

Модификация функции диссипации Рэлея для численного моделирования внутреннего демпфирования в стержневых конструкциях

Владимир Николаевич Сидоров¹, Елена Сергеевна Бадина^{1,2,3},
Дмитрий Олегович Климушкин¹

¹ Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;

² Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ)); г. Москва, Россия;

³ Российская академия наук (РАН); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Предлагается методика учета диссипации энергии для балки Тимошенко путем построения при численном решении задачи матрицы демпфирования на основе модифицированной функции Рэлея. В этой модификации скорость перемещений заменена скоростями линейных и угловых деформаций. Такой подход позволяет учесть рассеяние энергии за счет внутреннего трения в материале при изменении как его объема, так и формы. Представленная методика является перспективной в практических расчетах конструкций, когда сдвиговая жесткость оказывает существенное влияние на их напряженно-деформированное состояние.

Материалы и методы. Рассмотрены несколько апробированных методов учета диссипации энергии, в том числе позволяющих учесть потерю энергии движущейся конструкции при трении о внешнюю среду (внешнее демпфирование) и диссипацию за счет трения в материале конструкции, деформируемой в движении (внутреннее демпфирование). Приводятся методики определения коэффициентов демпфирования для каждого из них. Для расчета стержневых систем используется метод конечных элементов. Матрицы демпфирования выводятся из условия стационарности полной энергии деформирования механической системы в движении, в том числе с учетом скоростей линейных и угловых деформаций.

Результаты. Приведены матрицы демпфирования, пропорциональные скоростям деформаций, полученные на основе модифицированной диссипативной функции Рэлея. Предложена методика определения коэффициента демпфирования с учетом скоростей угловых деформаций.

Выводы. Рассмотренные матрицы демпфирования описывают диссипацию энергии при колебаниях механических систем за счет внутреннего трения в материале. Матрица внутреннего демпфирования получена с учетом влияния скоростей линейных и угловых деформаций для моделирования динамического поведения коротких изгибаемых элементов конструкций, при описании деформирования которых применяется модель Тимошенко. Выполненная проверка размерностей дополнительно подтверждает корректность построения матрицы демпфирования. При этом размерность предложенного коэффициента демпфирования с учетом сдвига такая же, как у широко используемого коэффициента вязкости.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: диссипация, демпфирование, коэффициенты демпфирования, балка Тимошенко, внутреннее трение в материале, метод конечных элементов, диссипативная функция Рэлея

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Сидоров В.Н., Бадина Е.С., Климушкин Д.О. Модификация функции диссипации Рэлея для численного моделирования внутреннего демпфирования в стержневых конструкциях // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 6. С. 960–970. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.960-970

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Олегович Климушкин, d.o.klimushkin@gmail.com.

Modification of Rayleigh dissipation function for numerical simulation of internal damping in rod structures

Vladimir N. Sidorov¹, Elena S. Badina^{1,2,3}, Dmitriy O. Klimushkin¹

¹ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation;

² Russian University of Transport (RUT (MIIT)); Moscow, Russian Federation;

³ Russian Academy of Sciences (RAN); Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The paper proposes a method of accounting for energy dissipation for the Timoshenko beam by constructing a damping matrix based on a modified Rayleigh function in the numerical solution of the problem. In this modification,

the velocity of displacements is replaced by the velocities of linear and angular deformations. This approach allows us to take into account energy dissipation due to internal friction in the material when both its volume and shape change. The presented technique is promising in practical calculations of structures when shear stiffness has a significant impact on their stress-strain state.

Materials and methods. Several proven methods of energy dissipation accounting are considered, including those that make it possible to take into account the energy loss of a moving structure during friction with the external environment (external damping) and dissipation due to friction in the material of the structure deformed in motion (internal damping). Methods for determining the damping coefficients for each of them are presented. The finite element method is used to calculate rod systems. Damping matrices are derived from the condition of stationarity of the total energy of deformation of a mechanical system in motion, including linear and angular deformation rates.

Results. Damping matrices proportional to strain rates obtained on the basis of the modified dissipative Rayleigh function are given. A method for determining the damping coefficient taking into account the rates of angular deformation is proposed.

Conclusions. The damping matrices presented in the paper describe the energy dissipation during vibrations of mechanical systems due to internal friction in the material. The internal damping matrix was obtained taking into account the influence of linear and angular deformation rates to simulate the dynamic behaviour of short bending structural elements, the deformation of which is described using the Timoshenko model. The performed dimensional check additionally confirms the correctness of the damping matrix construction. Moreover, the dimension of the proposed shear damping coefficient is the same as that of the widely used viscosity coefficient.

KEYWORDS: dissipation, damping, damping coefficients, Timoshenko beam, material internal friction, finite element method, Rayleigh dissipative function

FOR CITATION: Sidorov V.N., Badina E.S., Klimushkin D.O. Modification of Rayleigh dissipation function for numerical simulation of internal damping in rod structures. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2024; 19(6):960-970. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.960-970 (rus.).

Corresponding author: Dmitry O. Klimushkin, d.o.klimushkin@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование динамического поведения строительных конструкций и их элементов представляет собой актуальную задачу, решение которой часто является важным аргументом при расчетном обосновании конструктивных решений. Разработка новых методов, позволяющих учитывать различные особенности поведения конструкций и материалов, имеет целью повышение достоверности применяемых математических моделей и расширение класса решаемых задач.

Учет сдвиговых деформаций конструкций необходим, когда они включают в себя короткие изгибаемые элементы. В этом случае для описания процесса деформирования изгибаемых элементов применяется модель С.П. Тимошенко [1]. В работе [2] показано, что результаты моделирования колебаний коротких изгибаемых элементов без учета сдвиговых деформаций могут значительно отличаться от результатов эксперимента.

Интеграция модели Тимошенко в алгоритм метода конечных элементов (МКЭ) позволяет решать задачи прочностного расчета сложных стержневых систем. Такие попытки предпринимались, например, в исследованиях [3–5].

Численный расчет различных типов строительных конструкций на динамические воздействия сводится, как правило, к построению их дискретных расчетных моделей и численному решению уравнения движения Д'Аламбера, записанному в перемещениях и определенному в конечномерном пространстве. В таком подходе, в частности при использовании в расчете МКЭ, уравнение Д'Аламбера, формулирующее равновесное состоя-

ние механической системы, деформируемой в движении, записывается в матричном виде [6]:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{\mathbf{V}}}(t) + \mathbf{D} \cdot \dot{\bar{\mathbf{V}}}(t) + \mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{V}}(t) = \bar{\mathbf{F}}(t), \quad (1)$$

где \mathbf{M} , \mathbf{D} и \mathbf{K} — соответственно матрица масс, матрица демпфирования и матрица жесткости расчетной модели; $\bar{\mathbf{V}}(t)$ — вектор перемещений узлов расчетной модели в направлении их степеней свободы; $\bar{\mathbf{F}}(t)$ — вектор внешних силовых воздействий, меняющихся во времени t .

Точки сверху в записи уравнения (1) и далее означают взятие производных по аргументу времени t . Таким образом, первые два слагаемых выражения (1) описывают инертность узлов расчетной модели, проявляющуюся при ее движении, а также противодействие движению демпфирующих сил, проявляющихся при диссипации энергии движения (ее переноса в другие виды энергии).

Существует ряд подходов и методов учета диссипации энергии механической системы, как правило, за счет перехода энергии колебаний, рассеиваемой при движении в тепловую. При этом важно различать трение движущейся механической системы о внешнюю среду и внутреннее трение в ее деформируемом материале. Соответственно одни методы разработаны для учета внешнего демпфирования, другие служат для моделирования затухания колебаний за счет внутреннего трения в материале. Для обоснования каждой модели и каждого метода учета диссипации стоит вопрос о назначении так называемого коэффициента демпфирования, так как именно он становится основным показателем скорости затухания колебаний.

Ниже приведены примеры основных подходов к моделированию демпфирующих сил, построе-

нию матрицы демпфирования, назначению коэффициентов демпфирования и предложены варианты определения значений коэффициента демпфирования для моделирования диссипации энергии за счет внутреннего трения с учетом скоростей изменения как линейных, так и сдвиговых деформаций на примере колебаний балки.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Моделирование демпфирования за счет трения о внешнюю среду

В наиболее распространенных условиях работы конструкции (ее деформирование при колебаниях в газообразной среде) демпфирование за счет трения о внешнюю среду не часто учитывается в расчетах инженерных, прежде всего строительных, конструкций, так как такое демпфирование имеет незначительный вклад в гашение колебаний. Но при учете полной картины диссипации энергии механической системы, деформируемой в движении, данным видом демпфирования, как правило, пренебрегать нельзя.

Характерным является отображение взаимодействия движущейся конструкции и внешней среды в коэффициенте демпфирования, предложенное Ньюэллом [7] на примере колебаний консольной балки:

$$\zeta = \frac{12 \cdot \mu}{b} \cdot \frac{L^2}{h^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{E \cdot \rho_b}}, \quad (2)$$

где μ — коэффициент вязкости внешней среды; b — размер поперечного сечения элемента из плоскости колебаний; L — длина балочного элемента; h — размер поперечного сечения элемента в плоскости колебаний; ρ_b — плотность материала элемента.

В выражении (2) учтены и геометрические параметры балочного элемента, и вязкость среды, в которой происходят колебания.

В уравнении Д'Аламбера, как и в его дискретном аналоге (1), усилия сопротивления движению конструкции, вызываемые трением о внешнюю среду, пропорциональны скорости движения поверхностных точек конструкции и представляются его вторым слагаемым.

Моделирование демпфирования за счет внутреннего трения

Известны принципиально различные подходы к моделированию внутреннего демпфирования. Построенные в этих подходах модели отличаются не просто выбором пути назначения коэффициентов демпфирования, а прежде всего, самими идеями, заложенными в моделях. Большой класс моделей внутреннего трения основан на описании вязкоупругих свойств материалов [8]. Широкий обзор таких моделей представлен в труде [9]. Описанию внутреннего трения в композитных материалах посвящены работы [10, 11].

Моделирование рассеяния энергии колебаний конструкциями и материалами, не проявляющими частотно-зависимых демпфирующих свойств, требует соответствующих подходов. Необходимо отметить вклад Е.С. Сорокина в создание амплитудно-зависимых моделей внутреннего трения и разработку гипотезы комплексной жесткости [12, 13].

Также распространенным методом численного моделирования внутреннего демпфирования является использование матрицы демпфирования \mathbf{D} в выражении (1), полученной при моделировании трения о внешнюю среду исходя из установления пропорции скоростям перемещений точек механической системы. При этом используются разнообразные методики подбора самого коэффициента демпфирования.

Но также существуют методы, которые для учета диссипации энергии в принципе не используют непосредственно сами матрицы демпфирования \mathbf{D} , а вместо них встраивают в модель комбинации других матриц с коэффициентами пропорциональности. Рассмотрим одну из известных таких моделей, вполне однозначно определяющую путь назначения коэффициента демпфирования.

Рэлеевское демпфирование

Суть метода заключается в том, что матрица демпфирования \mathbf{D} , устанавливающая в уравнении движения интенсивность демпфирующих сил за счет трения (1), складывается из двух матриц, отражающих ключевые внутренние механические свойства конструкции — из матрицы масс \mathbf{M} и матрицы жесткости \mathbf{K} с назначением степени их вклада в гашение колебаний коэффициентами α и β [14]:

$$\mathbf{D} = \alpha \cdot \mathbf{M} + \beta \cdot \mathbf{K}. \quad (3)$$

Эти коэффициенты в модели и можно называть коэффициентами демпфирования. Здесь слагаемое $\alpha \cdot \mathbf{M}$ отвечает за инерционные составляющие гашения колебаний системы, а второе слагаемое в выражении (3) $\beta \cdot \mathbf{K}$ — за «конструкционную» составляющую. Впрочем, участие в модели рэлеевского демпфирования матрицы жесткости \mathbf{K} вполне можно объяснить и тем, что при выводе матрицы демпфирования из условия стационарности функции диссипации Рэлея ее вид с точностью до коэффициента повторяет вид матрицы жесткости, получаемой из условия стационарности потенциальной энергии деформирования механической системы.

В свою очередь, в модели рэлеевского демпфирования (3) существует несколько способов определения коэффициентов α и β . В общем случае они находятся из условия:

$$\alpha + \beta \cdot \omega_i^2 = 2 \cdot \omega_i \cdot \xi_i, \quad (4)$$

где ω — i -я частота собственных колебаний конструкции; ξ_i — коэффициент демпфирования для i -й частоты свободных колебаний.

В данном подходе коэффициент демпфирования ξ представляет логарифмический декремент затухания. Определять его для различных сложных систем возможно теми же путями, какие используются для простейших.

Другой подход к нахождению коэффициентов α и β вытекает из предыдущего и также определяется их зависимостью от собственных частот колебаний [14].

Функция, описывающая график, приведенный на рис. 1, получена из уравнения (4):

$$\xi = \frac{\alpha}{2 \cdot \omega_n} + \frac{\beta \cdot \omega_n}{2}. \quad (5)$$

Из графика на рис. 1 видно, что результирующая функция ξ (5) определяется двумя характерными точками. Отсюда для определения коэффициентов α и β достаточно двух независимых равенств:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \xi_i \cdot \xi_j \cdot \omega_i \cdot \omega_j}{\xi_i \cdot \omega_i + \xi_j \cdot \omega_j}; \quad (6)$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \xi_i \cdot \xi_j}{\xi_i \cdot \omega_i + \xi_j \cdot \omega_j}. \quad (7)$$

Тогда для определения α и β достаточно найти первые две частоты колебаний, поскольку коэффициенты демпфирования определяются свойствами материала и конструктивным решением системы, являясь в этом случае эмпирическими величинами.

Таким образом видно, что в данной методе коэффициент демпфирования зависит от физико-механических параметров материала и конструктивного решения, а значит, от значений собственных частот конструкции, т.е. он отражает внутренние свойства системы и может характеризовать диссипацию энергии посредством внутреннего трения.

Нелокальное демпфирование

Существует ряд подходов к представлению демпфирующих свойств механических систем как аналитическими математическими моделями, так и численными на основе положений нелокальной механики. Численное нелокальное во времени

демпфирование описано в работах В.Н. Сидорова, Е.С. Бадьиной и Е.П. Детины [15, 16].

В настоящей работе рассматривается модель демпфирования, называемая здесь «демпфированием с памятью», т.е. демпфирование определяется скоростью деформирования конструкции не только в рассматриваемый момент времени t , но также и на предшествующем ему временном интервале $t-\tau$. Тогда уравнение движения (1) выглядит следующим образом:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{V}}(t) + \mathbf{D} \cdot \int_0^t G(t-\tau) \cdot \dot{\mathbf{V}}(\tau) d\tau + \mathbf{K} \cdot \mathbf{V}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (8)$$

где $G(t-\tau)$ — функция ядра, описывающая степень влияния скорости перемещений в момент времени τ на демпфирование в текущий момент времени t .

Далее ядро представляется в виде функции ошибок:

$$G(t-\tau) = \frac{2 \cdot \mu}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\mu^2 \cdot (t-\tau)^2}, \quad (9)$$

где μ — параметр, определяющий уровень нелокальности демпфирования материала во времени.

Нелокальная модель демпфирования в материале является обобщением вязкоупругой модели [17] и при определенных значениях масштабного параметра μ сводится к ней.

Примечательно, что матрица демпфирования в данном методе выводится из условий минимума уже модифицированного вида классической функции диссипации Рэлея, в котором вместо скоростей перемещений узлов v участвуют скорости деформаций ϵ :

$$\Phi_D = \frac{1}{2} \cdot \chi \cdot \dot{\epsilon}^2, \quad (10)$$

где $\dot{\epsilon}$ — скорость деформаций; χ — коэффициент вязкости материала, Па·с, он находится из выражения:

$$\chi = E \cdot t_k, \quad (11)$$

где E — модуль упругости материала; t_k — так называемое время запаздывания, которое определяется как:

$$t_k = \frac{2 \cdot \xi}{\omega}. \quad (12)$$

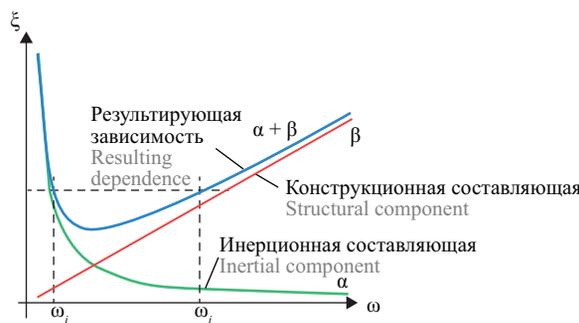


Рис. 1. Частотная зависимость коэффициентов α и β

Fig. 1. Frequency dependence of the coefficients α and β

В данном выражении ξ — относительный коэффициент демпфирования материала (в долях от критического), ξ зависит от физико-механических свойств материала элементов и конструктивных решений. Величины коэффициента ξ определяются из испытаний строительных конструкций и, как правило, представляются в табличном виде; ω — первая собственная частота конструкции.

Для управления параметрами демпфирования используются сразу два показателя:

1) коэффициент вязкости χ , который является постоянным для элементов расчетной модели, выполненными из одного материала;

2) масштабный параметр μ , который определяется методом наименьших квадратов [18] из условия:

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - f_i(\mu))^2 \rightarrow \min, \quad (13)$$

где e_i^2 — квадратичная ошибка в i -й момент времени колебательного процесса; y_i — значения перемещений характерного узла расчетной модели, полученные в момент времени i из эксперимента; f_i — значения перемещений того же узла, полученные с использованием модели, построенной на основе гипотезы нелокального демпфирования; N — количество рассматриваемых временных точек.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Матрица внутреннего демпфирования стержневого конечного элемента

Приведем построение матрицы демпфирования стержневого конечного элемента (КЭ) из условий минимума модифицированной функции диссипации Рэлея (10) относительно скоростей линейных деформаций ε вдоль оси стержневого элемента на примере элемента балки Бернулли – Эйлера [19].

Рассеяние энергии материалом стержневого КЭ составит:

$$D(\dot{v}) = \frac{1}{2} \int_A^l \chi \cdot \dot{\varepsilon}^2 \cdot dA \cdot dz, \quad (14)$$

где A — площадь поперечного сечения стержневого элемента; l — длина конечного элемента; $\dot{\varepsilon}^2$ — линейная деформация материала вдоль оси стержневого элемента; z — ордината вдоль оси стержневого элемента.

Продольная деформация произвольного продольного волокна элемента вдоль оси z состоит из двух слагаемых:

$$\varepsilon = \varepsilon_z^{oc} + \varepsilon_z^{изг}, \quad (15)$$

где ε_z^{oc} — линейная продольная деформация волокон балки при чистом растяжении-сжатии стержневого элемента:

$$\varepsilon_z^{oc} = \frac{du}{dz}, \quad (16)$$

где u — продольное перемещение сечения элемента при его чистом растяжении-сжатии; $\varepsilon_z^{изг}$ — линейная продольная деформация произвольного продольного волокна балочного элемента при его изгибе с соблюдением гипотезы плоских сечений:

$$\varepsilon_z^{изг} = 1/\rho \cdot y = \kappa \cdot y \approx \frac{d^2v}{dz^2} \cdot y, \quad (17)$$

где y — расстояние до рассматриваемого волокна от нейтрального слоя изгибаемого элемента; $\kappa = 1/\rho$ — кривизна линии изгиба (прогибов) элемента $v(z)$.

Таким образом:

$$D(\dot{v}) = \frac{1}{2} \int_A^l \chi \cdot \dot{\varepsilon}^{oc^2} \cdot A dz + \frac{1}{2} \int_A^l \int_A \chi \cdot \dot{\varepsilon}^{изг^2} dA dz, \quad (14б)$$

причем:

$$\int_A (1/\rho \cdot y)^2 dA = J \cdot \kappa^2 \approx J \cdot \left(\frac{d^2v}{dz^2} \right)^2, \quad (18)$$

где J — момент инерции поперечного сечения элемента. Тогда:

$$D(\dot{v}) = \frac{1}{2} A \cdot \chi \int_A^l \left(\frac{d\dot{u}}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} J \cdot \chi \int_A^l \left(\frac{d^2\dot{v}}{dz^2} \right)^2 dz. \quad (19)$$

Матрицу демпфирования удобнее и наглядней строить сложением двух матриц, получаемых из условий минимума каждого из двух слагаемых (19) с соблюдением общей нумерации степеней свободы КЭ. Сначала получим матрицу демпфирования стержневого элемента только при его сопротивлении изгибу (из второго слагаемого в выражении (19)).

Согласно алгоритму МКЭ [20] функцию скорости перемещений, перпендикулярных оси стержневого элемента (прогибов) \dot{v} , заменяем приближением \tilde{v} — функцией восполнения узловых значений скоростей перемещений \tilde{v} по длине КЭ с использованием кубической функции формы [N]:

$$\tilde{v}(\xi) = [N] \cdot \bar{v}, \quad (20)$$

где

$$[N]^T = \begin{pmatrix} 1 - 3 \cdot \xi^2 + 2 \cdot \xi^3 \\ l \cdot (\xi - 2 \cdot \xi^2 + \xi^3) \\ 3 \cdot \xi^2 - 2 \cdot \xi^3 \\ l \cdot (-\xi^2 + \xi^3) \end{pmatrix}; \quad (21)$$

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ \varphi_0 \\ v_l \\ \varphi_l \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где v_0, φ_0 — поступательное и угловое перемещение начального узла стержневого элемента; v_l, φ_l — соответствующие перемещения конечного узла элемента длиной l .

При этом выполняем замену переменной (глобальной ординаты z на локальную ξ):

$$z = \xi \cdot l; \quad (23)$$

$$D(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \cdot J \cdot \mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{A} \tilde{\mathbf{v}} \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} d\xi, \quad (24)$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^2 \\ \mathbf{l}^2 \cdot d\xi^2 \end{bmatrix}$.

Подставим выражение (20) в (24):

$$D(\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \cdot J \cdot (\mathbf{A}[\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{v}}) \cdot (\mathbf{A}[\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{v}}) \frac{\mathbf{l} \cdot d\xi}{d\xi} d\xi \quad (25)$$

или

$$D(\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \cdot J \cdot (\mathbf{A}[\mathbf{N}])^T \cdot \mathbf{A}[\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{l} d\xi; \quad (25b)$$

$$D(\bar{\mathbf{v}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{S} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{l} d\xi, \quad (26)$$

Участие выражений (14), (26) в выполнении условия стационарности (выполнении уравнения Эйлера для функции Лагранжа (выражения изменения полной энергии деформируемой во времени системы)):

$$\frac{\partial D}{\partial \bar{\mathbf{v}}} = 0, \quad (27)$$

даст в матричном уравнении движения (1) слагаемое:

$$\mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{v}}, \quad (28)$$

где \mathbf{S} — матрица демпфирования материала стержневого КЭ при его сопротивлении изгибу:

$$\mathbf{S} = \int_0^l \chi \cdot J \cdot (\mathbf{A}\mathbf{N})^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{N} \cdot \mathbf{l} d\xi. \quad (29)$$

В записи алгоритма МКЭ обычно для удобства вычислений принято в уравнении (29) представлять:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{N}. \quad (30)$$

Вычисляя \mathbf{S} по формуле (29) с учетом (30), получим:

$$\mathbf{S} = \frac{\chi \cdot J}{l^3} \int_0^l \begin{bmatrix} -6+12 \cdot \xi \\ l \cdot (-4+6 \cdot \xi) \\ 6-12 \cdot \xi \\ l \cdot (-2+6 \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ -6+12 \cdot \xi & l \cdot (-4+6 \cdot \xi) & 6-12 \cdot \xi & l \cdot (-2+6 \cdot \xi) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{l} d\xi, \quad (31)$$

или

$$\mathbf{S} = 2 \cdot \chi \cdot J \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{l^3} & \frac{3}{l^2} & -\frac{6}{l^3} & \frac{3}{l^2} \\ \frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} \\ -\frac{6}{l^3} & -\frac{3}{l^2} & \frac{6}{l^3} & -\frac{3}{l^2} \\ \frac{3}{l^2} & \frac{1}{l} & -\frac{3}{l^2} & \frac{2}{l} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Теперь получим слагаемое матрицы демпфирования материала стержневого элемента при его сопротивлении только растяжению-сжатию (из первого слагаемого в выражении (19)).

Заменим функцию скорости осевых перемещений \dot{u} ее приближением \tilde{u} — функцией восполнения двух узловых значений скоростей осевых перемещений \bar{u} по длине КЭ:

$$\tilde{u}(\xi) = [\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{u}},$$

где $[\mathbf{N}] = [1-\xi \quad \xi]$, — вектор функции формы (для восполнения скоростей продольных узловых перемещений \bar{u} по длине элемента, примем функцию формы линейной); $\bar{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \dot{u}_0 \\ \dot{u}_l \end{pmatrix}$ — вектор узловых значений осевых перемещений в стержневом элементе.

При этом выполняем замену переменной (глобальной) ординаты z на приведенную локальную ξ , $z = \xi \cdot \mathbf{l}$ (23):

$$D(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{A} \tilde{\mathbf{u}} \frac{d\mathbf{z}}{d\xi} d\xi, \quad (33)$$

причем в выражении (33) $\mathbf{A} = [d/l \cdot d\xi]$.

$$D(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \cdot \mathbf{A} (\mathbf{A}[\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{A}[\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{u}}) \frac{\mathbf{l} \cdot d\xi}{d\xi} d\xi \quad (34)$$

или:

$$D(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}[\mathbf{N}])^T \cdot \mathbf{A}[\mathbf{N}] \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{l} d\xi. \quad (34b)$$

$$D(\bar{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{l} d\xi. \quad (34b)$$

Участие уравнения (15) в выполнении условия стационарности $\partial D / \partial \bar{\mathbf{u}} = 0$ принесет в матричное уравнение движения (1) слагаемое:

$$\mathbf{S} \cdot \bar{\mathbf{u}}, \quad (35)$$

где \mathbf{S} — матрица демпфирования материала стержневого КЭ при его сопротивлении чистому растяжению-сжатию:

$$\mathbf{S} = \int_0^l \chi \cdot \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{N})^T \cdot \mathbf{A}\mathbf{N} \cdot \mathbf{l} d\xi \quad (36)$$

или с учетом уравнения (30):

$$\mathbf{S} = \int_0^l \chi \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{l} d\xi; \quad (37)$$

$$\mathbf{S} = \chi \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Рассматриваемый стержневой КЭ, работающий в плоскости, имеет по три степени свободы в каждом из двух его узлов.

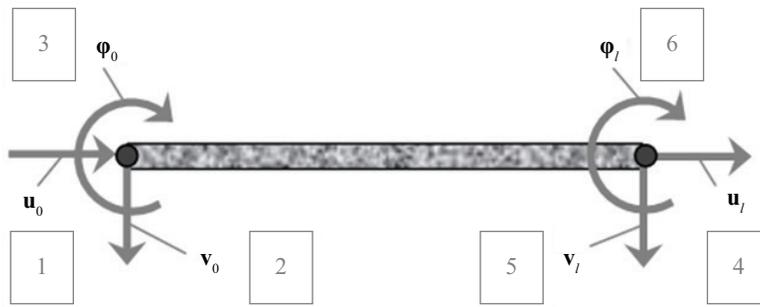


Рис. 2. Нумерация степеней свободы стержневого конечного элемента

Fig. 2. Numbering of degrees of freedom of the rod finite element

Теперь матрицу демпфирования материала стержневого КЭ построим сложением двух матриц (32) и (38), сформированных выше. Суммирование проведем согласно показанной на рис. 2 нумерации степеней свободы КЭ.

$$S = \chi \cdot \begin{bmatrix} \frac{A}{l} & 0 & 0 & -\frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot J}{l^3} & \frac{6 \cdot J}{l^2} & 0 & -\frac{12 \cdot J}{l^3} & \frac{6 \cdot J}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot J}{l^2} & \frac{4 \cdot J}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot J}{l^2} & \frac{2 \cdot J}{l} \\ -\frac{A}{l} & 0 & 0 & \frac{A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot J}{l^3} & -\frac{6 \cdot J}{l^2} & 0 & \frac{12 \cdot J}{l^3} & -\frac{6 \cdot J}{l^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot J}{l^2} & \frac{2 \cdot J}{l} & 0 & -\frac{6 \cdot J}{l^2} & \frac{4 \cdot J}{l} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Построение матрицы демпфирования относительно скоростей угловых деформаций

Рассеяние энергии при искажении формы произвольной точки деформируемого тела под действием динамических нагрузок представим следующей диссипативной функцией:

$$\Phi_D^{сдв} = \frac{1}{2} \chi^{сдв} \cdot \dot{\gamma}^2, \quad (40)$$

где $\chi^{сдв}$ — коэффициент вязкости при сдвиге в материале; γ — угловая деформация материала.

Тогда рассеяние энергии материалом стержневого КЭ при сопротивлении деформациям сдвига составит:

$$D(\dot{v}) = \frac{1}{2} \int \int_A \chi^{сдв} \cdot \dot{\gamma}^2 \, dA \, dz, \quad (41)$$

где l — длина конечного элемента; A — площадь поперечного сечения стержневого элемента; z — ордината вдоль оси стержневого элемента.

Согласно теории С.П. Тимошенко [1] угловые деформации γ принимаются приведенными по площади поперечного сечения:

$$D(\dot{v}) = \frac{1}{2} \int_l \chi^{сдв} \cdot A \cdot \dot{\gamma}^2 \, dz. \quad (416)$$

Функцию скорости угловых деформаций стержневого элемента $\dot{\gamma}$ заменяем приближением $\tilde{\gamma}$ — функцией восполнения узловых значений скоростей угловых деформаций $\tilde{\gamma}$ по длине КЭ с использованием функции формы $[N]$. При этом выразим скорость угловых деформаций $\tilde{\gamma}$ через скорость перемещений узлов \tilde{v}^B .

$$\tilde{\gamma}(\xi) = k \cdot [N] \cdot K_{сдв}^B \cdot \tilde{v}^B, \quad (42)$$

где $[N] = [1 - \xi \quad \xi]$, — вектор линейной функции формы (в этом случае принимаем изменение внутренних поперечных сил Q по длине элемента, а значит, и изменение картины распределения скоростей угловых деформаций по поперечным сечениям элемента по линейному закону); $K_{сдв}^B$ — матрица жесткости КЭ, в которой опущены все строки кроме 2-й и 5-й. Она служит для определения сдвиговых усилий Q в узлах КЭ; $k = 6 \cdot \alpha \cdot E \cdot I / G \cdot A \cdot l^3$ — жесткость в поперечном сечении для определения осредненных угловых деформаций КЭ; G — модуль упругости материала сдвигу; α — коэффициент формы поперечного сечения, учитывающий неравномерность распределения угловых деформаций по поперечному сечению:

$$\tilde{v}^B = \begin{pmatrix} v_0 \\ \phi_0 \\ v_1 \\ \phi_1 \end{pmatrix}; \quad (22)$$

$$K_{сдв}^B \cdot \tilde{v}^B = Q; \quad (43)$$

$$K_{сдв}^B = \begin{bmatrix} \frac{12 \cdot EJ}{l^3} & \frac{6 \cdot EJ}{l^2} & -\frac{12 \cdot EJ}{l^3} & \frac{6 \cdot EJ}{l^2} \\ -\frac{12 \cdot EJ}{l^3} & -\frac{6 \cdot EJ}{l^2} & \frac{12 \cdot EJ}{l^3} & -\frac{6 \cdot EJ}{l^2} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

При этом выполняем замену переменной (глобальной ординаты z на локальную ξ) $z = \xi \cdot l$ (23):

$$D_{сдв}(\tilde{\gamma}) = \frac{1}{2} \int_0^1 \chi^{сдв} \cdot A \cdot \dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma} \frac{l \cdot dz}{d\xi} \, d\xi; \quad (45)$$

$$D^{сдв}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \cdot (A[N] \cdot \bar{v}) \times (A[N] \cdot \bar{v}) \frac{1 \cdot d\xi}{d\xi} d\xi \quad (46)$$

или

$$D^{сдв}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_0^l \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \cdot (A[N])^T \cdot A[N] \cdot \bar{v} \cdot \bar{v} \cdot 1 d\xi; \quad (47)$$

$$D^{сдв}(\bar{v}) = \frac{1}{2} \int_0^l S^{сдв} \cdot \bar{v} \cdot \bar{v} \cdot 1 d\xi. \quad (48)$$

Участие уравнения (48) в выполнении условия стационарности изменения полной энергии деформируемой во времени системы:

$$\frac{\partial D^{сдв}}{\partial \bar{v}} = 0 \quad (49)$$

даст в матричном уравнении (1) слагаемое:

$$S^{сдв} \cdot \bar{v}, \quad (50)$$

где $S^{сдв}$ — матрица демпфирования материала стержневого КЭ, пропорциональная скорости изменения сдвиговых деформаций:

$$S^{сдв} = \int_0^l \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \cdot (AN)^T \cdot AN \cdot 1 d\xi. \quad (51)$$

Приняв $B = AN$ (30), получим:

$$S^{сдв} = \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \int_0^l \begin{matrix} B^* \\ 2-4 \cdot \xi \\ 1 \cdot (1-2 \cdot \xi) \\ -2+4 \cdot \xi \\ l-2 \cdot \xi \cdot l \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B \\ 2-4 \cdot \xi \\ 1 \cdot (1-2 \cdot \xi) \\ -2+4 \cdot \xi \\ l-2 \cdot \xi \cdot l \end{matrix} \cdot 1 d\xi, \quad (52)$$

или

$$S^{сдв} = \frac{1}{3} \cdot \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \cdot l \cdot \begin{matrix} 4 & 2 \cdot l & -4 & 2 \cdot l \\ 2 \cdot l & l^2 & -2 \cdot l & l^2 \\ -4 & -2 \cdot l & 4 & -2 \cdot l \\ 2 \cdot l & l^2 & -2 \cdot l & l^2 \end{matrix}. \quad (53)$$

Теперь составим матрицу демпфирования для продольного сдвига. Ее выведем согласно теории Д.И. Журавского, которую он использовал для построения формулы касательных напряжений при изгибе балки: продольные касательные напряжения

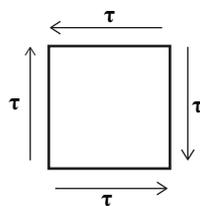


Рис. 3. Распределение касательных напряжений

Fig. 3. Tangential stress distribution

уравновешивают поперечные, они равны им по значению, но обратны по направлению (рис. 3).

Тогда матрица демпфирования при сопротивлении скоростям продольных сдвиговых деформаций примет форму:

$$S^{сдв} = \frac{1}{3} \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \cdot l \cdot \begin{matrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{matrix}. \quad (54)$$

Суммарная матрица демпфирования при сопротивлении скоростям сдвиговых деформаций, согласно нумерации узловых степеней свободы элемента, приведенной на рис. 2, имеет вид:

$$S^{сдв} = \frac{1}{3} \cdot \chi^{сдв} \cdot A \cdot k^2 \cdot l \cdot \begin{matrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \cdot l & 0 & -4 & 2 \cdot l \\ 0 & 2 \cdot l & l^2 & 0 & -2 \cdot l & l^2 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \cdot l & 0 & 4 & -2 \cdot l \\ 0 & 2 \cdot l & l^2 & 0 & -2 \cdot l & l^2 \end{matrix}. \quad (55)$$

Размерность коэффициента демпфирования при матрице демпфирования, полученной на основе энергетического подхода, исходя из сопротивления скоростям угловых деформаций для балки С.П. Тимошенко

Согласно виду матрицы демпфирования (55), полученной путем модификации диссипативной функции Рэлея (40), размерности ее элементов выглядят следующим образом:

$$S^{сдв} = \chi^{сдв} \cdot M^2 \cdot \frac{1}{M^2} \cdot M \cdot \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & M & 0 & -1 & M \\ 0 & M & M^2 & 0 & -M & M^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -M & 0 & 1 & -M \\ 0 & M & M^2 & 0 & -M & M^2 \end{matrix}. \quad (56)$$

Опуская в уравнении движения (1) пока не интересные нас слагаемые, имеем:

$$D \cdot \dot{V}(t) = \bar{F}(t). \quad (16)$$

Подставляя в (16) все размерности его элементов, имеем:

$$\chi^{сдв} \cdot M \cdot \begin{matrix} 1 & 0 & -M & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & M & 0 & -1 & M \\ 0 & M & M^2 & 0 & -M & M^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -M & 0 & 1 & -M \\ 0 & M & M^2 & 0 & -M & M^2 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \frac{M}{c} \\ \frac{M}{c} \\ \frac{1}{c} \\ \frac{M}{c} \\ \frac{M}{c} \\ \frac{1}{c} \end{matrix} = \begin{matrix} H \\ H \\ H \cdot M \\ H \\ H \\ H \cdot M \end{matrix}; \quad (57)$$

$$\chi^{сдв} [H \cdot c / M^2] \rightarrow [Па \cdot c] \rightarrow [кг / M \cdot c]. \quad (58)$$

Размерности коэффициентов, представленные

выше, из метода рэлеевского демпфирования:

$$\alpha = \frac{2 \cdot \xi_i \cdot \xi_j \cdot \omega_i \cdot \omega_j}{\xi_i \cdot \omega_i + \xi_j \cdot \omega_j} \left[\frac{1}{c} \right]; \quad (66)$$

$$\beta = \frac{2 \cdot \xi_i \cdot \xi_j}{\xi_i \cdot \omega_i + \xi_j \cdot \omega_j} [c]. \quad (76)$$

Размерность коэффициента вязкости:

$$\chi = E \cdot \frac{2 \cdot \xi}{\omega} [\text{Па} \cdot \text{с}] \rightarrow [\text{Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2] \rightarrow [\text{кг} / \text{м} \cdot \text{с}]. \quad (116)$$

Из коэффициентов демпфирования, рассмотренных в данной статье, требуемым полученным размерностям (58) удовлетворяет коэффициент, применяемый в работе [19]. Однако стоит отметить, что матрица демпфирования, используемая в публикации [19], построена относительно скоростей линейных деформаций, в то время как коэффициент $\chi^{\text{сдв}}$ относится к матрице, построенной относительно скоростей угловых деформаций (деформаций сдвига).

Тогда $\chi^{\text{сдв}}$ следует вычислять по следующей формуле:

$$\chi^{\text{сдв}} = G \cdot t_k = \frac{E \cdot t_k}{2 \cdot (1 + \nu)} = \frac{\chi}{2 \cdot (1 + \nu)}, \quad (59)$$

где ν — коэффициент Пуассона материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в статье матрицы демпфирования описывают диссипацию энергии при колебаниях механических систем за счет внутреннего трения в материале. Матрица внутреннего демпфирования получена с учетом влияния скоростей линейных и угловых деформаций для моделирования динамического поведения коротких изгибаемых элементов конструкций, при описании деформирования которых применяется модель Тимошенко. Выполненная проверка размерностей дополнительно подтверждает корректность построения матрицы демпфирования. При этом размерность предложенного коэффициента демпфирования с учетом сдвига такая же, как у широко используемого коэффициента вязкости.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М. : Мир, 1976. 669 с.
2. Сидоров В.Н., Бадьина Е.С., Детина Е.П. Численное моделирование колебаний композитных рамных конструкций с учетом демпфирования, нелокального во времени // Механика композиционных материалов и конструкций. 2022. Т. 28. № 4. С. 543–552. DOI: 10.33113/mkml.ras.2022.28.04.543_552.08. EDN ATPNWH.
3. Bazoune A. Combined influence of rotary inertia and shear coefficient on flexural frequencies of Timoshenko beam: numerical experiments // Acta Mechanica. 2023. Vol. 234. Issue 10. Pp. 4997–5013. DOI: 10.1007/s00707-023-03648-6
4. Onyia M.E., Rowland-Lato E.O. Finite Element Analysis of Timoshenko Beam Using Energy Separation Principle // International Journal of Engineering Research and Technology. 2020. Vol. 13. Issue 1. P. 28. DOI: 10.37624/ijert/13.1.2020.28-35
5. Дудаев М.А. Матрица жесткости балки Тимошенко в конечно-элементном анализе динамического поведения роторных турбомашин // Вестник Иркутского государственного технического университета. 2014. № 6 (89). С. 59–65. EDN SGIVXX.
6. Bathe K.J., Wilson E.L. Numerical methods in finite element analysis. Prentice-Hall Inc, 1976.
7. Sumali H., Carne T.G. Air-drag damping on micro-cantilever beams. Sandia National Laboratories M/S 1070Albuquerque, NM 87185-1070, 2007.
8. Рейнер М. Реология. М. : Наука. 1965. 223 с.
9. Shitikova M.V., Krusser A.I. Models of viscoelastic materials : a review on historical development and formulation // Advanced Structured Materials. 2022. Pp. 285–326. DOI: 10.1007/978-3-031-04548-6_14
10. Берендеев Н.Н., Зимин Н.В., Леонтьев Н.В., Любимов А.К., Смирнов И.А., Сторожев Е.В. Определение демпфирующих характеристик конструкции со сложной структурой // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75. № 4. С. 323–331. EDN RWPMBH.
11. Arora V., Adhikari S., Vijayan K. FRF-based finite element model updating for non-viscous and non-proportionally damped systems // Journal of Sound and Vibration. 2023. Vol. 552. P. 117639. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117639
12. Сорокин Е.С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания // Исследования по динамике сооружений. М. : Госстройиздат, 1951.
13. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М. : Гос. изд-во лит-ры по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. С. 130.
14. Barabash M.S., Pikul A.V. Material damping in dynamic analysis of structures // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 1970. Vol. 13. Issue 3. Pp. 13–18. DOI: 10.22337/1524-5845-2017-13-3-13-18
15. Потапов В.Д. Об устойчивости стержня при действии детерминированной и стохастической нагрузки с учетом нелокальной упругости и нелокального демпфирования материала // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2015. № 1. С. 9–16. EDN TKTLDH.

16. Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E. Review of nonlocal-in-time damping models in the dynamics of structures // *Axioms*. 2023. Vol. 12. Issue 7. P. 676. DOI: 10.3390/axioms12070676
17. Ghavanloo E., Shaat M. General nonlocal Kelvin–Voigt viscoelasticity: Application to wave propagation in viscoelastic media // *Acta Mechanica*. 2022. Vol. 233. Issue 1. Pp. 57–67. DOI: 10.1007/s00707-021-03104-3
18. Шенутько Е.С. Модель нелокального демпфирования материала при расчете стержневых элементов : дис. ... канд. техн. наук. М., 2019. 119 с.
19. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021. Vol. 17. Issue 4. Pp. 14–21. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-4-14-21
20. Сидоров В.Н., Бадина Е.С. Метод конечных элементов в задачах устойчивости и колебаний стержневых конструкций: примеры расчетов в Mathcad и MATLAB : учебное пособие. М. : Изд-во АСВ, 2021. 173 с.

Поступила в редакцию 15 апреля 2024 г.

Принята в доработанном виде 23 апреля 2024 г.

Одобрена для публикации 8 мая 2024 г.

ОБ АВТОРАХ: Владимир Николаевич Сидоров — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информатики и прикладной математики, академик РААСН; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; профессор кафедры строительных конструкций, зданий и сооружений Института пути, строительства и сооружений; **Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ));** 127994, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9; sidorov.vladimir@gmail.com;

Елена Сергеевна Бадина — доцент кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования Института пути, строительства и сооружений; **Российский университет транспорта (РУТ (МИИТ));** 127994, ГСП-4, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9; старший научный сотрудник отдела механики структурированной и гетерогенной среды Института прикладной механики; **Российская академия наук (РАН);** 125040, г. Москва, Ленинградский пр-т, д. 7; shepitko-es@mail.ru;

Дмитрий Олегович Климушкин — аспирант кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ);** 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; d.o.klimushkin@gmail.com.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Timoshenko S.P., Gere J. *Mechanics of Materials*. Moscow, Mir Publ., 1976; 669. (rus.).
2. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. Numerical modeling for oscillations of composite frames accounting for time-nonlocal damping. *Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2022; 28(4):543-552. DOI: 10.33113/mkkm.ras.2022.28.04.543_552.08. EDN ATPNWH. (rus.).
3. Bazoune A. Combined influence of rotary inertia and shear coefficient on flexural frequencies of Timoshenko beam: numerical experiments. *Acta Mechanica*. 2023; 234(10):4997-5013. DOI: 10.1007/s00707-023-03648-6
4. Onyia M.E., Rowland-Lato E.O. Finite element analysis of timoshenko beam using energy separation principle. *International Journal of Engineering Research and Technology*. 2020; 13(1):28. DOI: 10.37624/ijert/13.1.2020.28-35
5. Dudaev M. Timoshenko beam stiffness matrix in finite element analysis of turbomachine dynamic behavior. *Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2014; 6(89):59-65. EDN SGIVXX. (rus.).
6. Bathe K.J., Wilson E.L. *Numerical methods in finite element analysis*. Prentice-Hall Inc, 1976.
7. Sumali H., Carne T.G. *Air-Drag Damping on Micro-Cantilever Beams*. Sandia National Laboratories M/S 1070Albuquerque, NM 87185-1070, 2007.
8. Reiner M. *Rheology*. Moscow, Nauka, 1965; 223. (rus.).
9. Shitikova M.V., Krusser A.I. Models of viscoelastic materials : a review on historical development and formulation. *Advanced Structured Materials*. 2022; 285-326. DOI: 10.1007/978-3-031-04548-6_14
10. Berendeyev N.N., Zimin N.V., Leontyev N.V., Lyubimov A.K., Smirnov I.A., Storozhev E.V. Determining damping characteristics of a compound structure.

Problems of Strength and Plasticity. 2013; 75(4):323-331. EDN RWPMBH (rus.).

11. Arora V., Adhikari S., Vijayan K. FRF-based finite element model updating for non-viscous and non-proportionally damped systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2023; 552:117639. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117639

12. Sorokin E.S. Method of taking into account inelastic resistance of the material when calculating structures for vibrations. *Studies on the Dynamics of Structures*. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1951. (rus.).

13. Sorokin E.S. *To the theory of internal friction in oscillations of elastic systems*. Moscow, State publishing house of literature on construction, architecture and building materials, 1960; 130. (rus.).

14. Barabash M.S., Pikul A.V. Material damping in dynamic analysis of structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 1970; 13(3):13-18. DOI: 10.22337/1524-5845-2017-13-3-13-18

15. Potapov V.D. On the stability of a rod under deterministic and stochastic loading with allowance for nonlocal elasticity and nonlocal material damping. *Jour-*

nal of Machinery Manufacture and Reliability. 2015; 1:9-16. EDN TKTLDH (rus.).

16. Sidorov V., Shitikova M., Badina E., Detina E. Review of nonlocal-in-time damping models in the dynamics of structures. *Axioms*. 2023; 12(7):676. DOI: 10.3390/axioms12070676

17. Ghavanloo E., Shaat M. General nonlocal Kelvin–Voigt viscoelasticity: Application to wave propagation in viscoelastic media. *Acta Mechanica*. 2022; 233(1):57-67. DOI: 10.1007/s00707-021-03104-3

18. Shepit'ko E.S. *Non-local material damping model for the calculation of rod elements : thesis of candidate of technical sciences*. Moscow, 2019; 119. (rus.).

19. Sidorov V.N., Badina E.S., Detina E.P. Nonlocal in time model of material damping in composite structural elements dynamic analysis. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021; 17(4):14-21. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-4-14-21

20. Sidorov V.N., Badina E.S. *Finite element method in problems of stability and vibrations of rod structures: examples of calculations in Mathcad and MATLAB : study guide*. Moscow, ASV Publishing House, 2021; 173. (rus.).

Received April 15, 2024.

Adopted in revised form on April 23, 2024.

Approved for publication on May 8, 2024.

B I O N O T E S : **Vladimir N. Sidorov** — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Informatics and Applied Mathematics, Academician of the RAASN; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Professor of the Department of Building Structures, Buildings and Structures of the Institute of Railways, Construction and Structures; **Russian University of Transport (RUT (MIIT))**; build. 9, GSP-4, 9 Obraztsova st., Moscow, 127994, Russian Federation; sidorov.vladimir@gmail.com;

Elena S. Badina — Associate Professor of the Department of Computer Science and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer-Aided Design Systems of the Institute of Track, Construction and Structures; **Russian University of Transport (RUT (MIIT))**; build. 9, GSP-4, 9 Obraztsova st., Moscow, 127994, Russian Federation; senior researcher of the Department of Mechanics of Structured and Heterogeneous Environments, Institute of Applied Mechanics; **Russian Academy of Sciences (RAN)**; 7 Leningradsky pr., Moscow, 25040, Russian Federation; shepitko-es@mail.ru;

Dmitriy O. Klimushkin — postgraduate student of the Department of Informatics and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; postgraduate student of the Department of Computer Science and Applied Mathematics, d.o.klimushkin@gmail.com.

Contribution of the authors: all authors made equivalent contributions to the publication.

The authors declare that there is no conflict of interest.