

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 539.3:621.3.036.61

DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1901-1914

Пассивное гашение изгибных колебаний балки вблизи ее резонансных частот с использованием пьезоэффекта

Владимир Николаевич Сидоров, Нэлла Николаевна Рогачева,
Юлия Германовна Жеглова

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Предложен принципиально новый способ пассивного гашения колебаний конструкции в окрестности ее резонансных частот. Способ основан на использовании пьезоэффекта. С этой целью к конструкции добавлены пьезоэлектрические элементы, которые служат преобразователями энергии (механической энергии в электрическую энергию и наоборот).

Материалы и методы. Пьезоэлектрические элементы представляют собой предварительно поляризованную пьезокерамику с электродами. Для пассивного гашения вибраций используются два различных вида электрических условий на электродах: электроды короткозамкнуты и электроды разомкнуты. Изменяя электрические условия на электродах, изменяется краевая задача. Спектр собственных частот краевой задачи для конструкции с короткозамкнутыми электродами отличается от спектра собственных частот краевой задачи для той же конструкции с разомкнутыми электродами. Идея метода заключается в следующем: пусть частота колебаний конструкции с короткозамкнутыми электродами приближается к ее резонансной частоте. Разомкнем электроды, тем самым изменим спектр собственных частот конструкции. Частота колебаний, которая является резонансной частотой для конструкции с короткозамкнутыми электродами, для конструкции с разомкнутыми электродами не будет резонансной. В результате изменения электрических условий амплитуды искомым величинам (прогиба, изгибающего момента, перерезывающего усилия и т.д.) существенно уменьшатся. С целью оценки эффективности пассивного гашения вибрации предложена простая формула.

Результаты. Для балки, совершающей вынужденные изгибные колебания в окрестности ее резонансной частоты, по предложенному способу пассивного гашения вибраций выполнены расчеты, получены таблицы эффективности гашения вибрации в окрестности резонансных частот и построены графики. Исследована возможность повышения эффективности гашения колебаний за счет выбора направления предварительной поляризации пьезоэлектрического материала, расположения электродов и их количества.

Выводы. Результаты исследований пассивного гашения колебаний вблизи резонансных частот с помощью пьезоэффекта подтвердили простоту и надежность предлагаемого метода.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: пассивное гашение вибраций, пьезоэффект, спектр собственных частот, поляризованная пьезокерамика

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Сидоров В.Н., Рогачева Н.Н., Жеглова Ю.Г. Пассивное гашение изгибных колебаний балки вблизи ее резонансных частот с использованием пьезоэффекта // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. Вып. 12. С. 1901–1914. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1901-1914

Автор, ответственный за переписку: Юлия Германовна Жеглова, JeglavaYUG@mgsu.ru.

Passive damping of bending vibrations of a beam near its resonance frequencies using piezoeffect

Vladimir N. Sidorov, Nelly N. Rogacheva, Yulia G. Zheglova

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The paper describes a fundamentally new method of passive damping of vibrations of a structure in the vicinity of its resonant frequencies. The method is based on the use of piezoeffect. For this purpose, piezoelectric elements are added to the structure, which serve as energy converters (mechanical energy into electrical energy and vice versa).

Materials and methods. Piezoelectric elements are polarized piezoceramics with electrodes. Two different types of electrical conditions on the electrodes are used for passive vibration damping: a) the electrodes are short-circuited and b) disconnected electrodes. By changing the electrical conditions on the electrodes, we change the boundary value problem. The spectrum of natural frequencies of the boundary value problem for a structure with short-circuited electrodes differs from the spectrum of natural frequencies of the boundary value problem for the same structure with disconnected electrodes.

The idea of the method is as follows: let the vibration frequency of the structure with short-circuited electrodes approach its resonant frequency. Let us disconnect the electrodes, thereby changing the spectrum of natural frequencies of the structure. The vibration frequency, which is the resonant frequency for the structure with short-circuited electrodes, will not be resonant for the structure with disconnected electrodes. As a result of changes in electrical conditions, the amplitudes of the required quantities (deflection, bending moment, shearing force, etc.) will decrease significantly. To evaluate the effectiveness of passive vibration damping, a simple formula is proposed.

Results. For a beam undergoing forced bending vibrations in the vicinity of its resonant frequency, calculations were performed using the proposed method of passive vibration damping, tables of vibration damping efficiency in the vicinity of resonant frequencies were obtained, and graphs are plotted. The possibility of increasing the efficiency of vibration damping by choosing the direction of pre-polarization of the piezoelectric material, the location of the electrodes and their number was investigated.

Conclusions. The results of studies of passive vibration damping near resonant frequencies using the piezoeffect confirmed the simplicity and reliability of the proposed method.

KEYWORDS: passive vibration damping, piezoeffect, spectrum of natural frequencies, polarized piezoceramics

FOR CITATION: Sidorov V.N., Rogacheva N.N., Zheglova Yu.G. Passive damping of bending vibrations of a beam near its resonance frequencies using piezoeffect. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2023; 18(12):1901-1914. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.12.1901-1914 (rus.).

Corresponding author: Yulia G. Zheglova, JeglovaYUG@mgsu.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Создание эффективных средств контроля и гашения колебаний конструкций является одной из важнейших проблем современной техники. Она охватывает широкий класс задач в строительстве, машиностроении, транспорте, военной технике, электронике и др. В строительстве это колебания зданий и сооружений, в том числе дымовых труб, телевизионных башен, мостов и т.д., которые подвергаются действиям динамических эксплуатационных ветровых и сейсмических нагрузок.

Для решения этого вопроса используются активные и пассивные системы гашения колебаний.

Различие между ними состоит в том, что в системах активного гашения колебаний используются внешние источники энергии, необходимые для возбуждения вынужденных колебаний конструкции в противофазе ее колебаний и уменьшающие амплитуды колебаний [1–10].

Пассивное гашение колебаний конструкции не требует внешних источников энергии. Для решения проблемы виброзащиты применяются различные системы пассивного гашения вибраций: демпфирующие; адаптивные; инерционные с гасителями колебаний; системы, регулирующие жесткость конструкции; изолирующие системы и др. [11–16].

Демпфирование заключается в поглощении и изменении энергии вибрации. Задача демпфирования — увеличение рассеивания энергии, для того чтобы уменьшить ускорение перемещений и инерционные силы колебания конструкции.

В инерционных системах используются различные гасители колебаний или гироскопические устройства. В строительных сооружениях масса гасителя составляет 1–2 % от массы сооружения. Под устройство гасителей отводятся большие площади в верхней части сооружения. В качестве примера можно привести гаситель в здании высотой 509 м (101 этаж) в г. Тайбэе (Тайвань). В верхней части

этого здания между 87 и 91 этажами подвешен гаситель в виде шара 660 тонн. Совершая колебания в противофазе, шаровой маятник уменьшает амплитуду сейсмических колебаний здания и меняет его собственные частоты.

Повышение жесткости сооружения достигается установкой дополнительных панелей и связей, которые значительно увеличивают прочность конструкции и изменяют ее резонансный спектр частот колебаний.

Изолирующие системы используются с древних времен. В строительных сооружениях способ сейсмоизоляции является наиболее эффективным. В отечественном строительстве часто применяются кинематические фундаменты, использующие эффекты качения, скольжения, трения и т.д. Другой распространенный тип сейсмоизоляции — фундаменты с упругопластическими элементами.

Особые трудности представляет гашение вынужденных колебаний, частоты которых близки или совпадают с собственными частотами конструкции. Именно для этого случая предлагается новый способ пассивного гашения колебаний конструкции вблизи ее резонансных частот, основанный на пьезоэффекте [17]. С этой целью на лицевые поверхности балки добавлены слои из предварительно поляризованной пьезокерамики с сильным пьезоэффектом. На электродах пьезоэлектрических слоев используются два типа электрических условий — электроды либо коротко замкнуты, либо разомкнуты. Электроупругое состояние конструкции с разными условиями на электродах описывается разными краевыми задачами с разными спектрами собственных частот. Этот известный в математике факт положен в основу нового способа пассивного гашения колебаний конструкции вблизи ее резонансных частот: если конструкция совершает колебания с частотой, близкой к ее резонансной частоте, то, изменив электрические условия на электродах, мы изменим спектр

собственных частот, и колебания конструкции будут происходить не на резонансной частоте.

Эффективность гашения зависит от направления предварительной поляризации пьезокерамики, расположения и количества электродов, геометрических и физических параметров конструкции и исследуется в представленной работе.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Исходные уравнения

Рассмотрена трехслойная балка с одним упругим слоем и двумя пьезоэлектрическими слоями, расположенными симметрично относительно упругого слоя. Средний слой — упругий, внешние слои выполнены из пьезоэлектрического материала. В дальнейших обозначениях номер упругого слоя (1), номера верхнего и нижнего слоев (+2) и (−2) соответственно. Толщина упругого слоя равна $2h_1$, толщина каждого пьезоэлектрического слоя — h_2 , длина балки — l (рис. 1).

Продольный разрез балки в декартовых координатах и электрическая нагрузка схематически показаны на рис. 1.

Ось x_1 направлена по длине балки, x_2 — по ширине балки, ось x_3 ортогональна им.

Предполагается, что пьезоэлектрические слои предварительно поляризованы в направлении x_3 [18].

В работе [18] построена теория многослойных электроупругих балок. Приведем эти результаты для частного случая — трехслойной балки.

В случае тонкостенных балок в уравнениях состояния напряжениями σ_{22} и σ_{33} можно пренебречь по сравнению с напряжениями σ_{11} . Кроме того, предполагается, что электроупругое состояние не зависит от координаты x_2 .

С учетом сделанных допущений уравнения для упругого и электроупругого слоев запишутся в виде уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2}, \quad i \neq j = 1, 3, \quad k = -2, 1, 2; (1)$$

Формулы деформация-перемещение:

$$e_1^{(k)} = \frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial x_1}, \quad k = -2, 1, 2. \quad (2)$$

Уравнение состояния (закон Гука) упругого слоя:

$$\sigma_{11}^{(1)} = E e_1^{(1)}. \quad (3)$$

Поведение пьезоэлектрических слоев описывается связанной электроупругой задачей, поэтому в уравнения состояния пьезоэлектрических слоев и уравнения электростатики одновременно входят и механические, и электрические величины [19]:

$$\sigma_{11}^{(\pm 2)} = \frac{1}{s_{11}^E} e_1^{(\pm 2)} - \frac{d_{31}}{s_{11}^E} E_3^{(\pm 2)}, \quad (4)$$

$$D_3^{(\pm 2)} = \epsilon_{33}^T E_3^{(\pm 2)} + d_{31} \sigma_{11}^{(\pm 2)}, \quad (5)$$

где

$$E_3^{(\pm 2)} = -\frac{\partial \phi^{(\pm 2)}}{\partial x_3}. \quad (6)$$

В формулах (1)–(6) u_1 и e_1 — перемещение и деформация в направлении x_1 соответственно; E_3 и D_3 — компоненты вектора электрического поля и вектора электрической индукции в направлении x_3 ; ϕ — электрический потенциал; s_{11}^E — упругая податливость при нулевом электрическом поле; E — модуль упругости упругого слоя; d_{31} — пьезоэлектрическая проницаемость; ϵ_{33}^T — диэлектрическая проницаемость при нулевых напряжениях [19]. Используемые обозначения те же, что и в трудах [2, 18].

Рассмотрим пьезоэлектрические слои, лицевые поверхности которых $x_3 = \pm h_1 \pm h_2$ полностью покрыты электродами. Будем использовать только два вида условий на электродах:

- электроды короткозамкнуты (электрический потенциал на электродах равен нулю);
- электроды разомкнуты.

На короткозамкнутых электродах электрический потенциал равен нулю:

$$\phi^{(\pm 2)} \Big|_{x_3 = \pm h} = \phi^{(\pm 2)} \Big|_{x_3 = \pm h} = 0. \quad (7)$$

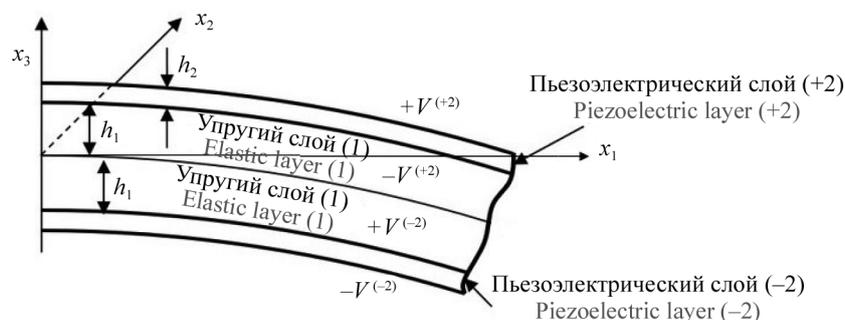


Рис. 1. Схематическое изображение структуры слоистой балки

Fig. 1. Schematic representation of a layered beam structure

На разомкнутых электродах электрический потенциал отличен от нуля:

$$\varphi^{(\pm 2)} \Big|_{x_3=\pm h} = \pm V^{(\pm 2)}, \quad \varphi^{(\pm 2)} \Big|_{x_3=\pm h_1} = \mp V^{(\pm 2)} \quad (8)$$

и его значения $V^{(\pm 2)}$ определяются из следующего интегрального условия:

$$I = \int_{\Omega} \frac{\partial D_3}{\partial t} d\Omega = 0. \quad (9)$$

Здесь интеграл берется по поверхности Ω одного из электродов, t обозначает время.

На поверхностях балки механическая поверхностная нагрузка задается обычным образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}^{(\pm 2)} \Big|_{x_3=\pm h} &= \pm q_1^{\pm}, \quad \sigma_{33}^{(\pm 2)} \Big|_{x_3=\pm h} = \\ &= \pm q_3^{\pm}, \quad \sigma_{33}^{(\pm 2)} \Big|_{x_3=\pm h_1} = \pm q_3^{\pm}. \end{aligned} \quad (10)$$

Верхний индекс в скобках указывает номер слоя. Здесь и далее каждая формула с двойным знаком \pm , m содержит две формулы. Для получения одной формулы следует взять верхние знаки, для получения второй формулы нужно взять нижние знаки.

Вывод уравнений электроупругой балки

Так как будет рассмотрена задача изгиба балки, то искомые величины σ_{11} , u_1 , E_3 , D_3 являются нечетными функциями от переменной x_3 , а искомые величины u_3 , φ , σ_{13} — четными функциями от переменной x_3 .

Электрический потенциал φ в задаче изгиба балки — это четная функция от переменной x_3 , поэтому условия (8) запишутся в следующем виде:

$$V^{(+2)} = -V^{(-2)} = V. \quad (11)$$

Для построения теории электроупругих балок следует принять некоторые предположения относительно электрических величин. Как и при построении теории пьезоэлектрических слоистых балок [18], содержание принимаемых гипотез зависит от электрических условий на поверхностях пьезоэлектрических слоев.

Механические величины любого слоя, для которого справедливы гипотезы Кирхгофа, могут быть записаны в виде следующих линейных функций координаты x_3 :

$$\begin{aligned} u &= x_3 u_1, \quad e_1 = x_3 \kappa, \\ \sigma_{11}^{(\pm 2)} &= \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} + x_3 \sigma_{11,1}^{(\pm 2)}, \quad \sigma_{11}^{(1)} = x_3 \sigma_{11,1}^{(1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где κ — компонента изгибной деформации средней линии балки и:

$$\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \quad w = -u_3 \Big|_{x_3=0}. \quad (13)$$

В работе [18] показано, что электрический потенциал в пьезоэлектрическом слое является квадратичной функцией координаты толщины x_3 :

$$\varphi^{(\pm 2)} = \varphi_{,0}^{(\pm 2)} + x_3 \varphi_{,1}^{(\pm 2)} + x_3^2 \varphi_{,2}^{(\pm 2)}. \quad (14)$$

Выпишем основные формулы для балки с разомкнутыми электродами. На разомкнутых электродах электрический потенциал отличен от нуля. Он равен константе на каждом электроде, которая определяется из интегрального условия (9).

Если на электродах задан электрический потенциал (8), то формулу (14) можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \varphi^{(\pm 2)} &= -V + (x_3 \mp h_1) \left(\pm \frac{2V}{h_2} \mp h_2 \varphi_{,2}^{(\pm 2)} \right) + \\ &+ (x_3 \mp h_1)^2 \varphi_{,2}^{(\pm 2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом формул (15) и (6) получаем:

$$E_{3,0}^{(\pm 2)} = \mp \frac{2V}{h_2} \pm (h + h_1) \varphi_{,2}^{(\pm 2)}, \quad E_{3,1}^{(\pm 2)} = -2\varphi_{,2}^{(\pm 2)},$$

где

$$E_3^{(\pm 2)} = E_{3,0}^{(\pm 2)} + x_3 E_{3,1}^{(\pm 2)}. \quad (16)$$

В результате несложных преобразований уравнения состояния пьезоэлектрических слоев с разомкнутыми электродами можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(\pm 2)} &= \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} + x_3 \sigma_{11,1}^{(\pm 2)}; \\ \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} &= \pm \frac{2d_{31}}{h_2 s_{11}^E} V \mp \frac{(h + h_1) k_{31}^2}{2s_{11}^E (1 - k_{31}^2)} \kappa; \\ \sigma_{11,1}^{(\pm 2)} &= \frac{1}{s_{11}^E (1 - k_{31}^2)} \kappa; \\ \varphi_{,2}^{(\pm 2)} &= \frac{d_{31}}{2\epsilon_{33}^T} \sigma_{11,1}^{(\pm 2)} = \frac{k_{31}^2}{2d_{31} (1 - k_{31}^2)} \kappa; \end{aligned} \quad (17)$$

$$E_{3,0}^{(\pm 2)} = \mp \frac{2V}{h_2} \pm \frac{(h + h_1) k_{31}^2}{2d_{31} (1 - k_{31}^2)} \kappa;$$

$$E_{3,1}^{(\pm 2)} = -\frac{k_{31}^2}{d_{31} (1 - k_{31}^2)} \kappa;$$

$$\begin{aligned} D_{3,0}^{(\pm 2)} &= \epsilon_{33}^T E_{3,0}^{(\pm 2)} + d_{31} \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} = \\ &= \epsilon_{33}^T E_{3,0}^{(\pm 2)} - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} E_{3,0}^{(\pm 2)} = \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) E_{3,0}^{(\pm 2)}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial D_{3,0}}{\partial t} d\Omega &= \epsilon_{33}^T (1 - k_{31}^2) \frac{\partial}{\partial t} \times \\ &\times \int_{\Omega} \left(\mp \frac{2V}{h_2} \pm \frac{(h + h_1) k_{31}^2}{2d_{31} (1 - k_{31}^2)} \kappa \right) d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Запишем основные формулы для балки с короткозамкнутыми электродами с учетом формул (7):

$$\begin{aligned} \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} &= \mp \frac{(h + h_1) k_{31}^2}{2s_{11}^E (1 - k_{31}^2)} \kappa, \quad \sigma_{11,1}^{(\pm 2)} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - k_{31}^2)} \kappa; \\ E_{3,0}^{(\pm 2)} &= \pm (h + h_1) \varphi_{,2}^{(\pm 2)}, \quad E_{3,1}^{(\pm 2)} = -2\varphi_{,2}^{(\pm 2)}; \\ \varphi_{,2}^{(\pm 2)} &= \frac{k_{31}^2}{2d_{31} (1 - k_{31}^2)} \kappa; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\varphi^{(\pm 2)} = (x_3 \mp h_1)(x_3 \mp h) \frac{k_{31}^2}{2d_{31} (1 - k_{31}^2)} \kappa;$$

$$D_{3,0}^{(\pm 2)} = \pm \frac{\epsilon_{33}^T (h + h_1) k_{31}^2}{2d_{31}} \kappa.$$

Перейдем в полученных формулах к обозначениям, принятым в теории балок. Интегрируя напряжения по толщине балки, находим результирующую поперечную силу N и изгибающий момент G :

$$\begin{aligned} N &= -\int_{-h}^{+h} \sigma_{13} dx_3; \\ G &= -\int_{h_1}^h \sigma_{11}^{(2)} x_3 dx_3 - \int_{-h_1}^h \sigma_{11}^{(1)} x_3 dx_3 - \int_{-h}^{-h_1} \sigma_{11}^{(-2)} x_3 dx_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Проинтегрировав уравнения движения и уравнения состояния для каждого слоя по переменной x_3 , получим одномерное уравнение для трехслойной электроупругой балки. В качестве примера рассмотрим гармонические колебания трехслойной балки по переменной t по закону $e^{-i\omega t}$, где переменная t — время; ω — круговая частота. Выпишем все уравнения и краевые условия относительно амплитудных значений искомых величин.

Выпишем уравнения изгибных колебаний балки с короткозамкнутыми электродами:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} + Z + 2h\rho\omega^2 w, \quad N &= \frac{dG}{dx}, \\ G &= M\kappa, \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad Z = -(q_3^+ + q_3^-), \end{aligned} \quad (21)$$

$$M = -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \left(1 - \frac{3h_2(h+h_1)^2 k_{31}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right).$$

После решения одномерной задачи можно найти напряжения и электрические величины по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} &= \mp \frac{(h+h_1)k_{31}^2}{2s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \kappa, \quad \sigma_{11,1}^{(\pm 2)} = \frac{1}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \kappa, \\ E_{3,0}^{(\pm 2)} &= \pm \frac{(h+h_1)k_{31}^2}{2d_{31}(1-k_{31}^2)} \kappa, \quad E_{3,1}^{(\pm 2)} = -\frac{k_{31}^2}{d_{31}(1-k_{31}^2)} \kappa, \quad (22) \\ D_{3,0}^{(\pm 2)} &= \varepsilon_{33}^T(1-k_{31}^2)E_{3,0}^{(\pm 2)}. \end{aligned}$$

Выпишем уравнения изгибных колебаний балки с разомкнутыми электродами:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx_1} + Z + 2h\rho\omega^2 w, \quad N &= \frac{dG}{dx_1}; \\ G &= M\kappa + Q, \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx_1^2}; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} Z &= -(q_3^+ + q_3^-); \\ M &= -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \times \\ &\times \left(1 - \frac{3h_2(h+h_1)^2 k_{31}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right); \\ Q &= -\frac{d_{31}}{s_{11}^E} \frac{h^2 - h_1^2}{h_2} 2V = \\ &= -\frac{h_2(h+h_1)^2}{2l} \frac{k_{31}^2}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \left(\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} - \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} \right); \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11,0}^{(\pm 2)} &= \pm \frac{2d_{31}}{h_2 s_{11}^E} V \mp \frac{(h+h_1)k_{31}^2}{2s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \kappa; \\ \sigma_{11,1}^{(\pm 2)} &= \frac{1}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \kappa; \\ E_{3,1}^{(\pm 2)} &= -\frac{k_{31}^2}{d_{31}(1-k_{31}^2)} \kappa; \\ D_{3,0}^{(\pm 2)} &= \varepsilon_{33}^T(1-k_{31}^2)E_{3,0}^{(\pm 2)}. \end{aligned} \quad (25)$$

По формулам (25) можно вычислить напряжения и электрические величины балки с разомкнутыми электродами.

Колебания балки со сплошными электродами в окрестности ее резонансных частот

Рассмотрим случай, когда на балку действует только постоянная нагрузка Z_* .

Введем безразмерные искомые величины:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x_1}{l}, \quad w_* = \frac{w}{l}, \quad \kappa_* = l \kappa = \frac{d^2 w_*}{d\xi^2}, \\ N_* &= \frac{l^2}{M} N, \quad G_* = \frac{l}{M} G, \\ Z_* &= \frac{l^3}{M} Z, \quad Q_* = Q \frac{l}{M}. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть электроды балки короткозамкнуты.

С учетом формул (26) система уравнений (21) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dN_*}{d\xi} + Z_* - \lambda^4 w_* &= 0, \\ N_* &= \frac{dG_*}{d\xi}, \quad G_* = \kappa_*, \quad \kappa_* = \frac{d^2 w_*}{d\xi^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Разрешающее уравнение для задачи изгиба записывается, как:

$$\frac{d^4 w_*}{d\xi^4} - \lambda^4 w_* + Z_* = 0, \quad \lambda^4 = -\frac{2h\rho\omega^2 l^4}{M}. \quad (28)$$

Его решение имеет вид:

$$\begin{aligned} w_* &= c_1 ch\lambda\xi + c_2 sh\lambda\xi + \\ &+ c_3 \cos\lambda\xi + c_4 \sin\lambda\xi + \frac{1}{\lambda^4} Z_*. \end{aligned} \quad (29)$$

Безразмерные перерезывающее усилие и изгибающий момент определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} G_* &= \lambda^2 (c_1 ch\lambda\xi + c_2 sh\lambda\xi - c_3 \cos\lambda\xi - c_4 \sin\lambda\xi); \\ N_* &= \lambda^3 (c_1 sh\lambda\xi + c_2 ch\lambda\xi + c_3 \sin\lambda\xi - c_4 \cos\lambda\xi). \end{aligned}$$

Произвольные постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяются из условий на концах балки:

$$\begin{aligned} w_* \Big|_{\xi=0} &= 0, \quad \frac{dw_*}{dx_1} \Big|_{\xi=0} = 0; \\ G_* \Big|_{\xi=1} &= 0, \quad N_* \Big|_{\xi=1} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Найдем произвольные константы интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 , удовлетворяя условиям (29):

$$\begin{aligned} c_3 &= -c_1 - \frac{1}{\lambda^4} Z_*, \quad c_4 = -c_2, \\ c_1 &= -\frac{Z_*}{2\lambda^4 \delta} (ch\lambda \cos \lambda + sh\lambda \sin \lambda + 1), \\ c_2 &= \frac{Z_*}{2\lambda^4 \delta} (ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda), \\ \delta &= ch\lambda \cos \lambda + 1. \end{aligned} \quad (31)$$

Первые три значения безразмерного частотного параметра λ на резонансах, найденные из частотного уравнения (31), равны 1,875, 4,694, 7,855.

Рассмотрим задачу о колебаниях балки с разомкнутыми электродами.

Система уравнений относительно безразмерных искоемых величин для балки с разомкнутыми электродами имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dN_*}{d\xi} + Z_* - \lambda^4 w_* &= 0, \quad N_* = \frac{dG_*}{d\xi}, \\ G_* &= \kappa_* + Q_*, \quad \kappa_* = \frac{d^2 w_*}{d\xi^2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$Q_* = -\frac{h_2(h+h_1)^2}{2s_{11}^E M} \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2} \left(\left. \frac{dw_*}{d\xi} \right|_{\xi=1} - \left. \frac{dw_*}{d\xi} \right|_{\xi=0} \right). \quad (33)$$

Разрешающее уравнение имеет вид (28). Его решение записывается в виде (29).

Безразмерные изгибающий момент и перерезывающая сила определяются по формулам:

$$\begin{aligned} G_* &= \lambda^2 (c_1 ch\lambda \xi + c_2 sh\lambda \xi - c_3 \cos \lambda \xi - c_4 \sin \lambda \xi) + \\ &+ \lambda (c_1 sh\lambda + c_2 ch\lambda - c_3 \sin \lambda + c_4 \cos \lambda); \\ N_* &= \frac{1}{\lambda^3} (c_1 sh\lambda \xi + c_2 ch\lambda \xi + c_3 \sin \lambda \xi - c_4 \cos \lambda \xi); \end{aligned}$$

$$t = -\frac{h_2(h+h_1)^2}{2s_{11}^E M} \frac{k_{31}^2}{1-k_{31}^2}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (30), получим следующие формулы для произвольных постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{Z_*}{2\lambda^4 \delta} \left(\lambda_2 (ch\lambda \cos \lambda + sh\lambda \sin \lambda + 1) + \right. \\ &\left. + 2t ch\lambda \sin \lambda \right); \\ c_2 &= \frac{Z_*}{2\lambda^4 \delta} (\lambda_2 (ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda) + 2t sh\lambda \sin \lambda); \\ c_3 &= -c_1 - \frac{1}{\lambda^4} Z_*, \quad c_4 = -c_2; \\ \delta &= \lambda (ch\lambda \cos \lambda + 1) + t (ch\lambda \sin \lambda + sh\lambda \cos \lambda). \end{aligned} \quad (34)$$

Введем понятие эффективности f пассивного гашения колебаний с помощью пьезоэлектрического эффекта. Примем за эффективность пассивного гашения колебаний отношение абсолютной величины разности резонансных частот, имеющих

одинаковые номера для балки с разомкнутыми и короткозамкнутыми электродами соответственно к резонансным частотам балки с короткозамкнутыми электродами:

$$f = \frac{|\omega^{(sh)} - \omega^{(d)}|}{\omega^{(sh)}} = \frac{|\lambda^{(sh)} - \lambda^{(d)}|}{\lambda^{(sh)}}. \quad (35)$$

Величины λ^2 входят в формулу во второй степени, так как, согласно второй формуле (28), частота ω пропорциональна λ^2 .

Табл. 1. Значения безразмерного частотного параметра при резонансах балки со сплошными электродами и эффективность гашения колебаний для первых пяти резонансных частот

Table 1. Values of the dimensionless frequency parameter at resonances of the beam with solid electrodes and the efficiency of vibration damping for the first five resonant frequencies

n	1	2	3	4	5
$\lambda^{(sh)}$	1,8750	4,6940	7,8547	10,9954	14,1371
$\lambda^{(d)}$	1,9021	4,7155	7,8672	11,0044	14,1441
f	0,0291	0,0092	0,0032	0,0032	0,0001

Примечание: n — номер резонансной частоты колебаний; $\lambda^{(sh)}$ и $\lambda^{(d)}$ — значения безразмерного частотного параметра на резонансах балки с короткозамкнутыми или разомкнутыми электродами соответственно.

Note: n — is the number of the resonant frequency of oscillation; $\lambda^{(sh)}$ and $\lambda^{(d)}$ — values of the dimensionless frequency parameter at the beam resonances with short-circuited or open-circuited electrodes, respectively.

Расчет выполнялся для балки из железобетона со слоями предварительно поляризованной пьезо-керамики с сильным пьезоэлектрическим эффектом PZ29, $h_2/h_1 = 0,1$.

Из табл. 1 видно, что наибольшая эффективность в случае сплошных электродов достигается на основной (первой) резонансной частоте колебаний балки и быстро уменьшается с увеличением номера резонансной частоты. Эффективность гашения изгибных колебаний невелика и уменьшается с увеличением номера резонансной частоты.

Табл. 1 составлена для консольной балки. При других краевых условиях эффективность может быть нулевой. Например, если края балки жестко заделаны, то величина $Q(33)$ равна нулю, так как углы поворота жестко заделанных краев балки равны нулю. В этом случае системы уравнений для слоистой балки с короткозамкнутыми и разомкнутыми электродами совпадают, а значит, совпадают и их собственные частоты.

Выше мы рассматривали балку со сплошными электродами. Можно предположить, что использование разрезных электродов будет более эффективно для пассивного гашения вибраций.

Изгибные колебания балки с разрезными электродами (пьезослой с толщиной поляризации)

В случае короткозамкнутых электродов не имеет значения, сплошные электроды или разрезные, так как в этом случае электрический потенциал на электродах равен нулю. Формулы (28)–(30) для искомых величин сохраняют силу. Собственные частоты найдены выше (табл. 1).

На рис. 2 представлено схематическое изображение слоистой балки с разрезными электродами.

Предположим, что длина каждого разрезного электрода не больше толщины балки. Каждый электрод разрезан на m электродов одинаковой длины. Длина каждой пары разрезных электродов будет $l_i = l/m, l_i/l < h$. В этом случае для каждой пары электродов (для каждого i -го отрезка балки, покрытого сплошными электродами) формула для Q_i запишется в виде (33):

$$Q_i = -\frac{h_2(h+h_1)^2}{2l_i} \frac{k_{31}^2}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \times \left(\frac{dw}{dx_1} \Big|_{x_1=x_{1,i+1}} - \frac{dw}{dx_1} \Big|_{x_1=x_{1,i}} \right),$$

$$l_i = x_{1,i+1} - x_{1,i}.$$

В формуле отношение

$$\frac{dw}{dx_1} \Big|_{x_1=x_{1,i+1}} - \frac{dw}{dx_1} \Big|_{x_1=x_{1,i}}$$

$$l_i$$

представляет собой приращение первой производной w , деленное на приращение аргумента x .

Перейдем от отношения приращения первых производных от прогибов к приращению аргумента l_i к дифференциальной записи, получим:

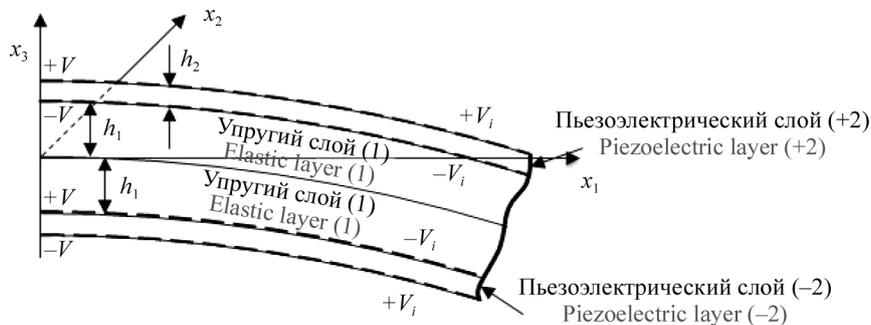


Рис. 2. Схематическое изображение структуры слоистой балки с разрезными электродами
Fig. 2. Schematic representation of the structure of a layered beam with split electrodes

$$Q = -\frac{h_2(h+h_1)^2}{2} \frac{k_{31}^2}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \frac{d^2w}{dx_1^2} =$$

$$= -\frac{h_2(h+h_1)^2}{2} \frac{k_{31}^2}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \kappa. \tag{36}$$

Учитывая формулу (36), соотношения упругости для изгибающих моментов запишем следующим образом:

$$G = M_1 \kappa, M_1 = -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{3h_2(h+h_1)^2 k_{31}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right) - \frac{h_2(h+h_1)^2}{2} \frac{k_{31}^2}{s_{11}^E(1-k_{31}^2)}. \tag{37}$$

Перейдем от размерных величин к безразмерным в уравнениях (32), (37) по формулам:

$$\xi = \frac{x_1}{l}, w_* = \frac{w}{l}, \kappa_* = l \kappa = \frac{d^2w_*}{d\xi^2}, N_* = \frac{l^2}{M} N,$$

$$G_* = \frac{l}{M} G, Z_* = \frac{l^3}{aM} Z, \tag{38}$$

$$\lambda_1^4 = -\frac{2h\rho\omega^2 l^4}{aM}, \lambda^4 = a\lambda_1^4, a = \frac{M_1}{M},$$

где

$$M = -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{11}^E(1-k_{31}^2)} \left(1 - \frac{3h_2(h+h_1)^2 k_{31}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right).$$

Формула

$$\lambda^4 = a\lambda_1^4 \tag{39}$$

связывает безразмерный частотный параметр балки с разомкнутыми электродами λ_1 с соответствующим безразмерным частотным параметром балки с короткозамкнутыми электродами λ .

Разрешающее уравнение относительно безразмерного прогиба принимает вид:

$$\frac{d^4 w_*}{d\xi^4} - \lambda_1^4 w_* + Z_* = 0, \lambda_1^4 = -\frac{2h\rho\omega^2 l^4}{aM}.$$

Формулы для искоемых безразмерных величин:

$$w_* = c_1 ch\lambda_1 \xi + c_2 sh\lambda_1 \xi + c_3 \cos\lambda_1 \xi + c_4 \sin\lambda_1 \xi + \frac{1}{\lambda_1^4} Z_*,$$

$$G_* = \lambda_1^2 (c_1 ch\lambda_1 \xi + c_2 sh\lambda_1 \xi - c_3 \cos\lambda_1 \xi - c_4 \sin\lambda_1 \xi),$$

$$N_* = \lambda_1^3 (c_1 sh\lambda_1 \xi + c_2 ch\lambda_1 \xi + c_3 \sin\lambda_1 \xi - c_4 \cos\lambda_1 \xi). \quad (40)$$

Удовлетворяя крайевым условиям консольной балки, найдем неизвестные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$c_3 = -c_1 - \frac{1}{\lambda_1^4} Z_*, \quad c_4 = -c_2,$$

$$c_1 = -\frac{Z_*}{2\lambda_1^4 \delta} (ch\lambda_1 \cos\lambda_1 + sh\lambda_1 \sin\lambda_1 + 1),$$

$$c_2 = \frac{Z_*}{2\lambda_1^4 \delta} (ch\lambda_1 \sin\lambda_1 + sh\lambda_1 \cos\lambda_1),$$

$$\delta = ch\lambda_1 \cos\lambda_1 + 1.$$

Табл. 2. Значения безразмерного частотного параметра при резонансах балки с разрезными электродами и эффективность гашения колебаний для первых пяти резонансных частот

Table 2. Values of the dimensionless frequency parameter at resonances of a beam with split electrodes and the efficiency of vibration damping for the first five resonant frequencies

n	1	2	3	4	5
$\lambda^{(sh)}$	1,8750	4,6940	7,8547	10,9954	14,1371
$\lambda^{(d)}$	1,9125	4,7878	8,0117	11,2152	14,4197
f	0,0404	0,0404	0,0404	0,0404	0,0404

Сравнивая табл. 1 и 2, заметим, что в случае разрезных электродов эффективность выше, чем для сплошных электродов, и она постоянная для всех частот.

На рис. 3 кривые красного цвета изображают величины w_*, G_*, N_* для балки с короткозамкнутыми электродами, кривые синего цвета — те же величины для балки с разомкнутыми электродами. В расчете использовалась частота, которая на 0,5 % меньше первой резонансной частоты с короткозамкнутыми электродами. Расчет подтверждает эффективность предлагаемого нового метода.

Пьезокерамика с продольной поляризацией

Рассмотрим балку с пьезоэлектрическими слоями с продольной предварительной поляризацией вдоль оси балки. Схема строения балки представлена на рис. 4. Стрелками на рис. 4 показано направление предварительной поляризации пьезокерамики. Пьезокерамика такой структуры широко используется в электронике, робототехнике, измерительных приборах и т.д., поскольку обладает большим коэффициентом электромеханической связи.

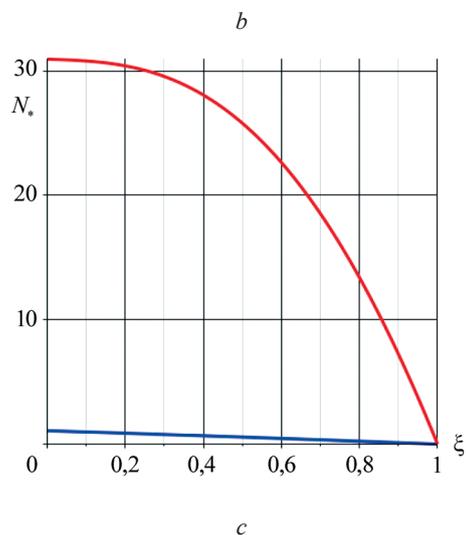
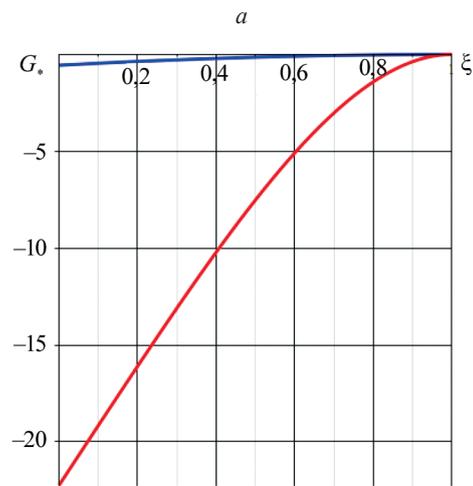
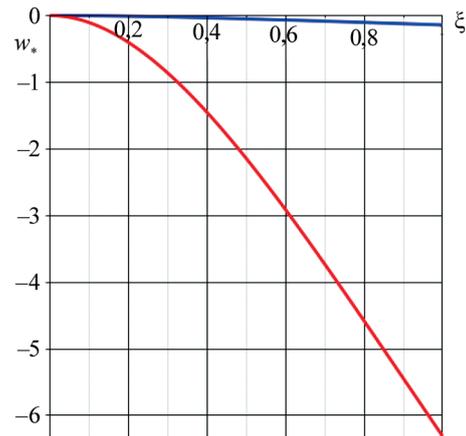


Рис. 3. Зависимость безразмерных искоемых величин от продольной безразмерной координаты ξ вблизи первой резонансной частоты: a — безразмерный прогиб w_* ; b — безразмерный изгибающий момент G_* ; c — безразмерная поперечная сила N_* .

Fig. 3. Dependence of the dimensionless sought quantities on the longitudinal dimensionless coordinate ξ near the first resonant frequency: a — dimensionless deflection w_* ; b — dimensionless bending moment G_* ; c — dimensionless transverse force N_* .

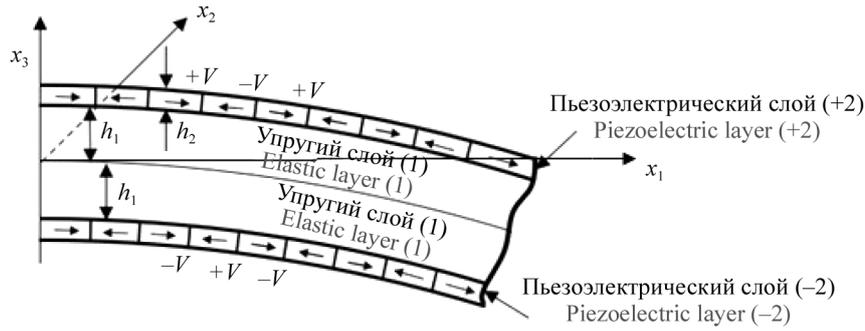


Рис. 4. Схематическое строение слоистой балки с пьезоэлектрическими слоями с продольной поляризацией пьезоэлектрических слоев

Fig. 4. Schematic structure of a layered beam with piezoelectric layers with longitudinal polarization of the piezoelectric layers

На рис. 4 изображена составная пьезокерамика с продольной поляризацией. Предположим, что длина каждого участка пьезокерамики не больше толщины балки. Электроды покрывают края каждого отрезка пьезоэлектрического слоя.

Основные соотношения для пьезоэлектрических слоев с продольной поляризацией имеют вид [2]:

$$\sigma_{11}^{(\pm 2)} = \frac{1}{s_{33}^E} e_1^{(\pm 2)} - \frac{d_{33}}{s_{33}^E} E_1^{(\pm 2)}; \quad (41)$$

$$D_1^{(\pm 2)} = \varepsilon_{33}^T E_1^{(\pm 2)} + d_{33} \sigma_{11}^{(\pm 2)}; \quad (42)$$

$$\frac{dD_1^{(\pm 2)}}{dx_1} = 0, \quad E_1^{(\pm 2)} = -\frac{d\phi^{(\pm 2)}}{dx_1},$$

где E_1 и D_1 — компоненты вектора электрического поля и вектора электрической индукции в направлении x_1 ; s_{33}^E — упругая податливость при нулевом электрическом поле; d_{33} — пьезоэлектрическая проницаемость; ε_{33}^T — диэлектрическая проницаемость при нулевых напряжениях. Используемые обозначения те же, что и в работе [19].

Уравнения движения и уравнения для упругого среднего слоя балки (1), (3) сохраняют силу.

Будем использовать два типа электрических условий на электродах — на короткозамкнутых электродах электрический потенциал равен нулю, на разомкнутых электродах интеграл по поверхности электрода от компоненты D_1 вектора электрической индукции равен нулю:

$$\int_{h_1}^h D_1|_{x_1=x_{1j}} dx_3 = 0, \quad \int_{-h}^{-h_1} D_1|_{x_1=x_{1j}} dx_3 = 0.$$

В результате простых преобразований, аналогичных проделанным выше, получим следующие уравнения для балки с короткозамкнутыми электродами:

$$\frac{dN}{dx_1} + Z + 2h\rho\omega^2 w, \quad N = \frac{dG}{dx_1}, \quad G = M\kappa, \quad \kappa = \frac{d^2 w}{dx_1^2}, \quad (43)$$

$$Z = -(q_3^+ + q_3^-),$$

$$M_2 = -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{33}^E(1 - k_{33}^2)} \left(1 - \frac{3h_2(h + h_1)^2 k_{33}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right).$$

Введем безразмерные искомые значения:

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad w_* = \frac{w}{l}, \quad \kappa_* = h\kappa = \frac{d^2 w_*}{d\xi^2}, \quad (44)$$

$$N_* = \frac{l^2}{M_2} N, \quad G_* = \frac{l}{M_2} G, \quad Z_* = \frac{l^3}{M_2} Z.$$

С учетом формул (44) система уравнений (43) переписывается в виде ($V = 0, Q = 0$):

$$\frac{dN_*}{d\xi} + Z_* - \lambda^4 w_* = 0, \quad N_* = \frac{dG_*}{d\xi}, \quad (45)$$

$$G_* = \kappa_*, \quad \kappa_* = \frac{d^2 w_*}{d\xi^2}.$$

Разрешающее уравнение для задачи изгиба записывается, как:

$$\frac{d^4 w_*}{d\xi^4} - \lambda_2^4 w_* + Z_* = 0, \quad (46)$$

$$\lambda_2^4 = -\frac{2h\rho\omega^2 l^4}{M_2}.$$

Найдем решение уравнения (46):

$$w_* = c_1 ch\lambda_2 \xi + c_2 sh\lambda_2 \xi + c_3 \cos\lambda_2 \xi + c_4 \sin\lambda_2 \xi + \frac{1}{\lambda_2^4} Z_*; \quad (47)$$

$$G_* = \lambda_2^2 (c_1 ch\lambda_2 \xi + c_2 sh\lambda_2 \xi - c_3 \cos\lambda_2 \xi - c_4 \sin\lambda_2 \xi);$$

$$N_* = \lambda_2^3 (c_1 sh\lambda_2 \xi + c_2 ch\lambda_2 \xi + c_3 \sin\lambda_2 \xi - c_4 \cos\lambda_2 \xi). \quad (48)$$

Произвольные постоянные интегрирования c_1 и c_2 определяются из условий на концах балки:

$$w_*|_{\xi=0} = 0, \quad \frac{dw_*}{d\xi}|_{\xi=0} = 0, \quad (49)$$

$$G_*|_{\xi=1} = 0, \quad N_*|_{\xi=1} = 0.$$

Найдем произвольные постоянные интегрирования c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$c_3 = -c_1 - \frac{1}{\lambda_2^4} Z_*, \quad c_4 = -c_2,$$

$$c_1 = -\frac{Z_*}{2\lambda_2^4 \delta} (ch\lambda_2 \cos \lambda_2 + sh\lambda_2 \sin \lambda_2 + 1), \quad (50)$$

$$c_2 = \frac{Z_*}{2\lambda_2^4 \delta} (ch\lambda_2 \sin \lambda_2 + sh\lambda_2 \cos \lambda_2),$$

$$\delta = ch\lambda_2 \cos \lambda_2 + 1.$$

Безразмерные собственные частотные параметры балки с короткозамкнутыми электродами находятся из уравнения (50).

Разомкнутые электроды

В этом случае при продольной поляризации каждый пьезоэлектрический слой состоит из отдельных участков длиной l/m . Длина участка l_i должна быть малой величиной порядка толщины балки, а его края покрыты электродами.

Соотношения упругости для изгибающих моментов запишем следующим образом:

$$G = M_3 \kappa, \quad M_3 = -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{3h_2 (h + h_1)^2 k_{33}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right) - \frac{h_2 (h + h_1)^2}{2} \frac{k_{33}^2}{s_{33}^E (1 - k_{33}^2)}. \quad (51)$$

Остальные уравнения теории изгиба слоистой балки не меняются.

Рассмотрим случай, когда на балку действует только постоянная нагрузка Z_* .

Введем безразмерные искомые значения. Перейдем от размерных величин к безразмерным в уравнениях (32), (51) по формулам:

$$\xi = \frac{x_1}{l}, \quad w_* = \frac{w}{l}, \quad \kappa_* = l \kappa = \frac{d^2 w_*}{d\xi^2},$$

$$N_* = \frac{l^2}{M_2} N, \quad G_* = \frac{l}{M_2} G, \quad Z_* = \frac{l^3}{bM_2} Z, \quad (52)$$

$$\lambda_3^4 = -\frac{2h\rho\omega^2 l^4}{bM_2}, \quad \lambda_2^4 = b\lambda_3^4, \quad b = \frac{M_3}{M_2},$$

где

$$M_2 = -\frac{2h_1^3 E}{3} - \frac{2(h^3 - h_1^3)}{3s_{33}^E (1 - k_{33}^2)} \left(1 - \frac{3h_2 (h + h_1)^2 k_{33}^2}{4(h^3 - h_1^3)} \right).$$

Формула

$$\lambda_2^4 = b\lambda_3^4 \quad (53)$$

связывает безразмерный частотный параметр балки с разомкнутыми электродами λ_1 с соответствующим безразмерным частотным параметром балки с короткозамкнутыми электродами λ .

Разрешающее уравнение относительно безразмерного прогиба принимает вид:

$$\frac{d^4 w_*}{d\xi^4} - \lambda_3^4 w_* + Z_* = 0, \quad \lambda_3^4 = -\frac{2h\rho\omega^2 l^4}{b^4 M_2}.$$

Формулы для искомых безразмерных величин:

$$w_* = c_1 ch\lambda_1 \xi + c_2 sh\lambda_1 \xi +$$

$$+ c_3 \cos \lambda_1 \xi + c_4 \sin \lambda_1 \xi + \frac{1}{\lambda_1^4} Z_*; \quad (54)$$

$$G_* = \lambda_1^2 (c_1 ch\lambda_1 \xi + c_2 sh\lambda_1 \xi - c_3 \cos \lambda_1 \xi - c_4 \sin \lambda_1 \xi);$$

$$N_* = \lambda_1^3 (c_1 sh\lambda_1 \xi + c_2 ch\lambda_1 \xi + c_3 \sin \lambda_1 \xi - c_4 \cos \lambda_1 \xi).$$

Удовлетворяя крайевым условиям консольной балки, найдем неизвестные постоянные c_1, c_2, c_3, c_4 :

$$c_3 = -c_1 - \frac{1}{\lambda_1^4} Z_*; \quad c_4 = -c_2;$$

$$c_1 = -\frac{Z_*}{2\lambda_1^4 \delta} (ch\lambda_1 \cos \lambda_1 + sh\lambda_1 \sin \lambda_1 + 1); \quad (55)$$

$$c_2 = \frac{Z_*}{2\lambda_1^4 \delta} (ch\lambda_1 \sin \lambda_1 + sh\lambda_1 \cos \lambda_1);$$

$$\delta = ch\lambda_1 \cos \lambda_1 + 1.$$

Табл. 3. Значения безразмерного частотного параметра для балки с продольной поляризацией при резонансах балки с электродами и эффективность гашения колебаний для первых пяти резонансных частот

Table 3. Values of the dimensionless frequency parameter for a beam with longitudinal pre-polarization at resonances of a beam with electrodes and the efficiency of vibration damping for the first five resonant frequencies

<i>n</i>	1	2	3	4	5
$\lambda^{(sh)}$	1,8750	4,6940	7,8547	10,9954	14,1371
$\lambda^{(d)}$	2,0625	5,1634	8,6402	12,0949	15,5508
<i>f</i>	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100	0,2100

На рис. 5, 6 кривые красного цвета изображают величины w_*, G_*, N_* для балки с короткозамкнутыми электродами, кривые синего цвета — те же величины для балки с разомкнутыми электродами. Рис. 5 построен для частоты, которая на 0,5 % меньше первой резонансной частоты с короткозамкнутыми электродами. Рис. 6 построен для частоты, которая на 0,5 % меньше второй резонансной частоты с короткозамкнутыми электродами. В случае продольной поляризации эффективность существенно выше, чем при толщинной поляризации (см. табл. 2, 3).

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Проведенные исследования показали, что эффективность гашения колебаний существенно зависит от направления поляризации пьезокерамики и от количества и расположения ее электродов.

В случае использования пьезокерамики с предварительной поляризацией по толщине балки, лицевые поверхности слоев которой покрыты сплошными электродами (табл. 1), эффективность гашения невелика.

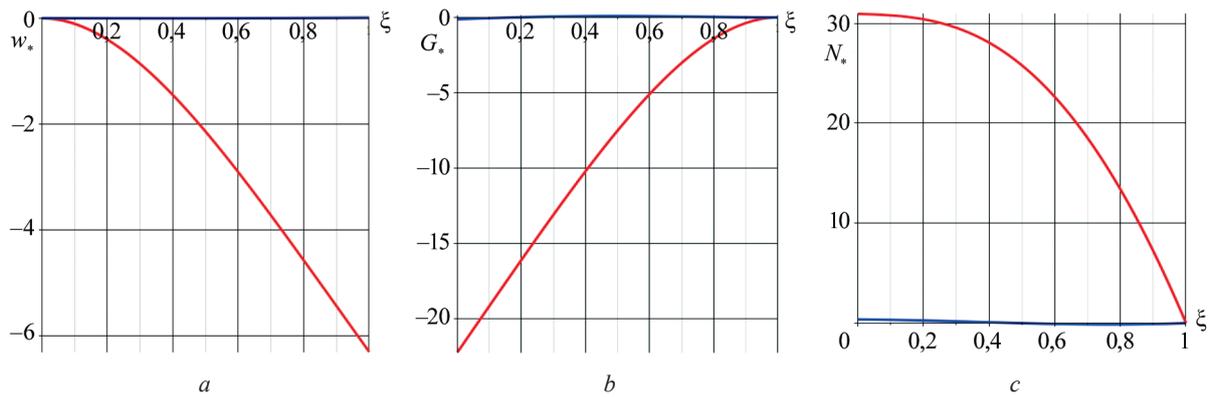


Рис. 5. Зависимость безразмерных искомых величин от продольной безразмерной координаты ξ вблизи первой резонансной частоты: a — безразмерный прогиб w_* ; b — безразмерный изгибающий момент G_* ; c — безразмерная поперечная сила N_* .

Fig. 5. Dependence of the dimensionless sought quantities on the longitudinal dimensionless coordinate ξ near the first resonant frequency: a — dimensionless deflection w_* ; b — dimensionless bending moment G_* ; c — dimensionless transverse force N_* .

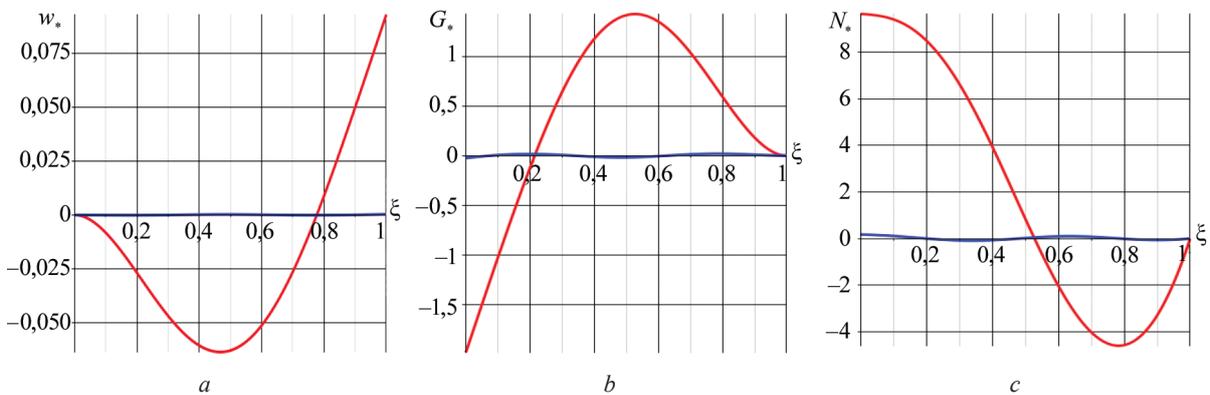


Рис. 6. Зависимость безразмерных искомых величин от продольной безразмерной координаты ξ вблизи второй резонансной частоты: a — безразмерный прогиб w_* ; b — безразмерный изгибающий момент G_* ; c — безразмерная поперечная сила N_* .

Fig. 6. Dependence of the dimensionless sought quantities on the longitudinal dimensionless coordinate ξ near the second resonant frequency: a — dimensionless deflection w_* ; b — dimensionless bending moment G_* ; c — dimensionless shear force N_* .

Более эффективным является использование разрезных электродов. Причем их количество должно быть достаточно велико, чтобы с принятой в теории балок точностью можно было заменить кусочно непрерывную функцию электрического потенциала от переменной x_1 непрерывной функцией, т.е. выполнить переход от конечных разностей к дифференциалам.

Рассмотрены пьезоэлектрические слои с толщиной и с продольной поляризацией.

Показано, что наличие большого количества электродов позволяет гасить амплитуду колебаний с одинаковой эффективностью на всех резонансных частотах (табл. 2, 3). Отметим, что при использовании пьезокерамики с продольной поляризацией

эффективность гашения колебаний существенно больше, чем при использовании пьезокерамики с толщиной поляризацией.

Новый предложенный способ не имеет аналогов, так как в отличие от других способов, которые уменьшают амплитуды колебаний на резонансах, предлагаемый метод предлагает уйти от резонансов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проведено исследование принципиально нового способа пассивного гашения колебаний конструкции в окрестности ее резонансных частот. Предлагаемый способ основан на использовании пьезоэлектрического материала, обладающего

сильным пьезоэлектрическим эффектом. Идея заключается в изменении электрических условий на электродах пьезоэлементов. При изменении электрических условий меняется связанная электроупругая краевая задача и ее спектр собственных частот. Исследования показали, что в уравнениях краевой задачи при изменении электрических краевых условий меняются уравнения состояния. Так, в рассмотренном выше численном примере для пьезоэлектрических слоев с разрезными электродами с толщиной поляризации отношение $M_1/M = 1,158$, с продольной поляризацией отношение $M_3/M_2 = 2,279$ (где M, M_2 — изгибная жесткость балки при короткозамкнутых электродах, M_1, M_3 — изгибная жесткость балки при разомкнутых электродах). Таким образом, изгибная жесткость композитной балки с пьезоэлектрическими слоями с толщиной поляризации увеличивается на 15,8 %, для

балки с продольной поляризацией увеличивается на 127,9 %.

Эффективность пассивного гашения колебаний той же балки на резонансных частотах при толщинной поляризации равна 0,0404, для балки с продольной поляризацией — 0,21.

Проведенное исследование убедительно доказывает преимущество использования пьезоэлектрических элементов с продольной поляризацией.

Отметим простоту пассивного гашения вибраций на резонансах с применением пьезоэффекта, безинерционность работы гашения вибраций, одинаковую эффективность гашения на всех резонансных частотах, а также стабильность свойств пьезоэлектрического материала гасителя в широком температурном и временном диапазоне и его низкую стоимость.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Preumont A.* Vibration control of active structures. John Wiley & Sons, 2008. 295 p.
2. *Rogacheva N.N.* The theory of piezoelectric shells and plates. Florida : Boca Raton : CRC Press, 1994. 249 p. EDN VQKGWT.
3. *Inmah D.J.* Vibration with control. Wiley Online Books, 2017.
4. *Kwak M.K.* Dynamic modeling and active vibration control of structures. Springer Dordrecht, 2021. 371 p. DOI: 10.1007/978-94-024-2120-0
5. *He W., Liu J.* Active vibration control and stability analysis of flexible beam systems. Springer, 2019. 212 p. DOI: 10.1007/978-981-10-7539-1
6. *Rogacheva N.N.* Active vibration suppression of a beam using piezoeffect // E3S Web of Conferences. 2019. Vol. 97. P. 03024. DOI: 10.1051/e3s-conf/20199703024
7. *Liu Z., Chen L., Sun L., Zhao L., Cui W., Guan H.* Multimode damping optimization of a long-span suspension bridge with damped outriggers for suppressing vortex-induced vibrations // Engineering Structures. 2023. Vol. 286. P. 115959. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.115959
8. *Fujino Y., Siringoringo D.M., Ikeda Y., Nagayama T., Mizutani T.* Research and implementations of structural monitoring for bridges and buildings in Japan // Engineering. 2019. Vol. 5. Issue 6. Pp. 1093–1119. DOI: 10.1016/j.eng.2019.09.006
9. *Isić S., Mehremić S., Karabegović I., Husak E.* Systems for passive and active vibration damping // New Technologies, Development and Application II. 2019. Pp. 96–104. DOI: 10.1007/978-3-030-18072-0_10
10. *Zhang F., Liu J., Tian J.* Analysis of the vibration suppression of double-beam system via nonlinear switching piezoelectric network // Machines. 2021. Vol. 9. Issue 6. P. 115. DOI: 10.3390/machines9060115
11. *Dumitriu M.* Study on the effect of damping asymmetry of the vertical suspension on the railway bogie vibrations // Symmetry. 2022. Vol. 14. Issue 2. P. 327. DOI: 10.3390/sym14020327
12. *Huang K., Li T., Xu W., Cao L.* Effects of nonlinear damping on vibrations of microbeam // Applied Sciences. 2022. Vol. 12. Issue 6. P. 3206. DOI: 10.3390/app12063206
13. *Mazur K., Rzepecki J., Pietruszewska A., Wrona S., Pawelczyk M.* Vibroacoustical performance analysis of a rigid device casing with piezoelectric shunt damping // Sensors. 2021. Vol. 21. Issue 7. P. 2517. DOI: 10.3390/s21072517
14. *Sidorov V.N., Badina E.S.* Computer simulation of structural vibration damping with allowance for nonlocal properties // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. Issue 4. Pp. 86–91. DOI: 10.22337/2587-9618-2020-16-4-86-91
15. *Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P.* Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17. Issue 4. Pp. 14–21. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-4-14-21
16. *Сидоров В.Н., Бадина Е.С.* Конечно-элементное моделирование колебаний композитных балок с учетом демпфирования нелокального во времени // Механика композиционных материалов и конструкций. 2021. Т. 27. № 1. С. 65–72. DOI: 10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.065_072.05. EDN CGFFUZ.

17. Rogacheva N.N. Passive vibration suppression of structures in the vicinity of natural frequencies using piezoeffect // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019. Vol. 15. Issue 2. Pp. 125–134. DOI: 10.22337/2587-9618-2019-15-2-125-134

18. Rogacheva N.N. The dynamic behaviour of piezoelectric laminated bars // *Journal of Applied Mathe-*

matics and Mechanics. 2007. Vol. 71. Issue 4. Pp. 494–510. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.09.004

19. Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers // *Physical Acoustics*. 1964. Pp. 169–270. DOI: 10.1016/b978-1-4832-2857-0.50009-5

Поступила в редакцию 9 октября 2023 г.

Принята в доработанном виде 13 октября 2023 г.

Одобрена для публикации 23 октября 2023 г.

ОБ АВТОРАХ: Владимир Николаевич Сидоров — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; РИНЦ ID: 691222, Scopus: 39161892000, ResearcherID: C-3057-2018; SidorovVN@mgsu.ru;

Нэлла Николаевна Рогачева — доктор физико-математических наук, доцент кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; РИНЦ ID: 17172, ORCID: 0009-0009-3409-378X; RogachevaNN@mgsu.ru;

Юлия Германовна Жеглова — кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем, технологий и автоматизации в строительстве; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; РИНЦ ID: 940377, Scopus: 57202228987, ResearcherID: AAC-8875-2022, ORCID: 0000-0001-8121-8535; JeglovaYUG@mgsu.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Preumont A. *Vibration control of active structures*. John Wiley & Sons, 2008; 295.
2. Rogacheva N.N. *The theory of piezoelectric shells and plates*. Florida, Boca Raton: CRC Press, 1994; 249. EDN VQKGWT.
3. Inmah D.J. *Vibration with control*. Wiley Online Books, 2017.
4. Kwak M.K. *Dynamic modeling and active vibration control of structures*. Springer Dordrecht, 2021; 371. DOI: 10.1007/978-94-024-2120-0
5. He W., Liu J. *Active vibration control and stability analysis of flexible beam systems*. Springer, 2019; 212. DOI: 10.1007/978-981-10-7539-1
6. Rogacheva N.N. Active vibration suppression of a beam using piezoeffect. *E3S Web of Conferences*. 2019; 97:03024. DOI: 10.1051/e3sconf/20199703024
7. Liu Z., Chen L., Sun L., Zhao L., Cui W., Guan H. Multimode damping optimization of a long-span suspension bridge with damped outriggers for suppressing vortex-induced vibrations. *Engineering Structures*. 2023; 286:115959. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.115959
8. Fujino Y., Siringoringo D.M., Ikeda Y., Nagayama T., Mizutani T. Research and implementations of structural monitoring for bridges and buildings in Japan. *Engineering*. 2019; 5(6):1093-1119. DOI: 10.1016/j.eng.2019.09.006
9. Isić S., Mehremić S., Karabegović I., Husak E. Systems for passive and active vibration damping. *New Technologies, Development and Application II*. 2019; 96-104. DOI: 10.1007/978-3-030-18072-0_10
10. Zhang F., Liu J., Tian J. Analysis of the vibration suppression of double-beam system via nonlinear switching piezoelectric network. *Machines*. 2021; 9(6):115. DOI: 10.3390/machines9060115
11. Dumitriu M. Study on the effect of damping asymmetry of the vertical suspension on the railway bogie vibrations. *Symmetry*. 2022; 14(2):327. DOI: 10.3390/sym14020327
12. Huang K., Li T., Xu W., Cao L. Effects of nonlinear damping on vibrations of microbeam. *Applied Sciences*. 2022; 12(6):3206. DOI: 10.3390/app12063206
13. Mazur K., Rzepecki J., Pietruszewska A., Wrona S., Pawelczyk M. Vibroacoustical performance analysis of a rigid device casing with piezoelectric shunt damping. *Sensors*. 2021; 21(7):2517. DOI: 10.3390/s21072517
14. Sidorov V.N., Badina E.S. Computer simulation of structural vibration damping with allowance for nonlocal properties. *International Journal for Computational*

Civil and Structural Engineering. 2020; 16(4):86-91. DOI: 10.22337/2587-9618-2020-16-4-86-91

15. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. Non-local in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021; 17(4):14-21. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-4-14-21

16. Sidorov V.N., Badina E.S. Finite element modelling of composite beams vibration taking into account damping nonlocal in time. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2021; 27(1):65-72. DOI: 10.33113/mkml.ras.2021.27.01.065_072.05. EDN CGFFUZ. (rus.).

17. Rogacheva N.N. Passive vibration suppression of structures in the vicinity of natural frequencies using piezoeffect. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2019; 15(2):125-134. DOI: 10.22337/2587-9618-2019-15-2-125-134

18. Rogacheva N.N. The dynamic behaviour of piezoelectric laminated bars. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2007; 71(4):494-510. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2007.09.004

19. Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. *Physical Acoustics*. 1964; 169-270. DOI: 10.1016/b978-1-4832-2857-0.50009-5

Received October 9, 2023.

Adopted in revised form on October 13, 2023.

Approved for publication on October 23, 2023.

B I O N O T E S: **Vladimir N. Sidorov** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Department, Department of the Department of Informatics and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ID RSCI: 691222, Scopus: 39161892000, ResearcherID: C-3057-2018; SidorovVN@mgsu.ru;

Nelly N. Rogacheva — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Informatics and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ID RSCI: 17172, Scopus: 0009-0009-3409-378X; RogachevaNN@mgsu.ru;

Yulia G. Zheglova — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Systems, Technologies and Automation in Construction; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ID RSCI: 940377, Scopus: 57202228987, ResearcherID: AAC-8875-2022, ORCID: 0000-0001-8121-8535; JeglovaYUG@mgsu.ru.

Contribution of the authors: all authors made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

The authors declare no conflict of interest.