalized Schrödinger–Hirota model. *Optik*. 2023; 272:170365. DOI: 10.1016/j.ijleo.2022.170365

9. Carillo S., Chichurin A., Filipuk G., Zullo F. Schwarzian derivative, Painlevé XXV–Ermakov equation, and Bäcklund transformations. *Mathematische Nachrichten*. 2023. DOI: 10.1002/mana.202200180

10. Veresovich P.P., Yablonsky A.I. Moving singular points of systems of third-order differential equations. *Differential Equations*. 1977; 13(11):1932-1939. (rus.).

11. Pisarenok V.P., Yablonsky A.I. Differential equation with solutions with algebraic moving singular points. *Differential Equations*. 1976; 12(5):928-930. (rus.).

12. Sobolevsky S.L. Moving singular points of polynomial ordinary differential equations. *Differential Equations*. 2004; 40(6):756-762. DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000046859.46244.5e (rus.).

13. Sobolevsky S.L. Moving singular points of algebraic ordinary differential equations. *Differential*

Equations. 2005; 41(8):1092-1099. DOI: 10.1007/s10625-005-0260-9 (rus.).

14. Filipuk G., Kecker T. On singularities of certain non-linear second-order ordinary differential equations. *Results in Mathematics*. 2022; 77(1). DOI: 10.1007/s00025-021-01577-1

15. Filipuk G., Halburd R.G. Movable algebraic singularities of second-order ordinary differential equations. *Journal of Mathematical Physics*. 2009; 50(2). DOI: 10.1063/1.3068414

16. Leont'eva T.Yu. About one generalization of exact criteria for the existence of moving singular points of one class of nonlinear ordinary differential equations in the complex area. *Belgorod State University Scientific Bulletin Mathematics & Physics*. 2017; 13(262):51-57. EDN ZCJDNR. (rus.).

17. Pchelova A.Z. The application area borders of approximate solution in the neighborhood of the approximate value of moving singularity for one differential equation in the complex domain. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2014; 4:170-179. EDN SXXCML. (rus.).

18. Orlov V.N., Iv B.B. The existence theorem for the solution of a class of fourth-order nonlinear differential equations with a polynomial right-hand part of second degree in proximity of a moving singular point. *Bulletin of the Bashkir University*. 2018; 23(4):980-986. EDN YUXNSH. (rus.).

19. Astashova I.V. On asymptotic classification of solutions to nonlinear regular and singular third- and fourth-order differential equations with power nonlinearity. *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*. 2016; 191-203. DOI: 10.1007/978-3-319-32857-7_18

20. Astashova I., Bartušek M., Došlá Z., Marini M. Asymptotic proximity to higher order nonlinear differential equations. *Advances in Nonlinear Analysis*. 2022; 11(1):1598-1613. DOI: 10.1515/anona-2022-0254

21. Kruskal M.D., Joshi N., Halburd R. Analytic and asymptotic methods for nonlinear singularity analysis: a review and extensions of tests for the Painlevé

property. *Integrability of Nonlinear Systems*. 2007; 171-205. DOI: 10.1007/BFb0113696

22. Řehák P. On asymptotic relationships between two higher order dynamic equations on time scale. *Applied Mathematics Letters*. 2017; 73:84-90. DOI: 10.1016/j.aml.2017.02.013

23. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Time-varying linearization and the perron effects. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007; 17(4):1079-1107. DOI: 10.1142/S0218127407017732

24. Hartman P. On the local linearization of differential equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*. 1963; 14(4):568-573. DOI: 10.1090/s0002-9939-1963-0152718-3

25. Ramos J.I. Linearization techniques for singular initial-value problems of ordinary differential equations. *Applied Mathematics and Computation*. 2005; 161(2):525-542. DOI: 10.1016/j.amc.2003.12.047

26. Jimenez J.C., Shoji I., Ozaki T. Simulation of stochastic differential equations through the local linearization method. A comparative study. *Journal of Statistical Physics*. 1999; 94:587-602. DOI: 10.1023/A:1004504506041

27. Orlov V.N., Gasanov M.V. Existence theorem for a solution of a class of third order nonlinear differential equations with polynomial right hand side of the seventh degree in a vicinity of a movable singular point. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Series: Mechanics of a limit state*. 2020; 1(43):92-100. DOI: 10.37972/chgpu.2020.43.1.011. EDN LDNWP. (rus.).

28. Orlov V.N., Gasanov M.V. Study of wave processes in elastic beams and nonlinear differential equations with moving singular points. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021; 1030(1):012081. DOI: 10.1088/1757-899X/1030/1/012081

29. Orlov V.N., Gasanov M.V. Analytic approximate solution in the neighborhood of a moving singular point of a class of nonlinear equations. *Axioms*. 2022; 11(11):637. DOI: 10.3390/axioms11110637

30. Bakhvalov N.S. *Numerical methods*. Moscow, Nauka Publ., 1970; 632. (rus.).

Received August 12, 2023.

Adopted in revised form on October 10, 2023.

Approved for publication on October 13, 2023.

BIONOTES: **Victor N. Orlov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ID RSCI: 711175, Scopus: 57202806960, Researcher ID: ABF-7635-2020, ORCID: 0000-0001-7606-5490; Orlovvn@mgsu.ru;

Magomedysuf V. Gasanov — lecturer of the Department of Higher Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; SPIN-code: 5571-4447, Scopus: 57222119930, ResearcherID: AFZ-3342-2022, ORCID: 0000-0003-4669-4506; GasanovMV@mgsu.ru.

Contribution of the authors:

Victor N. Orlov — scientific management, research concept, development of methodology, final conclusions.

Magomedysuf V. Gasanov — collection of material, processing of material, writing an article.

The authors declare no conflict of interest.