

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 69.04

DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.857-877

## Обзор и сравнительный анализ критериев прочности для моделирования нелинейного поведения бетона

Георгий Игоревич Ремпель<sup>1</sup>, Александр Михайлович Бударин<sup>1</sup>,  
Андрей Петрович Долгих<sup>1</sup>, Алексей Александрович Камзолкин<sup>2</sup>,  
Владимир Николаевич Алехин<sup>3</sup>

<sup>1</sup> АО «Институт Гидропроект»; г. Москва, Россия;

<sup>2</sup> Научно-исследовательский центр «СтаДиО» (АО НИЦ «СтаДиО»); г. Москва, Россия;

<sup>3</sup> Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ);  
г. Екатеринбург, Россия

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** В последние десятилетия значительное развитие получили численные методы расчета бетонных и железобетонных конструкций, учитывающие физические нелинейное поведение материала. Подобные методы, по сравнению с аналитическими, позволяют точнее описать работу материала и отразить основные особенности его напряженно-деформированного состояния. Это дает возможность выполнять более экономичные, а в ряде случаев, и более надежные конструктивные решения. Одну из ключевых ролей в численных методах занимает понятие предельной поверхности, которая выражается в виде условия (критерия прочности), разделяя области упругой и пластической работы материала. Критерий прочности для бетона должен соответствовать опытным данным, обеспечивать математически стабильное, уникальное решение, а также иметь набор параметров, легко определяемый на основании эмпирических зависимостей или результатов испытаний. История создания и совершенствования предельных поверхностей бетона насчитывает десятки отечественных и зарубежных работ, многие из которых не удовлетворяют этим требованиям. Цель исследования — сравнительный анализ наиболее распространенных в мировой практике критериев прочности бетона.

**Материалы и методы.** В качестве основы использованы результаты анализа и систематического обобщения данных, полученных из отечественных и зарубежных источников.

**Результаты.** Проведен детальный анализ наиболее распространенных отечественных и зарубежных критериев прочности бетона.

**Выводы.** Согласно результатам проведенного анализа, выполнено сравнение предельных поверхностей бетона на предмет соответствия ряду требований.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** бетон, критерий прочности, предельная поверхность, численное моделирование, модель материала, физическая нелинейность, прочность, разрушение

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Ремпель Г.И., Бударин А.М., Долгих А.П., Камзолкин А.А., Алехин В.Н. Обзор и сравнительный анализ критериев прочности для моделирования нелинейного поведения бетона // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 6. С. 857–877. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.857-877

Автор, ответственный за переписку: Георгий Игоревич Ремпель, g.rempel@hydroproject.ru.

## Review and comparative analysis of strength criteria for modelling non-linear behaviour of concrete

Georgy I. Rempel<sup>1</sup>, Alexander M. Budarin<sup>1</sup>, Andrey P. Dolgikh<sup>1</sup>,  
Alexey A. Kamzolkin<sup>2</sup>, Vladimir N. Alekhin<sup>3</sup>

<sup>1</sup> JSC «Institute Hydroproject»; Moscow, Russian Federation;

<sup>2</sup> Scientific Research Center “StaDiO” (JSC NRC “Stadyo”); Moscow, Russian Federation;

<sup>3</sup> Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU);  
Yekaterinburg, Russian Federation

ABSTRACT

**Introduction.** In recent decades, numerical methods for calculating concrete and reinforced concrete structures have developed significantly, taking into account the physically nonlinear behavior of the material. Such methods, in comparison with analytical ones, make it possible to describe the work of the material more accurately and reflect the main features of its stress–strain state. This makes it possible to perform more cost-effective and, in some cases, more reliable design solutions. Concept of the limit surface plays an important role in numerical methods. Limit surface, which is expressed by a condition (strength criterion), separates the elastic and plastic region of the material. Strength criteria must correspond to experimental data, provide a mathematically stable unique solution, and also have a set of parameters that can be easily determined from empirically based expressions or test data. The history of creation and improvement of concrete limit surfaces includes dozens of domestic and foreign works, many of which do not meet these requirements. The purpose of the current work is a comparative analysis of the most common strength criteria of concrete.

**Materials and methods.** This study is based on the analytical generalization and systematization of the data received from domestic and foreign sources.

**Results.** A detailed analysis of the most common domestic and foreign concrete limit surfaces was carried out.

**Conclusions.** According to the analysis results, the comparison of the concrete limit surfaces was performed.

**KEYWORDS:** concrete, strength criteria, limit surface, numerical modelling, material model, physical nonlinearity, strength, failure

**FOR CITATION:** Rempel G.I., Budarin A.M., Dolgikh A.P., Kamzolkin A.A., Alekhin V.N. Review and comparative analysis of strength criteria for modelling non-linear behaviour of concrete. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2024; 19(6):857-877. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.857-877 (rus.).

Corresponding author: Georgy I. Rempel, g.rempel@hydroproject.ru.

ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия значительное развитие получили численные методы расчета бетонных и железобетонных конструкций, учитывающие физически нелинейное поведение материала. Подобные методы, по сравнению с аналитическими, позволяют точнее описать работу материала и отразить основные особенности его напряженно-деформированного состояния (НДС). Это дает возможность выполнять более экономичные, а в ряде случаев, и более надежные конструктивные решения. Одну из ключевых ролей в численных методах занимает понятие предельной поверхности, которая выражается в виде условия (критерия прочности), разделяя области упругой и пластической работы или разрушения материала. В общем виде условие имеет следующий вид:

$$f(\sigma_{ij}) \leq 0, \tag{1}$$

где  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений. При выполнении условия (1) материал работает упруго. Предельная поверхность строится в трехмерном пространстве, где координаты точки представлены величинами главных напряжений (пространство Хейга-Вестергаарда). Визуализация пространства главных напряжений представлена на рис. 1.

Таким образом, критерий может быть сформулирован как с помощью главных напряжений, так и с помощью инвариантов тензора напряжений. Предельная поверхность, которая является геометрической интерпретацией критерия прочности, может быть использована в качестве поверхности нагружения, прочности или текучести в рамках феноменологической модели материала, а также быть частью более простых численных или аналитических подходов. История создания и совершенствования предельных поверхностей бетона насчитывает десятки отечественных и зарубежных работ, многие из ко-

торых были разработаны еще в XX в. Значительная часть существующих поверхностей имеет ряд проблем и допущений, ограничивающих их применение в рамках численных методов.

Основные требования к предельной поверхности бетона можно сформулировать следующим образом:

1. Поверхность должна соответствовать результатам опытов. Данное требование подразумевает:

- отсутствие аффинного подобия девиаторных сечений, соответствующих разным степеням гидростатического обжатия (со стремлением величины гидростатического обжатия к минус бесконечности форма девиаторного сечения меняется от треугольной к круглой). Геометрическая интерпретация данного условия изображена на рис. 2;

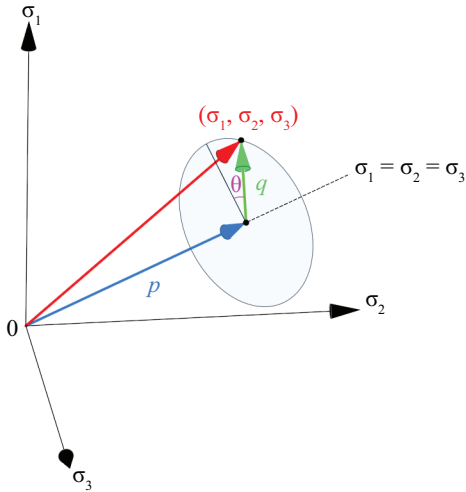


Рис. 1. Визуализация пространства главных напряжений Хейга-Вестергаарда

Fig. 1. Visualization of the Haigh-Westergaard principal stress space

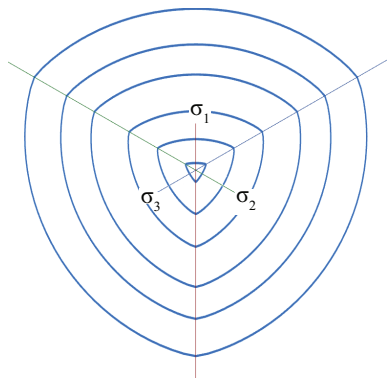


Рис. 2. Отсутствие аффинного подобия девиаторных сечений

Fig. 2. Absence of the affine similarity of the deviatoric sections

• зависимость предельной поверхности от трех инвариантов:  $I_1$  (первый инвариант тензора напряжений),  $J_2$  и  $J_3$  (второй и третий инварианты девиато-

ра тензора напряжений соответственно). Влияние  $I_1$  на функцию предельной поверхности изменяет предел прочности в зависимости от величины гидростатического обжатия. Учет зависимости от  $J_3$  позволяет описывать предельную поверхность с формой девиаторного сечения, отличной от круга. Демонстрация влияния вышеуказанных инвариантов на форму предельной поверхности приведена в табл. 1;

• зависимость функции от второго главного напряжения. Данное условие позволяет отразить криволинейность поверхности в девиаторном сечении. Влияние второго главного напряжения на форму девиаторного сечения поверхности показано на рис. 3.

2. Критерий должен обеспечивать математически стабильное, уникальное решение, что требует выполнения следующих условий:

• отсутствие мнимых упругих зон. Поясним данное требование на примере. На рис. 4, а изображено меридиональное сечение предель-

Табл. 1. Зависимость формы предельной поверхности от инвариантов тензора напряжений

Table 1. Dependence of the limiting surface shape on the stress tensor invariants

Функция Function	Девиаторное сечение Deviatoric section	Меридиональное сечение Meridional section	Общий вид General view
$f(J_2)$			
$f(I_1, J_2)$			
$f(I_1, J_2, J_3)$			

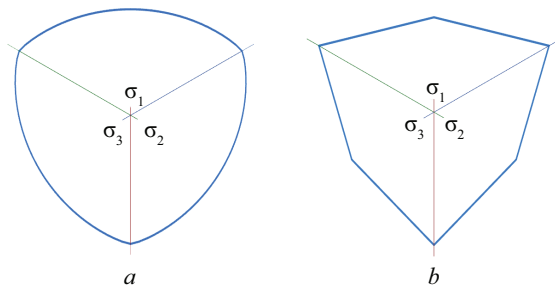


Рис. 3. Влияние формы девиаторного сечения поверхности от второго главного напряжения  $\sigma_2$ :  $a$  — поверхность, зависящая от  $\sigma_2$ ;  $b$  — поверхность, независимая от  $\sigma_2$

Fig. 3. The influence of the shape of the deviatoric cross section:  $a$  — surface dependent on  $\sigma_2$ ;  $b$  — surface independent of  $\sigma_2$

ной поверхности. Выполняя нагрузку образца при фиксированном гидростатическом обжатии последовательным увеличением девиаторного напряжения, точка будет принимать положения 1–5. Точка 1 находится в упругой зоне ( $f < 0$ ), точка 2 соответствует выходу на поверхность ( $f = 0$ ), в точке 3 происходит пластическая работа материала ( $f > 0$ ). Для того чтобы результат решения

численной задачи был уникальным и не зависел от размера шага нагружения, необходимо чтобы в точках 4 и 5 выполнялось условие  $f > 0$  (рис. 5). Однако для критерия с мнимой упругой зоной в точке 4 снова удовлетворяется условие  $f = 0$  с дальнейшим переходом в область упругой работы (точка 5,  $f < 0$ ). Таким образом, для траектории нагружения существует две точки (точки 2 и 4), в которых выполняется условие  $f = 0$  (см. рис. 4,  $b$ ).

Для численных методов теории пластического течения дополнительно необходимо удовлетворение следующих требований:

- условие выпуклости поверхности (удовлетворение постулата Друкера). Согласно постулату устойчивости Друкера в цикле нагружения–разгрузки добавочные напряжения выполняют положительную работу, если имели место пластические деформации. Из данного постулата следует, что меридиональные и девиаторные сечения предельной поверхности должны быть выпуклыми;
- поверхность должна обладать минимальным количеством сингулярных зон. Под зоной сингулярности подразумевается область, в которой поверхность является недифференцируемой. Наличие сингулярных зон требует введения дополнительных

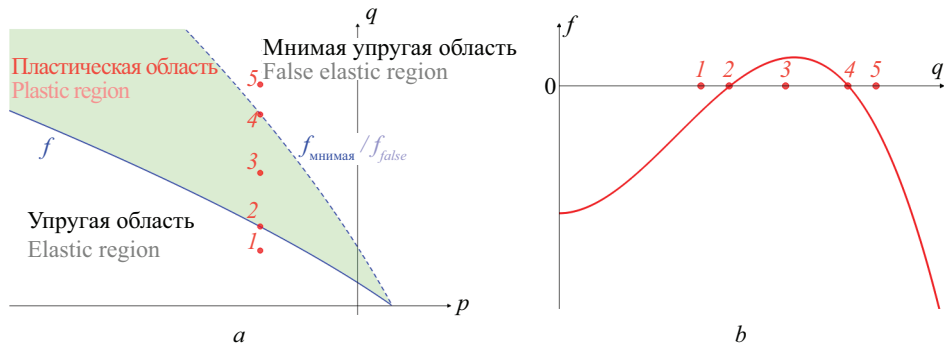


Рис. 4. Предельная поверхность с мнимой упругой областью:  $a$  — траектория нагружения в меридиональном сечении;  $b$  — зависимость значения функции  $f$  от девиаторного инварианта  $q$  при фиксированном значении  $p$  и угла подобия

Fig. 4. Limit surface with false elastic region:  $a$  — loading trajectory in meridional section;  $b$  — dependence of the  $f$  function from deviatoric invariant  $q$  with fixed value of  $p$  and similarity angle

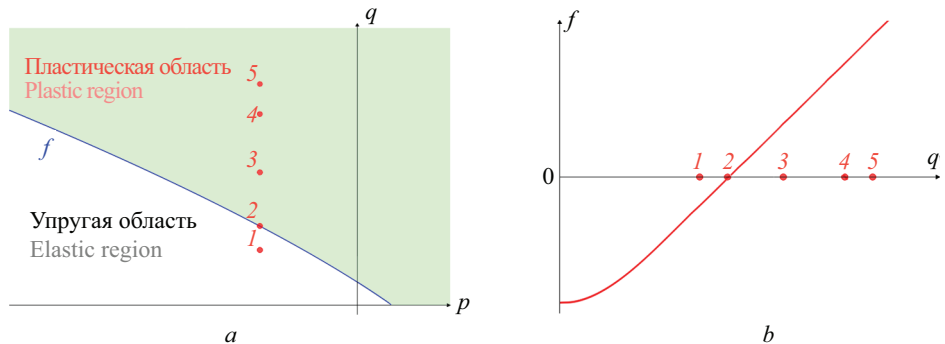


Рис. 5. Предельная поверхность без мнимой упругой области:  $a$  — траектория нагружения в меридиональном сечении;  $b$  — зависимость значения функции  $f$  от девиаторного инварианта  $q$  при фиксированном значении  $p$  и угла подобия

Fig. 5. Limit surface without false elastic region:  $a$  — loading trajectory in meridional section;  $b$  — dependence of the  $f$  function from deviatoric invariant  $q$  with fixed value of  $p$  and similarity angle



условий, которые являются одной из причин проблем со стабильностью решения и точностью результатов [1].

3. Параметры, используемые для построения поверхности, должны легко определяться на основании широко распространенных опытов (прочность на одноосное сжатие и растяжение) или эмпирических зависимостей. Данное требование оказывает существенное влияние на удобство использования критерия прочности.

Выполнение этих требований обеспечивает соответствие экспериментальным данным, стабильность численного решения и удобство применения поверхности. Таким образом, актуальной является задача определения критериев прочности бетона, наилучшим образом соответствующих указанным выше требованиям.

Цель исследования — критическое сравнение наиболее распространенных в мировой практике предельных поверхностей бетона. Ранее подобный анализ уже выполнялся в работах [2–4]. Однако авторами не был рассмотрен ряд современных предельных поверхностей, а также отсутствовало их сравнение с точки зрения стабильности работы в рамках численных методов и удобства использования.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Наиболее удобным для визуального представления поверхности является геометрически правильная, цилиндрическая система координат Хейга-Вестергаарда, представленная следующими инвариантами в качестве осей.

Гидростатический инвариант, численно равный норме шарового тензора напряжений:

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \sigma_o \cdot \sqrt{3}, \quad (2)$$

где  $I_1$  — первый инвариант тензора напряжений;  $\sigma_o$  — средние (октаэдрические) напряжения.

Девiatorный инвариант, численно равный норме девиатора тензора напряжений:

$$q = \sqrt{\frac{1}{3}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)} = \sqrt{2 \cdot J_2} = \sqrt{5} \cdot \tau_a = \sqrt{3} \cdot \tau_o = \sqrt{3/2} \cdot \sigma_e, \quad (3)$$

где  $J_2$  — второй инвариант девиатора тензора напряжений;  $\tau_a$  — функция девиаторных напряжений из исследования [5];  $\tau_o$  — октаэдрические напряжения.

Угол подобия (4), изменяющийся в диапазоне от 0 до 60°, или параметр Лоде-Надаи (5), принимающий значения от –1 до 1:

$$\theta = \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right); \quad (4)$$

$$\mu = \frac{2 \cdot \sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}; \quad (5)$$

$$J_3 = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3, \quad (6)$$

где  $J_3$  — третий инвариант девиатора тензора напряжений (6);  $s_1, s_2, s_3$  — главные девиаторные напряжения. Меридиан сжатия соответствует значениям  $\theta = 60^\circ$  и  $\mu = 1$ , меридиан растяжения соответствует значениям  $\theta = 0^\circ$  и  $\mu = -1$ .

В качестве констант для построения предельных поверхностей бетона используются следующие прочностные параметры:  $R_b$  — предел прочности на одноосное сжатие;  $R_{bt}$  — предел прочности на одноосное растяжение;  $R_{ct}$  — предел прочно-

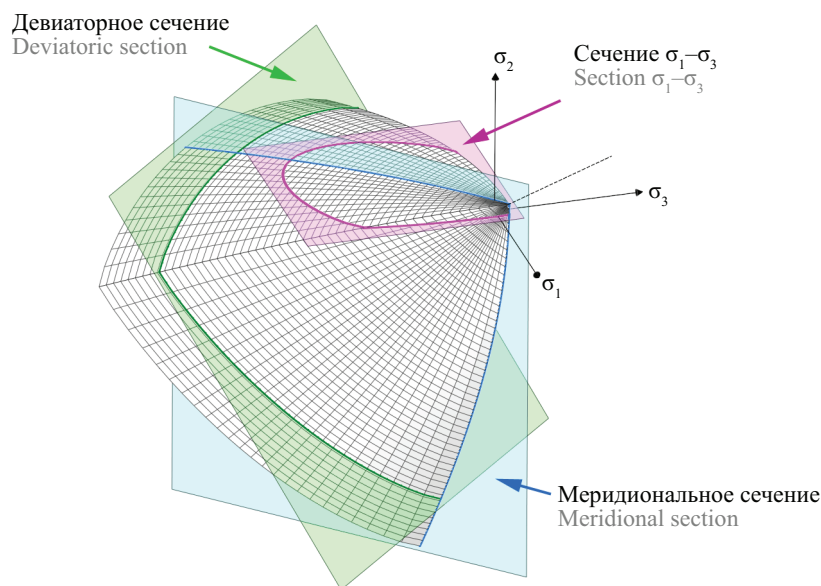


Рис. 6. Расположение сечений для сравнения поверхностей с опытными данными

Fig. 6. Location of cross-sections for comparison of surfaces with experimental data

сти при чистом сдвиге;  $R_{2b}$  — предел прочности при двухосном равномерном сжатии;  $R_{2t}$  — предел прочности при двухосном равномерном растяжении;  $R_{3b} = \sigma^*$  — точка начала контракции (пластической сжимаемости) при трехосном равномерном сжатии;  $R_{3t}$  — предел прочности при трехосном равномерном растяжении;  $\sigma_{com}$  и  $\tau_{com}$  — гидростатическая и девиаторная координаты точки на меридиане сжатия, соответствующей поверхности прочности при неравномерном трехосном сжатии ( $\sigma_3 < \sigma_1 = \sigma_2 < 0$ ). Для каждого критерия прочности, упоминаемого в работе, в скобках указаны параметры, необходимые для его построения. На рис. 7, 9, 12, 14, на которых изображены предельные поверхности в пространстве главных напряжений, красным цветом выделены сингулярности, голубым — области, противоречащие требованию постулата Друкера. Сравнение поверхностей с результатами опытов выполняется в пространстве главных напряжений в цилиндрической системе координат для меридионального и девиаторных сечений (результаты опытов, представленные в трудах [6–23]), а также в сечении по плоскости  $\sigma_1$ – $\sigma_3$  (опыты [24–26]). Расположения сечений показаны на рис. 6.

Для построения поверхностей авторами были использованы программы Mathcad Prime и SpaceClaim в сочетании с языком программирования Python.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В первую очередь стоит упомянуть классические критерии прочности, которые в разное время применялись для описания работы бетона, хотя изначально были разработаны для описания поведения других материалов. К ним можно отнести критерии Mises ( $R_{bt}/R_b$ ) [27], Rankine ( $R_{bt}$ ) [28], Mohr – Coulomb ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [4], Drucker – Prager ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [4], Tresca ( $R_{bt}/R_b$ ) [3]. Поверхности данной группы не подходят для описания работы бетона, так как у некоторых из них отсутствует зависимость от  $J_3$  (поверхности Mises, Drucker – Prager), от  $I_1$  (поверхности Mises, Tresca), от второго главного напряжения  $\sigma_2$  (поверхности Rankine, Mohr – Coulomb, Tresca). Все поверхности обладают аффинным подобием девиаторных сечений, имеют существенное отклонение от опытных данных и не рекомендуются для использования в контексте моделирования работы бетона. Детальный анализ этих критериев прочности выполнен в исследованиях [3, 4] и в данной статье представлен не будет.

Помимо классических существует ряд критериев прочности, которые создавались специально для моделирования поведения бетона, но тем не менее имеют существенное отклонение от экспериментальных данных. К ним относятся отечественные работы Г.А. Гениева ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ,  $R_{ct}$ ) [29], Г.А. Гениева – Н.М. Аликовой ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ,  $R_{ct}$ ,  $R_{2c}$ ) [30], Е.С. Лейтеса ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [31], А.В. Яшина ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [32], детально рассмо-

тренные в статье [2], а также зарубежные критерии Bresler – Pister ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [33], Leon ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [34], Hoek – Brown ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ) [4], Reimann ( $R_b$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) [3], трех-параметрический Willam – Warnke ( $R_b$ ,  $R_{bt}$ ,  $R_{2b}$ ) [5], рассмотренные в работах [3, 4]. На основании выводов, сделанных в публикациях [2–4], можно заключить, что критерии имеют значительное отклонение от экспериментальных данных в областях неравномерного двухосного сжатия (Г.А. Гениев – Н.М. Аликова, А.В. Яшин, Leon, Hoek – Brown, Bresler – Pister), сжатия-растяжения (Г.А. Гениев, Г.А. Гениев – Н.М. Аликова, Leon, Bresler – Pister), области трехосного сжатия (все поверхности). Эти критерии прочности также не рекомендуется использовать для моделирования поведения бетона.

В настоящей работе будет выполнен детальный анализ критериев, которые либо не были рассмотрены в работах [2–4], либо рассматривались только путем сопоставления предельной поверхности с результатами опытов без учета требований к поверхности с точки зрения удобства использования и математической стабильности. Для более удобного представления критерии разделены на несколько групп.

В первой группе рассмотрим следующие критерии прочности:

1. Критерий Bigoni – Piccolroaz ( $M$ ,  $p_c$ ,  $c$ ,  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) [35] (уравнения (7)–(9)) позиционируется авторами в качестве универсального критерия, позволяющего описывать поведение широкого спектра материалов (бетон, грунт, керамика и т.д.):

$$f_{BP} = F(p) + \frac{\sigma_e}{g(\theta)} \leq 0; \quad (7)$$

$$F(p) = \begin{cases} -M \cdot p_c \cdot \sqrt{\left( \frac{p+c}{p_c-c} - \left( \frac{p+c}{p_c-c} \right)^m \right) \times} \\ \times \left[ 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \frac{p+c}{p_c-c} + \alpha \right]; \\ + \infty; \end{cases} \quad (8)$$

$$1/g(\theta) = \cos(\beta \cdot \pi/6 - \cos^{-1}(\gamma \cdot \cos(3 \cdot \theta))). \quad (9)$$

Параметры, требуемые для построения поверхности, не имеют прямого отношения к прочностным характеристикам бетона, получаемым в опытах, что существенно затрудняет их подбор и использование критерия в целом. Авторами критерия представлены рекомендованные для моделирования бетона величины параметров [36], которые были использованы в данной работе при анализе поверхности.

Поверхность, описываемая критерием, имеет неудовлетворительное совпадение с опытными данными во всех представленных сечениях (рис. 8). Прочность бетона переоценивается в областях с малыми величинами ( $p/R_b > -1,5$ ) гидростатического

обжатия и недооценивается при больших величинах гидростатического обжатия ( $p/R_b \leq -1,5$ ). Более того, поверхность имеет аффинное подобие девиаторных сечений.

При использовании рекомендованного для бетона набора параметров образуется точечная сингулярность в вершине поверхности в области трехосного сжатия (см. рис. 7, а).

2. Критерий Drucker – Prager Concrete ( $R_b, R_{bt}, R_{2b}$ )<sup>1</sup>, используемый в рамках одноименной модели бетона в конечно-элементном комплексе ANSYS, состоит из двух функций:  $f_{DPt}$  (10) и  $f_{DPc}$  (11). В отличие от классической поверхности Drucker – Prager ( $R_b, R_{bt}$ ) [4], которая переоценивает прочность бетона при больших гидростатических обжатиях, для критерия Drucker – Prager Concrete была произведена попытка решить эту проблему путем добавления дополнительной функции  $f_{DPc}$ , корректирующей форму предельной поверхности:

$$f_{DPt} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \beta_t(R_b, R_{bt}) \cdot \sigma_0 - \sigma_{yt}(R_b, R_{bt}) \leq 0; \quad (10)$$

$$f_{DPc} = \frac{\sigma_e}{\sqrt{3}} + \beta_c(R_b, R_{2b}) \cdot \sigma_0 - \sigma_{yc}(R_b, R_{2b}) \cdot \Omega_c \leq 0. \quad (11)$$

Несмотря на введение корректирующей функции, поверхность имеет неудовлетворительное совпадение с опытными данными в меридиональном и девиаторных сечениях (рис. 8, а, с), переоценивая прочность бетона при малых величинах гидростатического обжатия и недооценивая при больших величинах. Наличие аффинного подобия девиаторных сечений, а также отсутствие зависимости поверхности от третьего инварианта девиатора тензора напряжений  $J_3$  также оказывает негативное влияние на совпадение с опытными данными. В сечении  $\sigma_1 - \sigma_3$  поверхность совпадает с опытными данными (рис. 8, b).

<sup>1</sup> ANSYS 2023R1 ANSYS Mechanical APDL. Material reference, 2023.

Поверхность имеет сингулярность в вершине в области трехосного растяжения, а также в области перехода между поверхностями  $f_{DPt}$  и  $f_{DPc}$  (см. рис. 7, b).

3. Критерий Lee – Fenves ( $R_b, R_{bt}, R_{2b}$ )<sup>2</sup>, который применен в модели бетона конечно-элементного комплекса ABAQUS, описывается уравнением:

$$f_{Lee} = \frac{1}{1 - \alpha(R_b, R_{2b})} \times (\sigma_e - 3 \cdot \alpha(R_b, R_{2b}) \cdot \sigma_0 + \beta(R_b, R_{2b}, R_{bt}) \times \langle \sigma_{\max} \rangle - \gamma \cdot \langle -\sigma_{\max} \rangle) - R_b \leq 0. \quad (12)$$

Поверхность имеет аффинное подобие девиаторных сечений, а также линейную функцию в меридиональном направлении, что приводит к завышению прочности бетона при больших величинах гидростатического обжатия в меридиональном сечении (рис. 8, а). В остальных сечениях поверхность соответствует результатам опытов.

Для описания поверхности применяются скобки Маколея (см. формулу (12)), представляющие собой условие перехода между частями поверхности. Использование условия ведет к образованию ломаной линии в меридиональном сечении, что создает сингулярность в месте перехода (см. рис. 7, с). Кроме того, поверхность имеет точечную сингулярность в области трехосного растяжения, а также сингулярность в виде ребра на меридиане сжатия.

Общий вид поверхностей первой группы представлен на рис. 7. Сравнение поверхностей первой группы с результатами опытов приведено на рис. 8.

Во второй группе рассмотрим следующие критерии:

1. Критерий Л.Ю. Соловьева ( $R_b, R_{bt}$ ) [37] является составным и описывается уравнениями  $f_{c1}$  (13) (основная поверхность) и  $f_{c2}$  (14) (шатер сжатия):

<sup>2</sup> Simulia, Abaqus 2016 analysis user's manual. Providence, RI : Simulia, 2016.

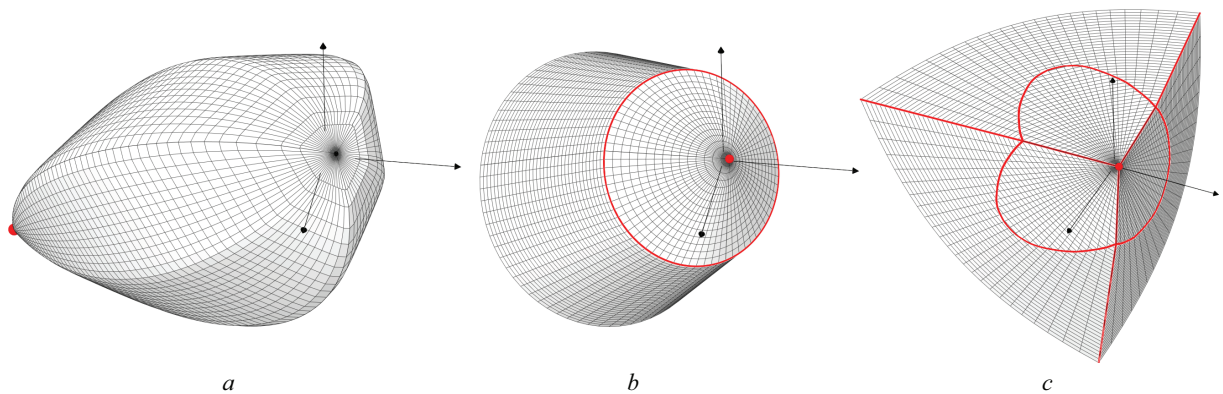


Рис. 7. Предельные поверхности Bigoni – Piccolroaz (а); Drucker – Prager Concrete (b); Lee – Fenves (с) в пространстве главных напряжений

Fig. 7. Bigoni – Piccolroaz (a); Drucker – Prager Concrete (b); Lee – Fenves (c) limit surfaces in principal stress space

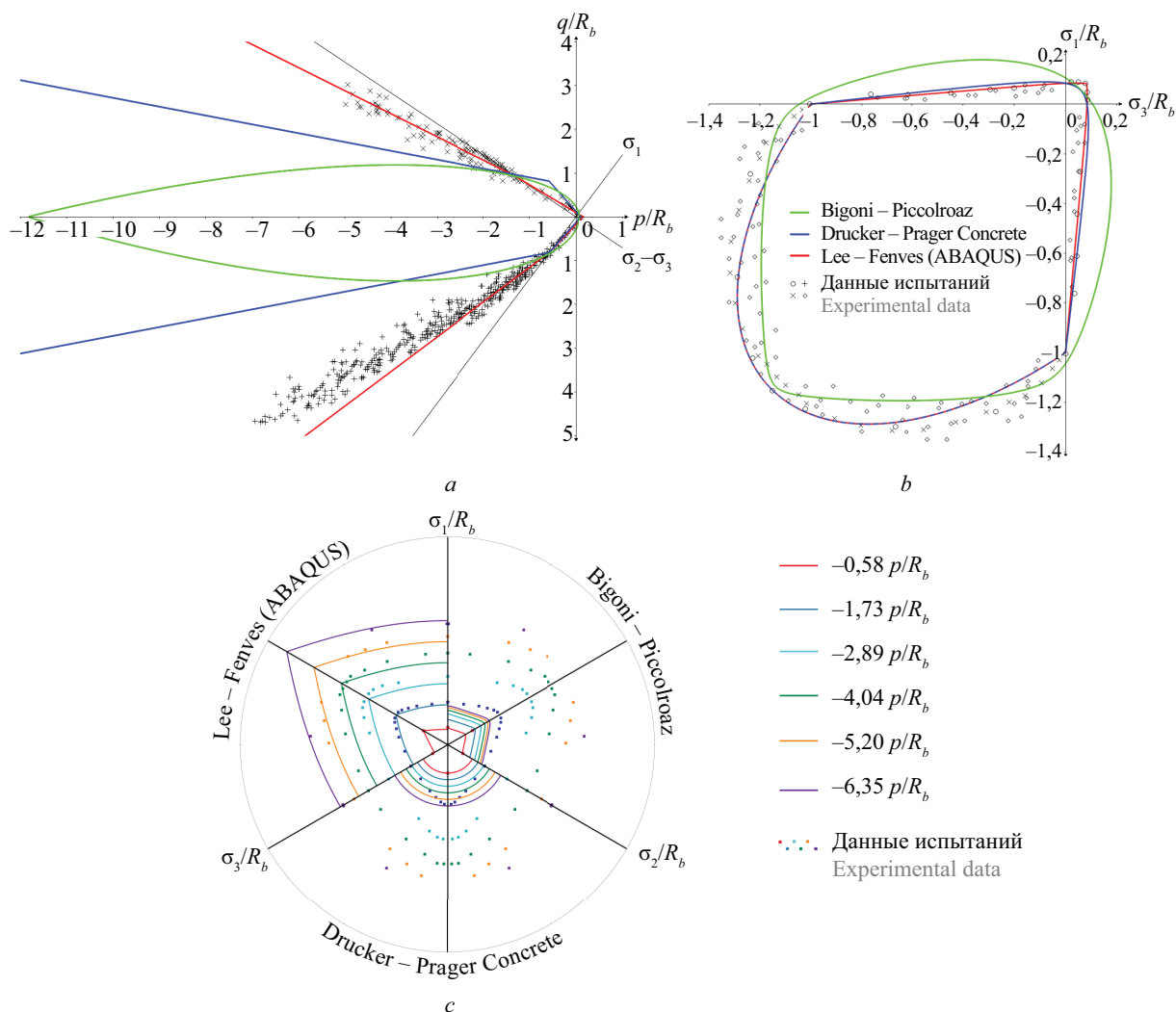


Рис. 8. Сравнение поверхностей первой группы с результатами опытов: меридиональное сечение (a); сечение  $\sigma_1 - \sigma_3$  (b); девиаторные сечения (c)

Fig. 8. Comparison of the first group with the results of experiments: meridional section (a); section  $\sigma_1 - \sigma_3$  (b); deviatoric section (c)

$$f_{C1} = \left( \frac{\tau_0}{R_b} \right)^2 + a_1 \cdot \frac{J_3}{R_b^3} + c_1 \leq 0; \quad (13)$$

$$f_{C2} = d_0 \cdot \frac{\tau_0}{R_b} + \frac{\sigma_0}{R_b} - \sigma^* \leq 0. \quad (14)$$

Поверхность недооценивает прочность бетона в девиаторном сечении (рис. 10, c) при величинах гидростатического обжатия  $p/R_b < -2$ , также завышает прочность бетона в сечении  $\sigma_1 - \sigma_3$  (рис. 10, b). В меридиональном сечении поверхность в целом соответствует опытным данным (рис. 10, a).

Сингулярные зоны присутствуют в вершинах в областях трехосного сжатия и растяжения, а также в зоне сопряжения частей  $f_{C1}$  и  $f_{C2}$  (см. рис. 9, a).

Критерий  $f_{C1}$  содержит мнимую упругую зону (см. рис. 4), наличие которой обусловлено тем, что для определенных видов напряженного состояния на меридиане сжатия условие  $f_{C1} = 0$  выполняется более чем в одной точке. Наличие этой про-

блемы затрудняет использование критерия в рамках численных методов.

2. Пятипараметрический критерий Willam – Warnke ( $R_b, R_{bt}, R_{2b}, \rho_1, \xi_1, \rho_2, \xi_2$ ) [5] описывается уравнением:

$$f_{ww} = \frac{1}{r(\sigma_0, \theta)} \cdot \frac{\tau_a}{R_b} - 1 \leq 0. \quad (15)$$

Для хорошего совпадения с опытными данными на меридиональном и девиаторных сечениях необходим подбор параметров  $\rho_1, \xi_1, \rho_2, \xi_2$ , значения которых могут быть получены на основании результатов трехосных испытаний бетона. Параметры  $\rho_1$  и  $\xi_1$  представляют собой девиаторную и гидростатическую координаты точки на меридиане сжатия, через которую проходит поверхность; параметры  $\rho_2$  и  $\xi_2$  выполняют аналогичную функцию для меридиана растяжения. Эмпирические зависимости и рекомендации по получению параметров в первоисточнике отсутствуют. Также поверхность завышает прочность бетона в сечении  $\sigma_1 - \sigma_3$  (рис. 10, b).



Ввиду того, что поверхность строится на основании двух вертикальных парабол, описывающих меридианы сжатия и растяжения, поверхность является замкнутой как в области трехосного растяжения, так и в области трехосного сжатия. Параболы с разными коэффициентами могут иметь пересечение только в одной точке на гидростатической оси. Поэтому для замыкания поверхности в области трехосного сжатия на меридиане растяжения выполнен резкий излом (см. рис. 10, а), создающий дополнительную точечную сингулярность и противоречащий требованию постулата Друкера. Кроме того, поверхность имеет сингулярности в вершинах замыкания (см. рис. 9, б). Наличие замыкания поверхности в области трехосного сжатия не упоминается авторами и не подразумевается в качестве рабочей области. Таким образом, параметры  $\rho_1, \xi_1, \rho_2, \xi_2$  могут быть использованы для отдаления области замыкания от диапазона, в котором происходит работа материала.

3. Составной критерий Willam – Warnke ( $R_b, R_{bt}, R_{2b}, f_1, f_2, \sigma_h$ )<sup>3</sup>, использованный для модели бетона Concrete в конечно-элементном комплексе ANSYS, описывается уравнениями (16)–(19):

$$f_{WWA1} = \frac{\tau_a}{R_b} - \frac{2 \cdot r_2 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos \eta + r_2 \cdot (r_1 \cdot 2 - r_2) \times}{4 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos^2 \eta + (r_2 - r_1 \cdot 2)^2} \times \sqrt{4 \cdot (r_2^2 - r_1^2) \cdot \cos^2 \eta + 5 \cdot r_1^2 - 4 \cdot r_1 \cdot r_2} \leq 0; \quad (16)$$

<sup>3</sup> ANSYS 2023R1 ANSYS Mechanical APDL. Feature Archive, 2023.

$$f_{WWA2} = \frac{\sqrt{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}{\sqrt{15} \cdot R_b} - \left(1 - \frac{\sigma_1}{R_{bt}}\right) \times \frac{2 \cdot p_2 \cdot (p_2^2 - p_1^2) \cdot \cos \eta + p_2 \cdot (p_1 \cdot 2 - p_2) \times}{4 \cdot (p_2^2 - p_1^2) \cdot \cos^2 \eta + (p_2 - p_1 \cdot 2)^2} \times \sqrt{4 \cdot (p_2^2 - p_1^2) \cdot \cos^2 \eta + 5 \cdot p_1^2 - 4 \cdot p_1 \cdot p_2} \leq 0; \quad (17)$$

$$f_{WWA3} = \frac{\sigma_{1,2}}{R_b} - \frac{R_{bt}}{R_b} \cdot \left(1 + \frac{\sigma_3}{R_b}\right) \leq 0; \quad (18)$$

$$f_{WWA4} = \frac{\sigma_{1,2,3}}{R_b} - \frac{R_{bt}}{R_b} \leq 0, \quad (19)$$

где  $f_{WWA1}$  — критерий для области «сжатие – сжатие – сжатие»;  $f_{WWA2}$  — «сжатие – сжатие – растяжение»;  $f_{WWA3}$  — «сжатие – растяжение – растяжение»;  $f_{WWA4}$  — «растяжение – растяжение – растяжение».

Для построения составного критерия Willam – Warnke требуются значения одноосного сжатия  $f_1$  и двухосного сжатия  $f_2$  при гидростатическом обжатии  $\sigma_h$ . Другими словами,  $f_1$  и  $f_2$  представляют собой компоненты тензора напряжений при заданном высоком значении гидростатического обжатия. В справке программного комплекса даны эмпирические зависимости для нахождения величин  $f_1$  и  $f_2$ . Однако данные зависимости правомерны только для рабочего диапазона, ограниченного величиной средних напряжений  $\sigma_o \leq \sqrt{3} R_b$ . Для больших значений средних напряжений подбор параметров необходимо осуществлять на основании опытных данных.

Построенная с помощью рекомендаций из справки ANSYS поверхность изображена на рис. 10. Можно заключить, что поверхность соответствует опытным данным в меридиональном и девиаторных сечениях (рис. 10, а, б) при величинах гидростатических обжатий  $p/R_b > -2$  и существенно занижает прочность бетона при величинах  $p/R_b \leq -2$ . Кроме того, поверхность завышает прочность бетона в се-

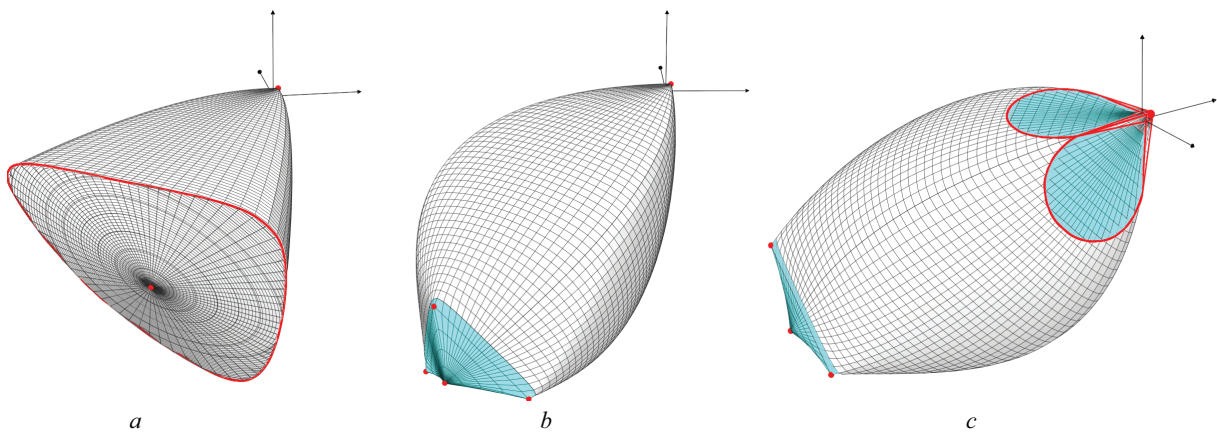


Рис. 9. Предельные поверхности Л.Ю. Соловьева (а); Willam – Warnke (б); Willam – Warnke ANSYS (с) в пространстве главных напряжений

Fig. 9. L. Yu. Solovyov (a); Willam – Warnke (b); Willam – Warnke ANSYS (c) limit surfaces in principal stress space



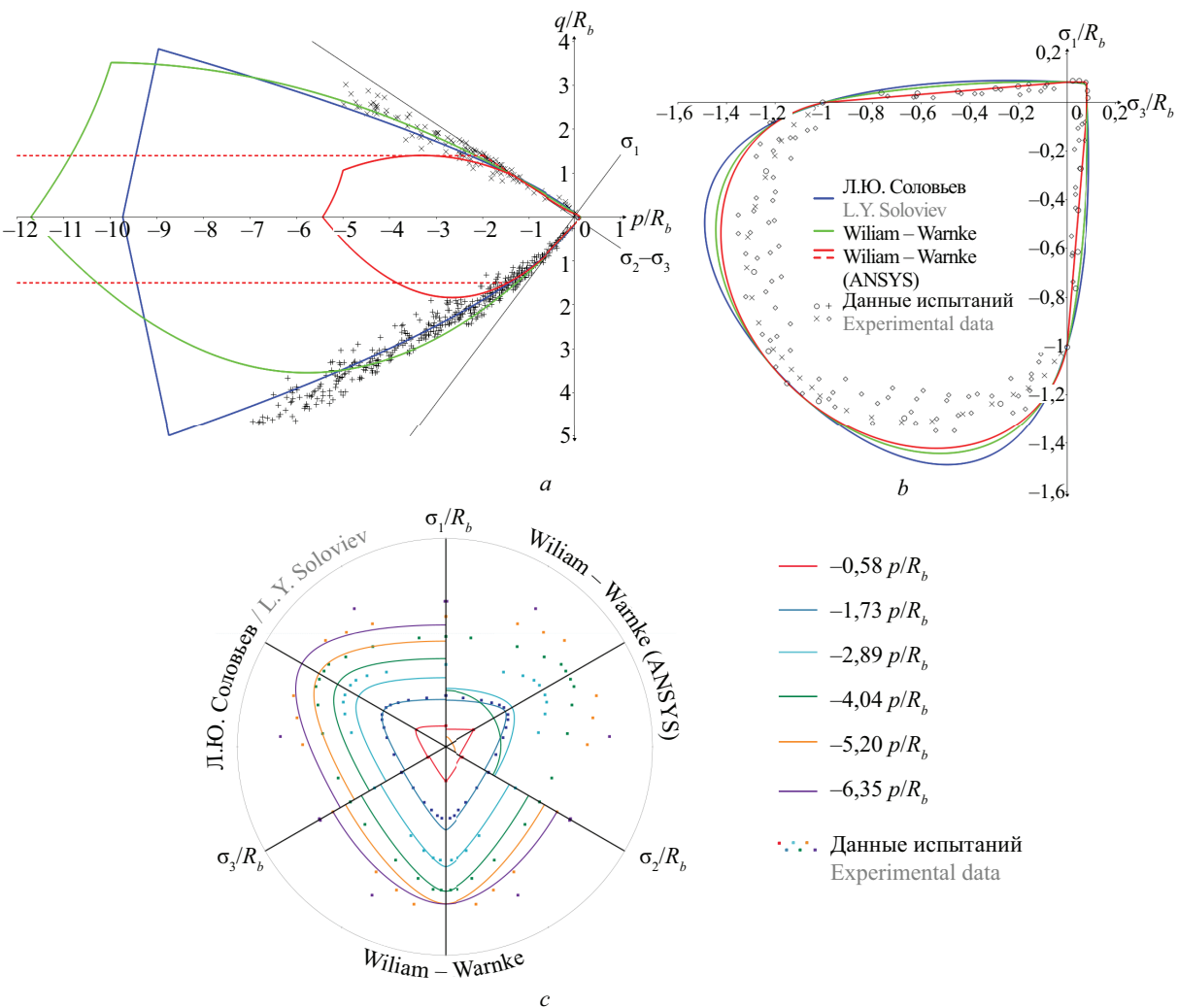


Рис. 10. Сравнение поверхностей второй группы с результатами опытов: меридиональное сечение (a); сечение  $\sigma_1 - \sigma_3$  (b); девиаторные сечения (c)

Fig. 10. Comparison of surfaces of the second group with the results of experiments: meridional section (a); section  $\sigma_1 - \sigma_3$  (b); deviatoric section (c)

чении  $\sigma_1 - \sigma_3$  (рис. 10, b). В ANSYS есть возможность задания минимального количества параметров, ограниченного прочностями на одноосное сжатие  $R_b$  и одноосное растяжение  $R_{bt}$ . Значения остальных параметров выбираются программой автоматически, согласно рекомендациям [37]. В этом случае вместо шатра сжатия при больших гидростатических обжатиях используется цилиндрическая поверхность Mises, обозначенная пунктирной красной линией на рис. 10, a.

Корректное определение величин  $f_1$  и  $f_2$  позволяет добиться хорошего совпадения с результатами опытов аналогично оригинальному пятипараметрическому критерию Willam – Warnke.

Составная поверхность имеет сингулярные зоны в виде вершин в областях трехосного сжатия, растяжения и ребер поверхностей, описываемых уравнениями (18) и (19). Кроме того, в местах сопряжения частей составной поверхности присутствуют резкие ступенчатые переходы, образующие

зоны сингулярности и нарушения постулата Друкера (рис. 9, c). Часть составного критерия, отвечающая за область «сжатие – сжатие – растяжение» (17) также описывает вогнутую поверхность. Составной критерий разрабатывался для модели Concrete, применяемой в сочетании со специальным конечным элементом Solid65. Модель использует в своей основе теорию упругости и служит критерием хрупкого разрушения при различных видах напряженного состояниях. С учетом ряда проблем составной критерий прочности Willam – Warnke не рекомендуется к использованию в рамках численных методов теории пластического течения.

Общий вид поверхностей второй группы представлен на рис. 9. Сравнение поверхностей второй группы с результатами опытов показано на рис. 10.

В третьей группе рассмотрим следующие критерии:

1. Критерий Н.И. Карпенко ( $R_b, R_{bt}, f, n$ ), описанный в диссертации [38] (формула (20)). Для по-

строения оригинального критерия прочности [39] требуется ряд дополнительных параметров, нахождение которых представляет определенные сложности. Часть параметров не имеет прямого отношения к прочностным параметрам бетона и представляет собой безразмерные величины. Кроме того, для нахождения одного из параметров необходима итеративная процедура. В работе [38] даны рекомендации, позволяющие свести к минимуму количество необходимых параметров, качественно не изменяя поверхность:

$$f_K = a \cdot \sigma_1^2 + b \cdot \sigma_3^2 + \sigma_1 \cdot (k_c \cdot (f - b) + \delta_p) \times \\ \times R_b + \sigma_3 \cdot (k_c \cdot b - f \cdot \delta_p) \cdot R_b - \\ - \sigma_1 \cdot \sigma_3 \cdot (a + b + 1 - f) - k_c \cdot f \cdot \delta_p \cdot R_b^2 \leq 0. \quad (20)$$

Поверхность соответствует опытным данным во всех рассматриваемых сечениях.

Параметр  $f$  отвечает за замыкание поверхности в области трехосного сжатия (при  $f = 1$  поверхность не замкнута, при  $f > 1$  — замкнутая). Предполагается использовать разомкнутую поверхность для плотных бетонов и замкнутую для пористых. Однако при  $f > 1$  меридианы сжатия и растяжения не пересекаются на гидростатической оси в одной точке, что приводит к недопустимому искажению поверхности и возникновению сингулярных областей (см. рис. 11).

Как видно на рис. 12, а (построение выполнено при значении  $f = 1$ ), поверхность содержит зоны сингулярности в вершине, в области трехосного растяжения и в ребрах на меридианах сжатия и растяжения. Вне зависимости от значения параметра  $f$  на меридиане сжатия при больших величинах гидростатического обжатия присутствует вогнутая область, не удовлетворяющая требованиям постулата Друкера, что препятствует использованию критерия в рамках численных методов теории пластического течения.

В области трехосного растяжения при определенных соотношениях  $R_b$  и  $R_{bt}$ , реалистичных

для бетона, возникает проблема, аналогичная проблеме с замыканием в области трехосного сжатия, описанная выше (см. рис. 11).

2. Составной критерий Н.И. Карпенко ( $R_b, R_{bt}, a_1, b, c_1, d, e, f, a_2, c_2, p$ ) [40] описывается уравнениями (21)–(24):

$$f_{KC1} = -k_c \cdot R_b + \beta_{II} \cdot \sigma_1 - \sigma_3 \leq 0; \quad (21)$$

$$f_{KC2} = \left( \frac{\sigma_1}{R_{bt}} \right)^2 - 2 \cdot a_2 \cdot \frac{\sigma_1}{R_{bt}} \cdot \frac{\sigma_2}{k_c \cdot R_b} + \\ + \left( \frac{(2 \cdot c_2 - 1) \cdot \sigma_3}{k_c \cdot R_b + 2 \cdot c_2 \cdot \sigma_3} \right)^p - 1 \leq 0; \quad (22)$$

$$f_{KC3} = \left( \frac{\sigma_1}{R_{bt}} \right)^2 + a_2 \cdot \left( \frac{\sigma_2}{R_{bt}} \right)^2 + \\ + \left( \frac{(2 \cdot c_2 - 1) \cdot \sigma_3}{R_b + 2 \cdot c_2 \cdot \sigma_3} \right)^p - 1 \leq 0; \quad (23)$$

$$f_{KC4} = \left( \frac{\sigma_1}{R_{bt}} \right)^2 + a_2 \cdot \left( \left( \frac{\sigma_2}{R_{bt}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_3}{R_{bt}} \right)^2 \right) - 1 \leq 0, \quad (24)$$

где  $f_{KC1}$  — критерий для области «сжатие – сжатие – сжатие»;  $f_{KC2}$  — «сжатие – сжатие – растяжение»;  $f_{KC3}$  — «сжатие – растяжение – растяжение»;  $f_{KC4}$  — «растяжение – растяжение – растяжение».

Согласно результатам сравнения имеет место занижение прочности бетона при величинах гидростатического обжатия  $p/R_b < -2$  в девiatorных сечениях (рис. 13, с). В остальных сечениях поверхность соответствует результатам опытов.

Для использования составного критерия необходим набор из 11 параметров, позволяющих осуществлять гибкую настройку формы поверхности. Основной проблемой является то, что большая часть набора представляет собой безразмерные величины, физический смысл которых не объяснен

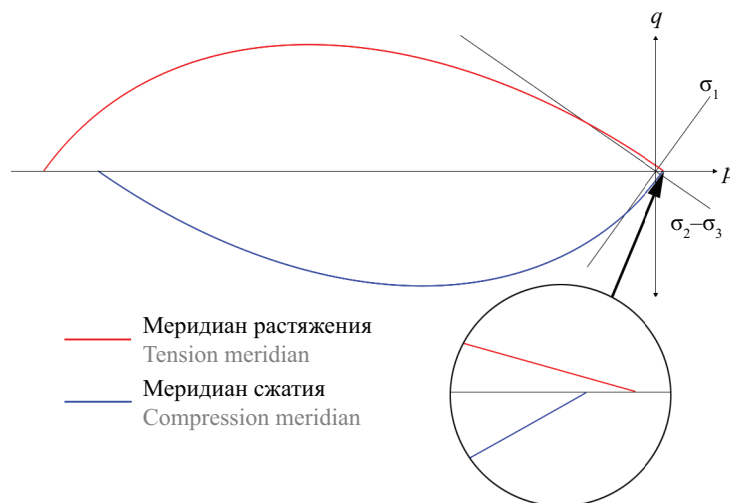


Рис. 11. Демонстрация проблемы замыкания поверхности Н.И. Карпенко в областях трехосного сжатия и растяжения

Fig. 11. Visualization of N.I. Karpenko surface closure problem in triaxial compression and tension regions

авторами. Данное обстоятельство усложняет процедуру подбора параметров и препятствует гибкой настройке поверхности, вынуждая пользователя применять представленные в первоисточнике значения, рекомендованные для тяжелого бетона.

В местах сопряжения частей составной поверхности присутствуют резкие переходы, образующие зоны сингулярности (см. рис. 12, *b*). Кроме того, присутствуют сингулярности в виде ребер на меридианах сжатия и растяжения, в вершине в области трехосного растяжения, а также сингулярности разного характера в области трехосного сжатия, образующиеся при использовании значения параметра  $f > 1$  (по аналогии с описанной ранее поверхностью Н.И. Карпенко, см. рис. 11).

Поверхность не удовлетворяет требованиям постулата Друкера в месте перехода между частями поверхности (см. рис. 12, *b*), которые описываются уравнениями (21) и (22), а также на меридиане сжатия, образуя вогнутость.

Части составного критерия (21)–(24) должны использоваться строго в областях пространства главных напряжений, указанных авторами, так как имеют мнимые упругие области за пределами границ применимости.

Для составных критериев в схеме «упругий предиктор – пластический корректор» начальный и конечный тензоры напряжений могут соответствовать разным частям составного критерия, что не является допустимым в рамках численных методов теории пластического течения. Данное обстоятельство накладывает ограничения на использование составных критериев Н.И. Карпенко и Willam – Warnke в численных методах.

3. Критерий С.Ф. Клованича – Д.И. Безушко ( $R_b, R_{bt}, R_{2t}, R_{2c}$ ) [41] описывается уравнениями:

$$\tau_0 = \tau_1 \cdot \frac{2 \cdot a(\tau_1, \tau_2) \cdot \cos(\theta) + b(\tau_1, \tau_2) \times \sqrt{a(\tau_1, \tau_2) \cdot (4 \cdot \cos^2(\theta) - 1) + b(\tau_1, \tau_2)^2}}{4 \cdot a(\tau_1, \tau_2) \cdot \cos^2(\theta) + b(\tau_1, \tau_2)^2}; \quad (25)$$

$$\tau_{1(2)} = - \frac{B_{1(2)} + \sqrt{B_{1(2)}^2 + 4 \cdot A_{1(2)} \cdot (\sigma_0 - C)}}{2 \cdot A_{1(2)}}. \quad (26)$$

Поверхность завышает прочность бетона в сечении  $\sigma_1 - \sigma_3$  (рис. 13, *b*) и занижает прочность бетона при величинах гидростатического обжатия  $p/R_b < -2$  в меридиональном и девиаторных сечениях (рис. 13, *a, b*).

В критерии присутствует единственная зона сингулярности в вершине в области трехосного растяжения (рис. 12, *c*).

Общий вид поверхностей третьей группы представлен на рис. 12. Сравнение поверхностей третьей группы с результатами опытов показано на рис. 13.

В заключительной, четвертой группе, рассмотрим следующие критерии:

1. Критерий Ottosen ( $R_b, R_{bt}, R_{2c}, \sigma_{com}, \tau_{com}$ ) [42] описывается уравнением:

$$f_o = A \cdot \frac{J_2}{R_b^2} + \lambda(\theta) \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{R_b} + B \cdot \frac{I_1}{R_b} - 1. \quad (27)$$

Для своего построения критерий требует параметры  $\sigma_{com}, \tau_{com}$ , представляющие собой гидростатическую и девиаторную координаты точки на меридиане сжатия при больших величинах гидростатического обжатия. В труде [43] представлены эмпирические значения, позволяющие вычислить данные величины. Однако поверхность, построенная с использованием рекомендованных значений, завышает прочность бетона в меридиональном и девиаторных сечениях (см. рис. 15, *a, c*) и в области двухосного сжатия в сечении  $\sigma_1 - \sigma_3$  (рис. 15, *b*). Таким образом, для достижения наи-

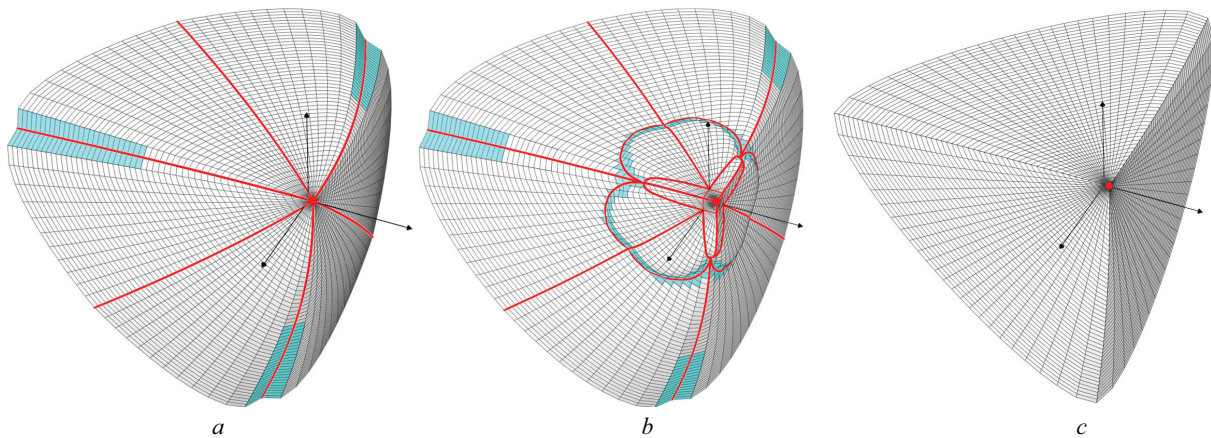
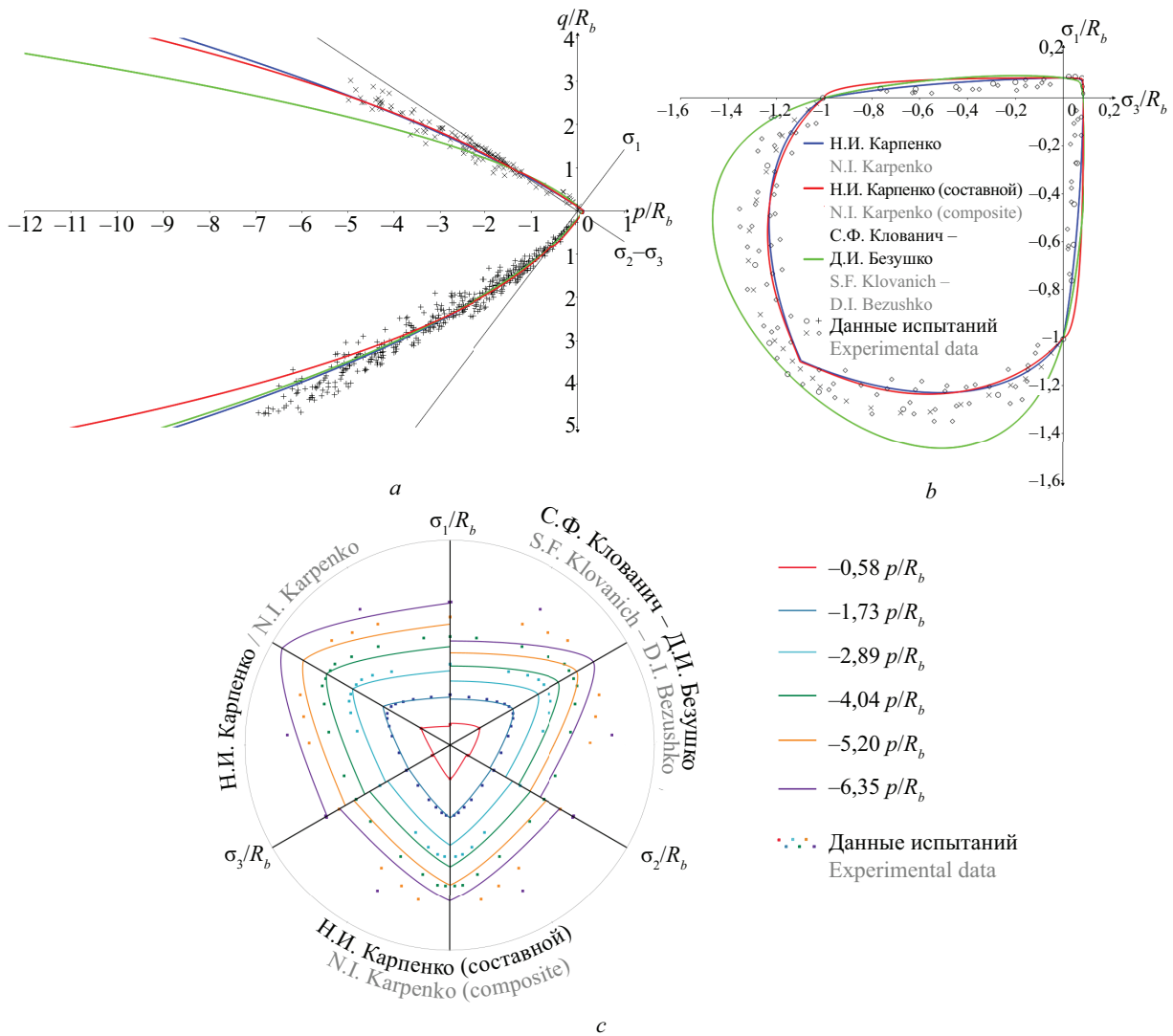


Рис. 12. Поверхность Н.И. Карпенко (*a*); составная поверхность Н.И. Карпенко (*b*); поверхность С.Ф. Клованича – Д.И. Безушко (*c*) в пространстве главных напряжений

Fig. 12. Surface of N.I. Karpenko (*a*); composite surface of N.I. Karpenko (*b*); surface of Klovanih – Bezushko (*c*) in principal stress space



**Рис. 13.** Сравнение поверхностей третьей группы с результатами опытов: меридиональное сечение (a); сечение  $\sigma_1 - \sigma_3$  (b); девиаторные сечения (c)

**Fig. 13.** Comparison of the surfaces of the third group with the results of experiments: meridional section (a); section  $\sigma_1 - \sigma_3$  (b); deviatoric section (c)

лучшего соответствия опытным данным параметры должны определяться на основании трехосных испытаний бетона.

Критерий имеет единственную зону сингулярности в вершине в области трехосного растяжения (рис. 14, a).

2. Критерии Menetrey – Willam ( $R_b, R_{bt}, R_{2c}$ ) [44], Grassl ( $R_b, R_{bt}, R_{2c}$ ) [45], а также критерий, представленный в работе А.М. Бударина ( $R_b, R_{bt}, R_{2c}, R_{3b}, R_{vh}$ ) [46], описываются уравнениями (28)–(30) соответственно:

$$f_{MW} = \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{q}{R_b} \right)^2 + m_0 \times \left( \frac{q}{R_b \cdot \sqrt{6}} \cdot r(\theta, e) + \frac{p}{R_b \cdot \sqrt{3}} \right) - 1; \quad (28)$$

$$f_G = \left( (1 - c_h) \cdot \left( \frac{q}{R_b \cdot \sqrt{6}} + \frac{\sigma_0}{R_b} \right)^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{q}{R_b} \right)^2 + m_0 \cdot c_h^2 \cdot \left( \frac{q}{R_b \cdot \sqrt{6}} \cdot r(\theta, e) + \frac{\sigma_0}{R_b} \right) - c_h^2; \quad (29)$$

$$f_B = \left( \left( \frac{q}{R_b} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + c_h \cdot m_0 \cdot \frac{q}{\sqrt{6} \cdot R_b} \cdot r(e, \theta) \right)^2 - f_{comp}(p) \cdot \left( c_h - c_h \cdot m_0 \cdot \frac{p}{\sqrt{3} \cdot R_b} \right)^2. \quad (30)$$

Уравнения (29) и (30) представляют собой модификации уравнения (28), описывающие поверхность, замкнутую в области трехосного сжатия. Модификация имеет цель отразить пластическую сжимаемость бетона (контракцию). В поверхности



Grassl реализован совместный механизм девиаторной эволюции и эволюции шатра сжатия (шатер сжатия присутствует только на стадии эволюции поверхности при  $c_h < 1$ ). Таким образом, критерии прочности (при  $c_h = 1$ ), описываемые уравнениями (28) и (29), совпадают. Концепция, реализованная в работе А.М. Бударина, подразумевает отдельные механизмы девиаторной эволюции и эволюции шатра сжатия, что требует использования двух дополнительных параметров ( $R_{3b}$  — координата замыкания поверхности на гидростатической оси в области трехосного сжатия;  $R_{vh}$  — безразмерный множитель к  $R_{3b}$ , определяющий начало шатра сжатия), формулы для вычисления которых представлены в первоисточнике. Поверхности соответствуют результатам опытов во всех рассматриваемых сечениях.

Упомянутые выше критерии имеют зону сингулярности в вершине, в области трехосного растяжения (рис. 14, *b–d*). Кроме того, критерий Grassl имеет сингулярность в вершине (рис. 14, *c*) в обла-

сти трехосного сжатия при  $c_h < 1$  (до достижения поверхности прочности).

3. Критерий Hseih – Ting – Chen ( $R_b, R_{bt}, R_{2c}, \sigma_{com}, \tau_{com}$ ) [47] описывается уравнением:

$$f_{HTC} = a \cdot \frac{J_2}{R_b^2} + b \cdot \frac{\sqrt{J_2}}{R_b} + c \cdot \frac{\sigma_1}{R_b} + d \cdot \frac{I_1}{R_b} - 1. \quad (31)$$

Для использования критерия необходимо выполнить подбор коэффициентов  $a, b, c, d$ , значения которых могут быть получены путем совместного решения системы линейных алгебраических уравнений. Система составляется исходя из условия прохождения поверхности через ряд характерных точек в пространстве главных напряжений, представляющих собой прочности при одноосном сжатии, одноосном растяжении, двухосном равномерном сжатии и трехосном неравномерном сжатии. Коэффициенты зависят от соотношения упомянутых выше прочностных параметров и имеют разные значения в зависимости от класса бетона. Необходимость вы-

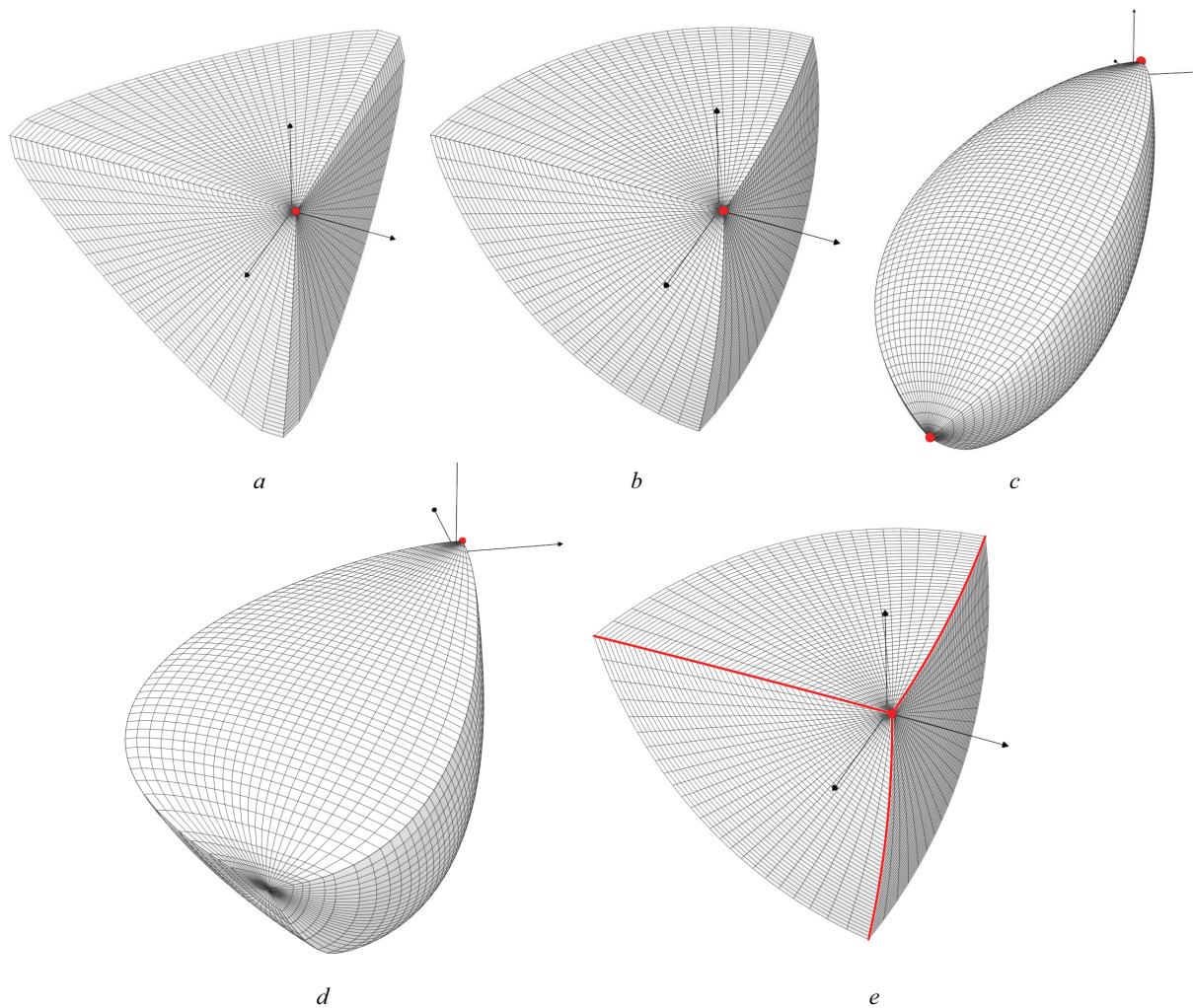


Рис. 14. Поверхности Ottosen (*a*); Menetrey – Willam (*b*); Grassl (*c*); А.М. Бударина (*d*); Hseih – Ting – Chen (*e*) в пространстве главных напряжений

Fig. 14. Ottosen (*a*); Menetrey – Willam (*b*); Grassl (*c*); A.M. Budarin (*d*), Hseih – Ting – Chen (*e*) surfaces in principal stress space



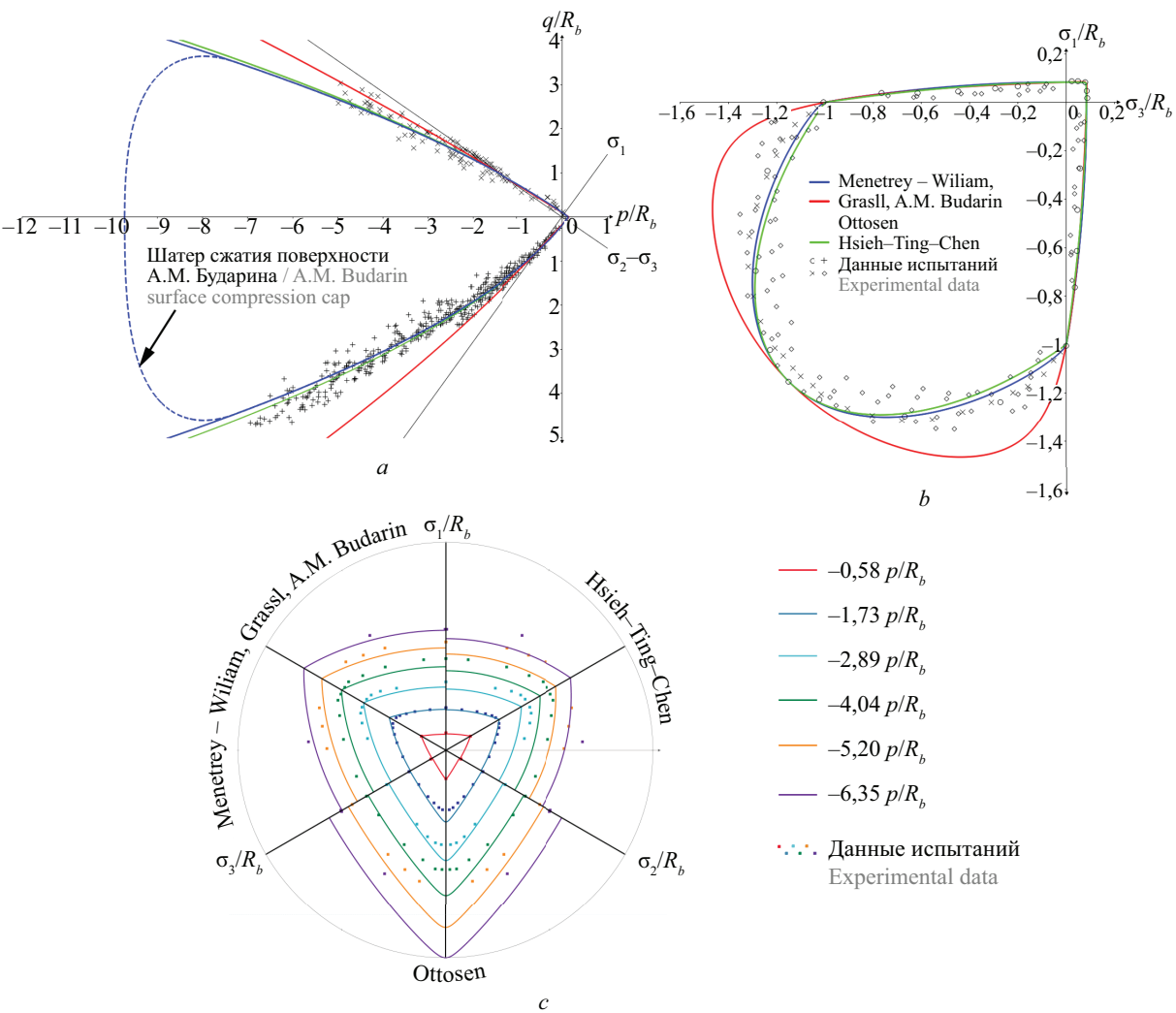
Табл. 2. Результаты сравнительного анализа рассмотренных критериев прочности бетона

Table 2. Results of a comparative analysis of the considered concrete strength criteria

Критерий / Criterion	Соответствие результатам опытов Consistency with the results of experiments	Количество зон сингулярности Number of singularity zones	Отсутствие мнимых упругих областей Absence of false elastic regions	Выпуклость поверхности Convexity of the surface	Легкость определения параметров Easy to define parameters
Bigoni – Piccolroaz	Неудовлетворительно Unsatisfactory	1	+	+	–
Drucker – Prager Concrete	Удовлетворительно Satisfactory	2	+	+	+
Lee – Fenves (ABAQUS)	Хорошо Good	>2	+	+	+
Л.Ю. Соловьев L.Y. Soloviev	Удовлетворительно Satisfactory	>2	–	+	+
Willam – Warnke	Хорошо* Good*	1**	+	+***	–
(Составной / Composite) Willam – Warnke (ANSYS)	Хорошо* Good*	>2	+	–	–
Н.И. Карпенко N.I. Karpenko	Отлично Excellent	>2	+	–	+
(Составной) Н.И. Карпенко (Composite) N.I. Karpenko	Хорошо Good*	>2	+***	–	+****
С.Ф. Клованич – Д.И. Безушко S.F. Klovanych – D.I. Bezushko	Удовлетворительно Satisfactory	1	+	+	+
Ottosen	Отлично* Excellent*	1	+	+	–
Menetrey – Willam	Отлично Excellent	1	+	+	+
Grassl	Отлично Excellent	1*****	+	+	+
А.М. Бударин / A.M. Budarin	Отлично Excellent	1	+	+	+
Hseih – Ting – Chen	Хорошо* Good*	2	+	+	–

Примечание: \* — для соответствия поверхности опытным данным необходимы результаты испытаний бетона на трехосное неравномерное сжатие; \*\* — критерий имеет единственную зону сингулярности и не нарушает требования постулата Друкера при условии использования поверхности в рабочем диапазоне, не достигающем до начала замыкания в области трехосного сжатия; \*\*\* — мнимые упругие зоны отсутствуют при использовании частей составного критерия прочности строго в рамках областей пространства главных напряжений, заявленных авторами; \*\*\*\* — необходимость определения значений дополнительных параметров отсутствует при условии применения набора параметров, рекомендованного авторами для тяжелого бетона; \*\*\*\*\* — критерий прочности имеет единственную сингулярность. При упрочнении поверхность имеет дополнительную сингулярность в области трехосного сжатия.

Note: \* — the results of concrete tests for triaxial non-uniform compression are required to match the surface with the experimental data; \*\* — the criterion has a single zone of singularity and does not violate the requirements of Drucker's postulate provided that the surface is used in the operating range that does not reach the beginning of closure in the region of triaxial compression; \*\*\* — false elastic regions are absent when using parts of the composite strength criterion strictly within the regions of the principal stress space declared by the authors; \*\*\*\* — there is no need to determine the values of additional parameters if the set of parameters recommended by the authors for normal concrete is used; \*\*\*\*\* — the strength criterion has a single singularity. In case of hardening, the surface has an additional singularity in the triaxial compression region.



**Рис. 15.** Сравнение поверхностей четвертой группы с результатами опытов: меридиональное сечение (a); сечение  $\sigma_1-\sigma_3$  (b); девиаторные сечения (c)  
**Fig. 15.** Comparison of the surfaces of the fourth group with the results of experiments: meridional section (a); section  $\sigma_1-\sigma_3$  (b); deviatoric section (c)

полнения процедуры подбора коэффициентов усложняет использование критерия.

Поверхность совпадает с опытными данными во всех рассматриваемых сечениях, кроме девиаторных (рис. 15, c), при величине гидростатического обжатия  $p/R_b < -2$ .

Критерий содержит зону сингулярности в вершине в области трехосного растяжения, а также сингулярность в виде ребра на меридиане сжатия (рис. 14, e).

Общий вид поверхностей четвертой группы представлен на рис. 14. Сравнение поверхностей четвертой группы с результатами опытов приведено на рис. 15.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ**

Для определения уровня соответствия опыт-ным данным использована следующая оценочная шкала: отлично (поверхность соответствует ре-

зультатам опытов во всех рассмотренных сечениях, см. рис. 6), хорошо (присутствует отклонение в одном из сечений: меридиональном, девиаторных или сечении  $\sigma_1-\sigma_3$ ), удовлетворительно (отклонение в двух сечениях), неудовлетворительно (отклонение во всех трех сечениях).

Результаты сравнительного анализа рассмотренных критериев прочности бетона представлены в табл. 2.

Из всех рассмотренных в статье критериев прочности бетона критерий Menetrey – Willam, а также его модификации (Grassl, А.М. Бударин) наилучшим образом совпадают с опытными данными и обладают удобным набором параметров, не требующим дополнительных процедур подбора. Поверхности имеют минимальное количество зон сингулярности, а также отсутствие мнимых упругих областей, что позволяет выполнить уникальное и стабильное численное решение в рамках различных численных методов, включая теорию пластического течения.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Staber B., Forest S., Kotob M., Mazière M., Rose T.* Loss of ellipticity analysis in non-smooth plasticity // *International Journal of Solids and Structures*. 2021. Vol. 222–223. P. 111010. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.02.021
2. *Корсун В.И., Карпенко С.Н., Макаренко С.Ю., Недорезов А.В.* Современные критерии прочности для бетонов при объемных напряженных состояниях // *Строительство и реконструкция*. 2021. № 5 (97). С. 16–30. DOI: 10.33979/2073-7416-2021-97-5-16-30. EDN HYNCLS.
3. *Chen W.F.* Plasticity in Reinforced Concrete. New York : J. Ross Publishing Classics, 2007. 474 p.
4. *Jirásek M., Bažant Z.P.* Inelastic Analysis of Structures. Chichester : Wiley, 2002. 722 p.
5. *Willam K.J., Warnke E.P.* Constitutive model for the triaxial behavior of concrete // *IABSE*. 1974. Pp. 1–31.
6. *Lim J.C., Ozbakkaloglu T., Gholampour A., Bennett T., Sadeghi R.* Finite-element modeling of actively confined normal-strength and high-strength concrete under uniaxial, biaxial, and triaxial compression // *Journal of Structural Engineering*. 2016. Vol. 142. Issue 11. DOI: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0001589
7. *Ansari F., Li Q.B.* High-strength concrete subjected to triaxial compression // *ACI Materials Journal*. 1998. Vol. 95. Issue 6. DOI: 10.14359/420
8. *Bellamy C.J.* Strength of concrete under combined stress // *ACI Journal Proceedings*. 1961. Vol. 58. Issue 10. DOI: 10.14359/7989
9. *Bellotti R., Ronzoni E.* Results of tests carried out on cylindrical concrete specimens subjected to complex stress states : a critical analysis // *Proceedings of International Conference on Concrete under Multiaxial Condition*. 1984.
10. *Bellotti R., Rossi P.* Cylinder tests: Experimental technique and results // *Materials and Structures*. 1991. Vol. 24. Issue 1. Pp. 45–51. DOI: 10.1007/bf02472681
11. *Candappa D.C., Sanjayan J.G., Setunge S.* Complete triaxial stress-strain curves of high-strength concrete // *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2001. Vol. 13. Issue 3. Pp. 209–215. DOI: 10.1061/(asce)0899-1561(2001)13:3(209)
12. *Candappa D.P., Setunge S., Sanjayan J.G.* Stress versus strain relationship of high strength concrete under high lateral confinement // *Cement and Concrete Research*. 1999. Vol. 29. Issue 12. Pp. 1977–1982. DOI: 10.1016/s0008-8846(99)00219-7
13. *Chern J.C., Yang H.J., Chen H.W.* Behavior of steel fiber reinforced concrete in multiaxial loading // *ACI Materials Journal*. 1993. Vol. 89. Issue 1. DOI: 10.14359/1242
14. *Cordon W.A., Gillespie H.A.* Variables in concrete aggregates and portland cement paste which influence the strength of concrete // *ACI Journal Proceedings*. 1963. Vol. 60. Issue 8. DOI: 10.14359/7889
15. *Duke C.M., Davis H.E.* Some properties of concrete under sustained combined stresses // *Proceedings-American society for testing and materials*. 1944. Vol. 44. Pp. 888–896.
16. *Farnam Y., Moosavi M., Shekarchi M., Babanajad S.K., Bagherzadeh A.* Behaviour of slurry infiltrated fibre concrete (SIFCON) under triaxial compression // *Cement and Concrete Research*. 2010. Vol. 40. Issue 11. Pp. 1571–1581. DOI: 10.1016/j.cemconres.2010.06.009
17. *Gabet T., Malecot Y., Daudeville L.* Triaxial behaviour of concrete under high stresses: Influence of the loading path on compaction and limit states // *Cement and Concrete Research*. 2008. Vol. 38. Issue 3. Pp. 403–412. DOI: 10.1016/j.cemconres.2007.09.029
18. *Imran I., Pantazopoulou S.J.* Experimental study of plain concrete under triaxial stress // *ACI Materials Journal*. 1996. Vol. 93. Issue 6. DOI: 10.14359/9865
19. *Kotsovos M.D.* Effect of stress path on the behavior of concrete under triaxial stress states // *ACI Journal Proceedings*. 1979. Vol. 76. Issue 2. DOI: 10.14359/6944
20. *Wang C.Z., Guo Z.H., Zhang X.Q.* Experimental investigation of biaxial and triaxial compressive concrete strength // *ACI Materials Journal*. 1987. Vol. 84. Issue 2. DOI: 10.14359/1808
21. *Launay P., Gachon H.* Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress // *ACI Materials Journal*. 1972. Pp. 23–34.
22. *Sfer D., Carol I., Gettu R., Etse G.* Study of the behavior of concrete under triaxial compression // *Journal of Engineering Mechanics*. 2002. Vol. 128. Issue 2. Pp. 156–163. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(2002)128:2(156)
23. *Smith S.S., Willam K.J., Gerstle K.H., Sture S.* Concrete over the top – or, is there life after peak? // *ACI Materials Journal*. 1989. Vol. 86. Issue 5. DOI: 10.14359/2089
24. *Kupfer H., Gerstle K.H.* Behavior of concrete under biaxial stresses // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1969. Vol. 99. Issue 4. Pp. 853–866. DOI: 10.1061/jmcea3.0001789
25. *Nelissen L.* Biaxial testing of normal concrete // *Heron*. 1972. Vol. 18. Issue 1. Pp. 1–90.
26. *Van Mier J.G.M.* Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions : Ph.D. Thesis. Eindhoven : Technische Hogeschool Eindhoven, 1984.
27. *Mises R.V.* Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Mathematisch-physikalische Klasse)*. 1913. Vol. 1. Pp. 582–592.

28. Rankine W. On the stability of loose earth // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1857. Vol. 147. Pp. 9–27. DOI: 10.1098/rstl.1857.0003
29. Генеев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М. : Стройиздат, 1974. 316 с. EDN RSNPAX.
30. Аликова Н.М., Генеев Г.А. Вариант условия прочности бетона // *Теоретические исследования в области строительной механики пространственных систем*. 1976. С. 21–27.
31. Лейтес Е.С. К уточнению одного из условий прочности бетона // *Поведение бетонов и элементов железобетонных конструкций при воздействии различной длительности* : сб. науч. тр. НИИЖБ, 1980. С. 37–40.
32. Яшин А.В. Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния // *Расчет и конструирование железобетонных конструкций*. 1977. С. 48–57.
33. Bresler B., Pister K.S. Strength of concrete under combined stresses // *ACI Journal Proceedings*. 1958. Vol. 55. Issue 9. DOI: 10.14359/11358
34. Leon A. Über die Scherfestigkeit des Betons // *Beton und Eisen*. 1935. Vol. 34. Pp. 130–135.
35. Bigoni D., Piccolroaz A. Yield criteria for quasibrittle and frictional materials // *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. Issue 11–12. Pp. 2855–2878. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.12.024
36. Poltronieri F., Piccolroaz A., Bigoni D., Romero Baivier S. A simple and robust elastoplastic constitutive model for concrete // *Engineering Structures*. 2014. Vol. 60. Pp. 81–84. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.12.007
37. Соловьев Л.Ю. Нелинейная модель бетона на основе теории пластического течения // *Системы. Методы. Технологии*. 2014. № 4 (24). С. 131–140. EDN TFBEMN.
38. Петров А.Н. Деформационная модель ползучести железобетона и ее приложение к расчету плосконапряженных элементов и систем из них : дис. ... д-ра техн. наук. М., 2001. 326 с.
39. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М. : Стройиздат, 1996. 416 с.
40. Карпенко Н.И., Карпенко С.Н. Составной критерий прочности бетона при объемном напряженном состоянии // *Бетон и железобетон — взгляд в будущее* : науч. тр. III Всерос. (II Междунар.) конф. по бетону и железобетону. 2014. С. 156–165. EDN TRROFR.
41. Клованич С.Ф., Безушко Д.И. Численный эксперимент по исследованию деформационных теорий пластичности бетона // *Вестник ОГАСА*. 2006. № 22. С. 122–130.
42. Ottosen N.S. A failure criterion for concrete // *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1977. Vol. 103. Issue 4. Pp. 527–535. DOI: 10.1061/jmcea3.0002248
43. Beverly P. FIB model code for concrete structures 2010. 2013.
44. Menetrey P., Willam K.J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization // *ACI Structural Journal*. 1995. Vol. 92. Issue 3. DOI: 10.14359/1132
45. Grassl P., Jirásek M. Damage-plastic model for concrete failure // *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. Issue 22–23. Pp. 7166–7196. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.032
46. Бударин А.М., Ремпель Г.И., Камзолкин А.А., Алехин В.Н. Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением // *Вестник МГСУ*. 2023. Т. 18. № 4. С. 517–532. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.517-532
47. Hsieh S.S., Ting E.C., Chen W.F. A plastic-fracture model for concrete // *International Journal of Solids and Structures*. 1982. Vol. 18. Issue 3. Pp. 181–197. DOI: 10.1016/0020-7683(82)90001-4

Поступила в редакцию 11 сентября 2023 г.

Принята в доработанном виде 14 декабря 2023 г.

Одобрена для публикации 8 апреля 2024 г.

**ОБ АВТОРАХ:** **Георгий Игоревич Ремпель** — главный эксперт отдела расчетных обоснований; **АО «Институт Гидропроект»**; 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 2; g.rempel@hydroproject.ru;

**Александр Михайлович Бударин** — главный специалист отдела расчетных обоснований; **АО «Институт Гидропроект»**; 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 2; alex.budarin01@gmail.com;

**Андрей Петрович Долгих** — начальник отдела расчетных обоснований; **АО «Институт Гидропроект»**; 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 2; a.dolgih@hydroproject.ru;

**Алексей Александрович Камзолкин** — ведущий инженер; **Научно-исследовательский центр «СтаДиО» (АО НИЦ «СтаДиО»)**; 125124, г. Москва, 3-я ул. Ямского Поля, д. 18; holinmail@mail.ru;

**Владимир Николаевич Алехин** — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой систем автоматизированного проектирования объектов строительства; **Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ)**; 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; РИНЦ ID: 549888, Scopus: 7004307891, ResearcherID: B-4747-2016, ORCID: 0000-0001-8291-6052; v.n.alekhin@urfu.ru.

*Вклад авторов:*

Ремпель Г.И. — концепция исследования, сбор материала и обработка данных, научное редактирование, создание графических материалов.



Бударин А.М. — концепция исследования, сбор материала и обработка данных, научное редактирование.  
Долгих А.П. — научное редактирование.  
Камзолкин А.А. — научное редактирование, создание графических материалов.  
Алехин В.Н. — научное редактирование.  
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. Staber B., Forest S., Kotob M., Mazière M., Rose T. Loss of ellipticity analysis in non-smooth plasticity. *International Journal of Solids and Structures*. 2021; 222-223:111010. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2021.02.021
2. Korsun V.I., Karpenko S.N., Makarenko S.Yu., Nedoresov A.V. Modern strength criteria for concrete under triaxial stress states. *Building and Reconstruction*. 2021; 5(97):16-30. DOI: 10.33979/2073-7416-2021-97-5-16-30. EDN HYNCLS. (rus.).
3. Chen W.F. *Plasticity in Reinforced Concrete*. New York, J. Ross Publishing Classics, 2007; 474.
4. Jirásek M., Bažant Z.P. *Inelastic Analysis of Structures*. Chichester, Wiley, 2002; 722.
5. Willam K.J., Warnke E.P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *LABSE*. 1974; 1-31.
6. Lim J.C., Ozbakkaloglu T., Gholampour A., Bennett T., Sadeghi R. Finite-Element Modeling of Actively Confined Normal-Strength and High-Strength Concrete under Uniaxial, Biaxial, and Triaxial Compression. *Journal of Structural Engineering*. 2016; 142(11). DOI: 10.1061/(asce)st.1943-541x.0001589
7. Ansari F., Li Q.B. High-strength concrete subjected to triaxial compression. *ACI Materials Journal*. 1998; 95(6). DOI: 10.14359/420
8. Bellamy C.J. Strength of concrete under combined stress. *ACI Journal Proceedings*. 1961; 58(10). DOI: 10.14359/7989
9. Bellotti R., Ronzoni E. Results of tests carried out on cylindrical concrete specimens subjected to complex stress states : a critical analysis. *Proceedings of International Conference on Concrete under Multiaxial Condition*. 1984.
10. Bellotti R., Rossi P. Cylinder tests: Experimental technique and results. *Materials and Structures*. 1991; 24(1):45-51. DOI: 10.1007/bf02472681
11. Candappa D.C., Sanjayan J.G., Setunge S. Complete triaxial stress-strain curves of high-strength concrete. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2001; 13(3): 209-215. DOI: 10.1061/(asce)0899-1561(2001)13:3(209)
12. Candappa D.P., Setunge S., Sanjayan J.G. Stress versus strain relationship of high strength concrete under high lateral confinement. *Cement and Concrete Research*. 1999; 29(12):1977-1982. DOI: 10.1016/s0008-8846(99)00219-7
13. Chern J.C., Yang H.J., Chen H.W. Behavior of steel fiber reinforced concrete in multiaxial loading. *ACI Materials Journal*. 1993; 89(1). DOI: 10.14359/1242
14. Cordon W.A., Gillespie H.A. Variables in concrete aggregates and portland cement paste which influence the strength of concrete. *ACI Journal Proceedings*. 1963; 60(8). DOI: 10.14359/7889
15. Duke C.M., Davis H.E. Some properties of concrete under sustained combined stresses. *Proceedings-American society for testing and materials*. 1944; 44:888-896.
16. Farnam Y., Moosavi M., Shekarchi M., Babanajad S.K., Bagherzadeh A. Behaviour of slurry infiltrated fibre concrete (SIFCON) under triaxial compression. *Cement and Concrete Research*. 2010; 40(11):1571-1581. DOI: 10.1016/j.cemconres.2010.06.009
17. Gabet T., Malecot Y., Daudeville L. Triaxial behaviour of concrete under high stresses: Influence of the loading path on compaction and limit states. *Cement and Concrete Research*. 2008; 38(3):403-412. DOI: 10.1016/j.cemconres.2007.09.029
18. Imran I., Pantazopoulou S.J. Experimental study of plain concrete under triaxial stress. *ACI Materials Journal*. 1996; 93(6). DOI: 10.14359/9865
19. Kotsovos M.D. Effect of stress path on the behavior of concrete under triaxial stress states. *ACI Journal Proceedings*. 1979; 76(2). DOI: 10.14359/6944.
20. Wang C.Z., Guo Z.H., Zhang X.Q. Experimental investigation of biaxial and triaxial compressive concrete strength. *ACI Materials Journal*. 1987; 84(2). DOI: 10.14359/1808.
21. Launay P., Gachon H. Strain and ultimate strength of concrete under triaxial stress. *ACI Materials Journal*. 1972; 23-34.
22. Sfer D., Carol I., Gettu R., Etse G. Study of the behavior of concrete under triaxial compression. *Journal of Engineering Mechanics*. 2002; 128(2):156-163. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(2002)128:2(156)
23. Smith S.S., Willam K.J., Gerstle K.H., Sture S. Concrete over the top – or, is there life after peak? *ACI Materials Journal*. 1989; 86(5). DOI: 10.14359/2089.
24. Kupfer H., Gerstle K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1969; 99(4):853-866. DOI: 10.1061/jmcea3.0001789
25. Nelissen L. Biaxial testing of normal concrete. *Heron*. 1972; 18(1):1-90.
26. Van Mier J.G.M. *Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions : Ph.D. Thesis*. Eindhoven, Technische Hogeschool Eindhoven, 1984.



27. Mises R.V. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Mathematisch-physikalische Klasse)*. 1913; 1:582-592.
28. Rankine W. On the stability of loose earth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1857; 147:9-27. DOI: 10.1098/rstl.1857.0003
29. Geniev G., Kissuk V., Tupin G. *Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete*. Moscow, Stroyizdat, 1974; 316. EDN RSNPAX. (rus.).
30. Geniev G. A variant of the strength condition. *Theoretical research in the field of structural mechanics of spatial systems*. 1976; 21-27. (rus.).
31. Leites E.S. To improvement one from conditions of concrete strength. *Behavior of concrete and elements of reinforced concrete structures under exposure of various durations : collection of scientific papers*. 1980; 37-40. (rus.).
32. Yashin A.V. Strength criteria and straining of concrete under simple loading for different stress pattern. *Calculation and design of reinforced concrete structures*. 1977; 48-57. (rus.).
33. Bresler B., Pister K.S. Strength of concrete under combined stresses. *ACI Journal Proceedings*. 1958; 55(9). DOI: 10.14359/11358
34. Leon A. Über die Scherfestigkeit des Betons. *Beton und Eisen*. 1935; 34:130-135.
35. Bigoni D., Piccolroaz A. Yield criteria for quasi-brittle and frictional materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2004; 41(11-12):2855-2878. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2003.12.024
36. Poltronieri F., Piccolroaz A., Bigoni D., Romero Baivier S. A simple and robust elastoplastic constitutive model for concrete. *Engineering Structures*. 2014; 60:81-84. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.12.007
37. Soloviev L.Yu. Non-linear concrete model based on the plastic flow theory. *Systems. Methods. Technologies*. 2014; 4(24):131-140. EDN TFBEMN. (rus.).
38. Petrov A.N. *Deformation model of creep of reinforced concrete and its application to the calculation of plane-stressed elements and systems of them : Ph.D. Thesis*. Moscow, NIIZhB, 2001; 326. (rus.).
39. Karpenko N.I. *General Models of the Reinforced Concrete Mechanics*. Moscow, Stroyizdat Publ., 1996; 416. (rus.).
40. Karpenko N.I., Karpenko S.N. For the definition of strength of plain concrete in triaxial stress states. *Concrete and reinforced concrete — a look into the future: scientific proceedings of the III All-Russian (II International) Conference on Concrete and Reinforced Concrete*. 2014; 156-165. EDN TRROFR. (rus.).
41. Klovanih S.F., Bezushko D.I. Numerical experiment based on investigation of deformation plasticity theory of concrete. *Bulletin of the Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture*. 2006; 22:122-130. (rus.).
42. Ottosen N.S. A Failure Criterion for Concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1977; 103(4):527-535. DOI: 10.1061/jmcea3.0002248
43. Beverly P. *FIB model code for concrete structures 2010*. 2013.
44. Menetrey P., Willam K.J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*. 1995; 92(3). DOI: 10.14359/1132
45. Grassl P., Jirásek M. Damage-plastic model for concrete failure. *International Journal of Solids and Structures*. 2006; 43(22-23):7166-7196. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.032
46. Budarin A.M., Rempel G.I., Kamzolkyn A.A., Alekhin V.N. Stress-strain concrete model with double independent reinforcement. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2023; 18(4):517-532. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.517-532 (rus.).
47. Hsieh S.S., Ting E.C., Chen W.F. A plastic-fracture model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1982; 18(3):181-197. DOI: 10.1016/0020-7683(82)90001-4

Received September 11, 2023.

Adopted in revised form on December 14, 2023.

Approved for publication on April 8, 2024.

**B I O N O T E S :** **Georgy I. Rempel** — chief specialist of the Structural analysis department; **JSC «Institute Hydroproject»**; 2 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; g.rempel@hydroproject.ru;

**Alexander M. Budarin** — chief specialist of the Structural analysis department; **JSC «Institute Hydroproject»**; 2 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; alex.budarin01@gmail.com;

**Andrey P. Dolgikh** — head of structural analysis department; **JSC «Institute Hydroproject»**; 2 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; a.dolgih@hydroproject.ru;

**Alexey A. Kamzolkyn** — lead engineer; **Scientific Research Center “StaDiO” (JSC NRC “Stadyo”)**; 18 3rd Yamskogo Polya st., Moscow, 125124, Russian Federation; holinmail@mail.ru;

**Vladimir N. Alekhin** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computer-Aided Design Systems for Construction Projects; **Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU)**; 19 Mira st., Yekaterinburg, 620002, Russian Federation; ID RSCI: 549888, Scopus: 7004307891, ResearcherID: B-4747-2016, ORCID: 0000-0001-8291-6052; v.n.alekhin@urfu.ru.

*Contribution of the authors:*

*Georgy I. Rempel — research concept, data gathering and processing, scientific editing of the text, creating graphic materials.*

*Alexander M. Budarin — research concept, data gathering and processing, scientific editing of the text.*

*Andrey P. Dolgikh — scientific editing of the text.*

*Alexey A. Kamzolkin — scientific editing of the text, creating graphic materials.*

*Vladimir N. Alekhin — scientific editing of the text.*

*The authors declare no conflicts of interests.*