

## Актуализация линейной телескопической модели осадки свай

Андрей Григорьевич Алексеев<sup>1,2</sup>, Степан Георгиевич Безволев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;*

<sup>2</sup> *Научно-исследовательский, проектно-изыскательский и конструкторско-технологический институт оснований и подземных сооружений им. Н.М. Герсеванова Научно-исследовательского центра «Строительство» (НИИОСП НИЦ «Строительство»); г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Показана целесообразность повышения точности и общности упрощенных решений для расчета осадки одиночных свай. Такие решения рекомендованы строительными нормами РФ для оценки величины проектной осадки свай, а также применяются для определения параметров контактных моделей при разработке конструкций свайных фундаментов.

**Материалы и методы.** Выполнены теоретический анализ и сопоставление методов расчета, основанных на аппроксимации работы свай в упругом полупространстве. Осуществлена проверка и разработана актуализация зависимостей основного аналитического решения, исходящего из телескопической схемы работы вмещающего сваю упругого массива.

**Результаты.** Представлены результаты сопоставления расчетов различными методами. Анализ выявил ряд расхождений в зависимости от параметров свай и грунтового основания. Разработаны рекомендации по применению рассмотренных решений и установлена область их использования — оценка начального линейного сопротивления свай и соответствующих параметров контактной модели, применяемой для конструирования свайного фундамента.

**Выводы.** Упрощенные решения для расчета осадки одиночных свай востребованы строительной практикой, повышение точности и общности таких решений обеспечивает определение адекватных параметров контактных моделей для разработки надежных и рациональных конструкций свайных фундаментов. Область использования актуализированного решения — оценка начального линейного сопротивления свай. Достоинством актуализированного решения является четко выделенная доля пяты свай, что позволяет отдельно оценить работу ее боковой поверхности, в частности, в актуальных задачах с выдерживающей нагрузкой на сваю или по учету «выключения» пяты свай из-за рыхлого шлама под пятой буронабивной свай.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** свая, осадка свай, допускаемая нагрузка на сваю, аналитическое решение, контактная модель, строительные нормы

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Алексеев А.Г., Безволев С.Г. Актуализация линейной телескопической модели осадки свай // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 5. С. 718–733. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.5.718-733

Автор, ответственный за переписку: Степан Георгиевич Безволев, [compgeo@ya.ru](mailto:compgeo@ya.ru).

## Updating the linear telescopic pile settlement model

Andrej G. Alekseev<sup>1,2</sup>, Stepan G. Bezvolev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU); Moscow, Russian Federation;*

<sup>2</sup> *Research, Design and Survey and Design and Technological Institute of Foundations and Underground Structures named after N.M. Gersevanov of the Research Centre “Construction”; Moscow, Russian Federation*

### ABSTRACT

**Introduction.** The expediency of increasing the accuracy and generality of simplified solutions for calculating the settlement of single piles is shown. Such solutions are recommended by the building codes of the Russian Federation for assessing the value of the design settlement of piles, and are also used to determine the parameters of contact models in the development of pile foundation structures.

**Materials and methods.** The theoretical analysis and comparison of calculation methods based on the approximation of pile work in an elastic half-space are performed. A verification and update of the dependencies of the main analytical solution based on the telescopic scheme of the elastic massif containing the pile is developed. Comparisons of the calculation results by various methods are presented.

**Results.** The analysis revealed a number of discrepancies depending on the parameters of the piles and the soil base. Recommendations for the application of the considered solutions are developed and the area of their application is established — assessment of the initial linear resistance of the pile and the corresponding parameters of the contact model used to design the pile foundation.

**Conclusions.** Simplified solutions for calculating the settlement of single piles are in demand in construction practice; increasing the accuracy and generality of such solutions ensures the definition of adequate parameters of contact mod-

els for developing reliable and rational designs of pile foundations. The scope of the updated solution is the assessment of the initial linear resistance of the pile. The advantage of the updated solution is the clearly identified share of the pile heel, which allows for a separate assessment of the work of its lateral surface, in particular in current problems with a pull-out load on the pile or by taking into account the “switching off” of the pile heel due to loose slurry under the heel of a bored pile.

**KEYWORDS:** pile, pile settlement, permissible load on a pile, analytical solution, contact model, building codes

**FOR CITATION:** Alekseev A.G., Bezvolev S.G. Updating the linear telescopic pile settlement model. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(5):718-733. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.5.718-733 (rus.).

*Corresponding author:* Stepan G. Bezvolev, compge@ya.ru.

## ВВЕДЕНИЕ

Изучению взаимодействия свайного фундамента с грунтовым массивом посвящено огромное количество научных работ. Разработаны различные аналитические и численные решения для прогноза несущей способности и осадки свай. Строгий учет совместной работы свай и нелинейной работы грунта возможен лишь численным методом в пространственной постановке. Для этого численная модель должна обладать надлежащими конфигурацией разбивки и габаритами расчетной области, обеспечивающими приемлемость приближенности условий на ее внешних границах. В результате пространственный расчет, особенно при неоднородном грунтовом основании и учете нелинейности, требует использования высокопроизводительных ЭВМ и характеризуется большой трудоемкостью и слабо контролируемой погрешностью в зависимости от количества и качества исходных данных. При этом даже современные модели нелинейного деформирования грунтов под нагрузкой не позволяют учесть все аспекты их работы, в частности, в составе свайного основания. Например, отсутствуют практичные численные методы для моделей, допускающих, наряду с упругим и упрочняющимся деформированием грунтов, идеальную пластичность и/или разупрочнение.

В этой ситуации востребовано применение методов, сочетающих достаточно простые и общие расчетные формулы с эмпирическими правилами, обеспечивающими адекватность проектным задачам этих формул и методик определения величин, входящих в них параметров. Так, действующие нормы РФ по проектированию свайных фундаментов СП 24<sup>1</sup> для контроля результатов, получаемых численными методами, предписывают применение упрощенных методик оценки таких основных показателей, как допускаемая нагрузка на сваю и ее осадка. Хорошо отработанными являются нормативные методы оценки несущей способности одиночных свай по грунту. Установившейся практикой стало обязательное применение данных стандартных полевых испытаний грунтов зондированием и нагружением свай, а также их контрольных статических испытаний. Эти методы позволяют надежно

установить допускаемую (расчетную, рабочую) нагрузку на одиночную сваю  $P$ .

По опыту авторов менее разработаны и неадекватны нормативной допускаемой нагрузке на сваю существующие методы расчета осадки одиночной сваи. Они, как правило, основываются на частных табличных, графических или аналитических решениях, которые требуют усовершенствования из-за узкой области применимости и несоответствия процессу работы сваи во всем диапазоне допускаемой на нее нагрузки.

Между тем простая расчетная зависимость для осадки одиночной сваи весьма востребована, так как на ее основе строятся практические решения по расчету осадок групп свай и контактные модели для разработки конструкций свайных фундаментов [1]. Основанные на упругой основе простые зависимости дают возможность решать сложные динамические и реологические задачи. Поэтому повышение точности и общности упрощенной методики расчета осадки одиночной сваи имеет большое практическое значение.

Упрощенные методы расчета осадки одиночной и групповых свай, используемые в нормах СП 24 и справочных пособиях по проектированию свайных фундаментов [1–5], основаны на решениях теории упругости. Наибольшее развитие задача об осадке одиночной сваи получила в разработках 1960–1970-х гг. (Н.Г. Poulos, Е.Н. Davis [6, 7], В.Г. Федоровский [8], М.Ф. Randolph, С.Р. Wroth [9, 10]). Методика [9] стала прорывной и развивалась авторами и их учениками в [2, 11, 12]. Формулы, приводимые в СП 24 и публикации [1], были разработаны в работе [8] и уточнены в исследовании [13] по результатам численного моделирования с использованием моделей однородного и двухслойного упругого полупространства. Эти же модели применены в решениях [6, 7], а в трудах [9–12] также использовалось упругое основание Гибсона (с линейно возрастающим с глубиной модулем сдвига). С учетом упругой основы для применения этих решений необходимо ограничивать расчетную нагрузку на сваю величиной, в диапазоне которой деформации грунта в основном линейны.

Привлекательный подобную [9] упрощенную схему работы вмещающего сваю упругого массива, вывод частного аналитического решения представлен в работе [14], приближенно рассмотревшей краевую задачу о взаимодействии «длинной, но несжимаемой» сваи с окружающим и жестким подстилаю-

<sup>1</sup> СП 24.13330.2021. Свайные фундаменты. СНИП 2.02.03-85/ОА «НИЦ “Строительство”» — НИИОСП им. Н.М. Герсеева. М., 2022. 85 с.

щим грунтами ограниченного простираения. В частности, использована цилиндрическая двухслойная упругая ячейка конечных размеров — радиусом  $r_x$  и высотой  $H = L + H_c$  (рис. 1, а).

В пределах глубины заглупления (рабочей длины)  $L$  сваи грунт с модулем деформации  $E_1$  испытывает лишь деформации телескопического сдвига, подстилающий жесткий ( $E_2 > 40$  МПа) слой толщиной  $H_c$  испытывает сжатие со сдвигом. Для ячейки ограниченных размеров существуют и более общие (без ограничения параметров сжимаемости сваи и грунтов) аналитические решения [15], разработанные для расчетов групповой сваи свайного фундамента при высоком и низком ростверке. В этом случае конкретный диаметр расчетной ячейки обусловлен симметрией и геометрическими параметрами (средним расстоянием между сваями) [16]. Общая проблема и погрешность использования аналитических [14], а также основной массы численных (МКЭ и др.) решений [3, 6, 7, 13, 17–22], для расчета осадки одиночной сваи обусловлены произволом в выборе размеров и параметров расчетной области, в частности  $r_x$  и  $H_c$ . Подобные величины указаны в рекомендациях СП 24 для численного моделирования графика нагрузка – осадка одиночной сваи (п. 7.7.13:  $r_x \geq 5d$ ,  $H_c \geq 3d$ , где  $d$  — диаметр поперечного сечения сваи). Согласно СНиП II-Б.2<sup>2</sup> свая считалась одиночной при расстоянии до ближайшей сваи  $r_x \geq 3d$ . Другой вариант —  $r_x$  по применявшейся СНиП II-Б.5<sup>3</sup> схеме условного фундамента ( $r_x = d/2 + L \tan(\varphi/4)$ ,  $\varphi$  — осредненный в пределах  $L$  угол внутреннего трения грунтов);  $H_c$  — нормативная глубина сжимаемой толщи под условным фундаментом (СП 22<sup>4</sup> и СП 24). Рекомендации СП 22 и СП 24 явно не отвечают отмеченным выше требованиям к граничным условиям

пространственной численной модели. Таким образом, моделирование по п. 7.7.13 СП 24 является приближенным инженерным методом, в рамках которого необходима полная регламентация выбора  $r_x$  и  $H_c$ , а также модели грунта и ее параметров.

В качестве еще одного альтернативного актуализируемого в статье метода отметим подход [4] к определению осадки одиночной сваи как суммы укорочения ствола  $s_c$  и сжатия грунта  $s_b$  от передаваемой на него пятой сваи нагрузки  $P_b$ . В работе [23] введенные в исследовании [4] составляющие осадки  $s_c$  и  $s_b$  предлагается суммировать с дополнительной составляющей осадки пяты сваи  $s_1$  от нагрузки  $P_1$ , передаваемой на грунт боковой поверхностью сваи. При этом в публикациях [4, 23] величины  $P_b$  и  $P_1$  предполагаются заданными и легко определяемыми из расчетов по предельной несущей способности сваи. Однако во многих случаях это не так просто и в принципе не соответствует упругому подходу для определения осадки сваи. По этой причине в СНиП II-Б.5, пренебрегая составляющей  $s_c$ , суммарная осадка  $s = s_b + s_1$  приближенно определялась по упомянутой выше схеме условного фундамента, равномерно распределяющего через подошву на грунт суммарную нагрузку  $P = P_b + P_1$ . Непосредственное рассмотрение условного действия на грунт нагрузки  $P$  (или  $P_b$  и  $P_1$ ) упрощает расчеты деформаций грунта с учетом элементов его упруго-пластической работы в диапазоне допускаемой на сваю расчетной нагрузки. Такое уточнение отвечает концепциям и эмпирической базе действующих норм СП 24. Адекватной актуализации такой разработки будет посвящена следующая работа авторов.

В труде [24] альтернативно пренебрегают работой грунта на сжатие под нижним концом сваи, т.е. принимают  $P = P_1$  ( $P_b = 0$ ) и считают осадку сваи  $s$  обусловленной в основном сдвиговыми деформациями окружающего грунтового массива, определяя ее от полной нагрузки. Видимо, этот способ пригоден при величинах  $P$ , при которых не достигается составляющая обычно порядка 10–20 мм, так называемая сдвиговая осадка [23, 25], и пята сваи не вступает в работу. В этих условиях заявленный [24] учет нелинейности (упругопластичности) сдвиговых де-

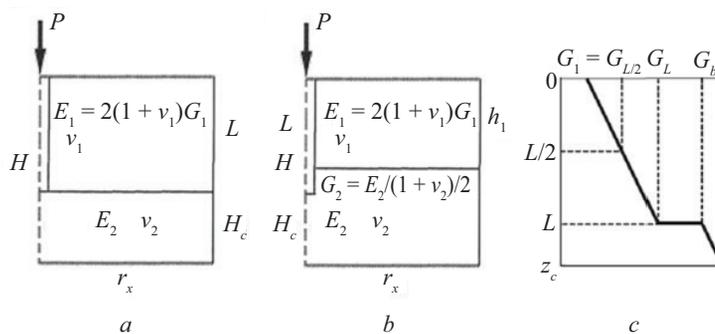


Рис. 1. Двухслойная свайная ячейка: а — расчетная; б — типовая проектная; с — грунт Гибсона

Fig. 1. Two-layer pile cell: a — calculated; b — typical design; c — Gibson soil

формаций вмещающего сваю грунта представляется не актуальным.

В данной статье исследованы рекомендованные для применения при проектировании свайных фундаментов упрощенных методов расчета осадки одиночной сваи СП 24 и [1–3], выполнено сопоставление результатов, определен ряд противоречий и существенные отличия результатов в зависимости от параметров свай и грунтового основания. Для преодоления выявленных противоречий был проведен анализ и актуализировано аналитическое решение [2, 9], разработаны его альтернативные структурные и частные формы. На базе сопоставлений установлена область применения решений, обеспечивающая надежность и согласованность результатов расчетов с теоретической основой (теорией упругости). Инженеры-геотехники могут учитывать полученные результаты при применении указанных упрощенных методов, а также использовать разработанные рекомендации и актуальные решения при проектировании свайных фундаментов.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В статье актуализируется упомянутое в сотнях научных публикаций аналитическое решение [2, 9] для расчета осадки одиночной сваи, основанное на телескопической модели сдвига грунта вокруг вдавливаемой сваи. Исследование и оценка ограничений рекомендованной для проектирования редакции этой методики [2] выполнены на основе анализа принятых гипотез, корректности вывода расчетных формул и сопоставлений упрощенных линейных расчетов по СП 24 и [1–3] между собой, а также с результатами численных [13, 17–22] и аналитических [26] расчетов по теории упругости.

Все сопоставления и оценки производились для свай, работающих по боковой поверхности и пяте (см. рис. 1, а), во встречающихся в современном строительстве диапазонах относительной: длины свай  $L/d = 5–100$ ; жесткости ее ствола  $K = E_p/E_1 = 100–10\,000$  (где  $E_p$  — модуль упругости сваи;  $E_1$  — осредненный в пределах  $L$  модуль деформации окружающего грунта) и показателя неоднородности грунтового основания  $E_1/E_2 = 0,01–100$  (где  $E_2$  — осредненный модуль деформации расположенных ниже пяты сваи грунтов). Для коэффициента Пуассона  $\nu$  грунтов принималось  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ . С учетом этого  $g_{12} = G_1/G_2 = E_1/E_2$  (где  $G$  — модуль сдвига).

### 1. Характеристика упругого расчета осадки одиночной сваи [3]

Согласно разделу 5.3 [3] осадка одиночной сваи рассчитывается по безразмерному коэффициенту осадки  $I_d$ , представленному формулой:

$$I_d = \frac{sE_1d}{P} = I_0R_KR_\nu R_b, \quad (1)$$

где  $I_0$  — коэффициент осадки для абсолютно жесткой сваи в упругом однородном  $E_1$  полупространстве

с  $\nu = 0,5$ ;  $R_K$  — поправочный коэффициент на сжимаемость ствола  $E_p/E_1$ ;  $R_\nu$  — то же для учета  $\nu < 0,5$ ;  $R_b$  — то же на показатель неоднородности грунтового основания  $E_1/E_2$  (при  $E_1 = E_2$ , но наличии жесткого подстилания на глубине  $h$  ниже уровня пяты сваи, вместо  $R_b$  используется коэффициент  $R_h$ ).

Подобное выражение представлено в работе [3] и для расчета доли нагрузки  $P_b/P$ , передаваемой на упругий массив пятой сваи:

$$\frac{P_b}{P} = \beta_0 C_K C_b C_\nu, \quad (2)$$

где  $\beta_0$  — доля осевой нагрузки для несжимаемой сваи в однородном полупространстве ( $\nu = 0,5$ );  $C_K$  — поправочный коэффициент на сжимаемость сваи;  $C_b$  — то же на неоднородность грунта  $E_1/E_2$ ;  $C_\nu$  — то же на  $\nu < 0,5$ .

Входящие в выражения (1) и (2) коэффициенты определяются по графическим номограммам, разработанным авторами [3] в 1968–1972 гг. численными расчетами по модели упругого однородного и двухслойного полупространства. С учетом очевидно ограниченных возможностей ЭВМ того периода расчеты велись при крупной (до 10–20 слоев элементов), а в МКЭ и с небольшими размерами расчетной области.

### 2. Характеристика методики расчета осадки одиночной сваи СП 24

Согласно разделу 7.4 СП 24 (гл. 4.7 [1]) коэффициент  $I_{sL}$  осадки  $s$  свай с  $L/d \geq 5$  (в СП 24 и  $\kappa = G_1/G_2 \cdot L/d \geq 7,5$ ):

$$I_{sL} = \beta = \frac{sG_1L}{P} = \left( \frac{\beta'}{\lambda_1} + \lambda_2 \frac{1 - \beta'/\alpha}{\chi} \right), \quad (3)$$

где  $P$  — вертикальная нагрузка, передаваемая на сваю;  $\lambda_1$  — параметр, характеризующий увеличение осадки за счет сжатия ствола и определяемый по формуле:

$$\lambda_1 = \frac{2,12\chi^{3/4}}{1 + 2,12\chi^{3/4}},$$

$\chi = EA/G_1L^2$  — относительная жесткость сваи;  $EA = E_p\pi d^2/4$  — жесткость ствола сваи на сжатие;  $\lambda_2$  — корректирующий коэффициент, равный 0,5 в редакции СП 24 и 1,0 в труде [1];  $\beta' = 0,17\ln(k_v\kappa)$  — коэффициент осадки, соответствующий абсолютно жесткой свае ( $EA = \infty$ );  $\alpha' = 0,17\ln(k_{v1}L/d)$  — тот же коэффициент для случая однородного основания с характеристиками  $G_1$  и  $\nu_1$ ;  $k\nu$ ,  $k_{v1}$  — коэффициенты, определяемые соответственно при  $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$  и при  $\nu = \nu_1$  по формуле:

$$k_\nu = 2,82 - 3,78\nu + 2,18\nu^2.$$

Как отмечалось выше, решение (2) получено на основе аналитической аппроксимации результатов численных (метод фиктивных сил, являющийся одним из вариантов метода потенциала) [7, 8] расчетов по модели упругого однородного и двухслойного

(с  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$ ) полупространства. В исследовании [13] решение (2) подтверждено численными расчетами по МКЭ применительно к упругому однородному и двухслойному грунту на несжимаемом основании посредством использования расчетной цилиндрической ячейки с  $r_x > 10L$  и  $H = 1,5L$  ( $H_c = L/2$ ).

### 3. Характеристика метода расчета осадки одиночной сваи [2]

Согласно разделу 4.2 [2] для свай, в грунтах, где возможно скачкообразное и линейное возрастание с глубиной модулем сдвига (рис. 1, с):

$$I_{sd} = I_{sl} \frac{G_L d}{G_1 L} = \frac{s G_L d}{P} = 1 + \frac{8\eta}{\pi\lambda(1-\nu)\xi} \frac{\tanh(\mu L) L}{\mu L} \frac{L}{d}; \quad (4)$$

$$= \frac{2\eta}{(1-\nu)\xi} + \frac{2\pi\rho \tanh(\mu L) L}{\zeta \mu L} \frac{L}{d};$$

$$\frac{P_b}{P} = \left[ \cosh(\mu L) + \frac{\pi\rho(1-\nu)\xi \sinh(\mu L) L}{\zeta\eta \mu L} \frac{L}{d} \right]^{-1}, \quad (5)$$

где  $\eta = d_b/d$  — коэффициент размеров пяты (уширения) сваи;  $\lambda = E_p/G_L$  (далее будет показано, что теоретически верно  $\lambda = E_p/G_1$ );  $\xi = G_L/G_b$ ;  $\rho = G_1/G_2$ ;  $\mu L = L/d$ ;  $\sqrt{8/(\zeta\lambda)} = \sqrt{2\pi/(\zeta\chi)}$ ;  $\zeta = \ln(2r_m/d)$ ;  $r_m$  — максимальный радиус, на котором предполагается, что осадки в грунте становятся пренебрежимо малыми, определяемый по формуле:

$$r_m = 2,5[0,1 + (\rho - \rho_\nu - 0,1)\xi]L. \quad (6)$$

При  $\rho = 1$  ( $G_1 = G_2$ ) и  $G_b = G_2$  ( $\xi = G_L/G_b = G_1/G_2$ ) эта модель [2] (рис. 1, с) сводится к двухслойной ячейке (рис. 1, а).

### 4. Анализ обоснования решения (3), его альтернативные структурные и частные формы

Решение (4) [1] представляет собой обобщение выражений, выведенных для случая  $\xi = 1$  в [9] на основе условий размерности и результатов интегрального анализа результатов численных (МКЭ) расчетов в упругой ячейке (см. рис. 1) при  $r_x = 25d$  и  $H_c = 1,5L$ . Этот анализ, так же как выводы выполненных ранее упругих расчетов [27, 28] и экспериментальных исследований [29, 30], свидетельствует о схеме телескопического сдвига грунта вокруг одиночно загружаемых вертикальной нагрузкой длинных (с  $L/d \geq 10$  [11]) свай. В этой схеме свая рассматривается как окруженная концентрическими цилиндрами грунта с распределенными по их поверхности касательными напряжениями. Данная предложенная изначально [30] модель концентрического цилиндра (МКЦ) передачи нагрузки свайей на грунт рассматривает взаимодействие сваи и грунта вдоль ствола и у основания как независимые пружины. В публикации [9] было показано, что в МКЦ жесткость упругих пружин, выраженная как гради-

ент локальных кривых передачи нагрузки, может быть соотнесена с модулем сдвига грунта с помощью коэффициентов передачи нагрузки.

В частности, для достижения вертикального равновесия величина напряжения сдвига на каждом цилиндре должна уменьшаться обратно пропорционально площади поверхности цилиндра. Записывая напряжение сдвига на стволе сваи как  $\tau_0$ , напряжение сдвига в радиусе  $r$  (для сваи радиуса  $r_0 = d/2$ ) определяется как  $\tau = \tau_0 r_0/r$ . Поскольку деформация вокруг сваи в основном связана со сдвигом, решение разработано в терминах модуля сдвига  $G$  и коэффициента Пуассона  $\nu$ , а не модуля Юнга  $E$  (при этом модуль сдвига связан с модулем Юнга  $E$  упругим выражением  $G = E/2/(1 + \nu)$ ). Таким образом, деформация сдвига  $\gamma$  в грунте, окружающем сваю, может определяться через  $\gamma = \tau/G_1$ . Так как основная деформация в грунте будет вертикальной, деформация сдвига может быть записана как  $\gamma \sim dw/dr$ , где  $w$  — вертикальное перемещение. Эти отношения дают:

$$w(z, r) = w_0 \log(r_m/r); \quad (7)$$

$$w_0(z) = \zeta \tau_0(z) r_0 / G_1, \quad (8)$$

где  $w_0$  и  $\tau_0$  зависят от  $z$  — глубины рассматриваемой точки боковой поверхности сваи.

Определяемый выражением (5) важнейший параметр  $\zeta$  телескопической модели основан на калибровке [9] сравнением с результатами численных расчетов по строгой упругой модели вмещающего абсолютно жесткую сваю полупространства. Согласно п. 7.4.4 СП 24 аналогичный по методологии коэффициент телескопической деформации определяется на основе методики п. 1.2 как  $\zeta = \ln(k_\nu k)$ , что соответствует несколько меньшим величинам  $r_m$ , чем определяются по выражению (5). Способ сближения результатов расчетов методом [2] с СП 24, а также его использования для коротких (с  $L/d < 10$  [11]) свай, посредством модификации выражения (5) представлен ниже. После определения тем или другим методом осадки сваи  $w_0$  как расположенной одиночно зависимость (7) позволяет очень просто пересчитывать осадку с учетом группового эффекта (влияния от нагружаемых соседних свай).

Вывод определяющего уравнения (4) приведен в исследовании [9] для случая  $\rho = 1$  и  $\xi = 1$  на основе выражения (8) с привлечением дифференциальной зависимости между перемещениями  $w(z)$  сжимаемого ствола сваи (упругого стержня) и продольной силой в сечении сваи  $N(z)$ :

$$\frac{\partial w(z)}{\partial z} = \frac{-N(z)}{EA}, \quad (9)$$

и уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N(z)}{\partial z} = -2\pi r_0 \tau_0(z). \quad (10)$$

Дифференцируя выражение (7) с учетом (6) и (8), получаем:

$$\frac{\partial^2 w(z)}{\partial z^2} = \frac{2\pi G_1}{\zeta EA} w(z) = K_1 w(z). \quad (11)$$

Решением этого дифференциального уравнения второго порядка является гиперболическая функция:

$$w(z) = A \exp(\mu z) + B \exp(-\mu z), \quad (12)$$

в которой  $\mu^2 = K_1$ .

С учетом  $E_p = EA/(\pi r_0)^2$  в работе [9] введено эквивалентное выражение  $\mu^2 = 2/\zeta\lambda/(r_0)^2$ , в котором  $\lambda = E_p/G_1$ . Однако в выражении (4) [2] используется  $\lambda = E_p/G_L$ . Очевидно, что при линейном возрастании модуля сдвига грунта с глубиной (рис. 2) для теоретически корректного описания упругого взаимодействия сваи и грунта в уравнении (11) (а значит и в (4)) корректно применять  $\lambda = E_p/G_1$ .

В публикации [9] приводящие к расчетной формуле (4) определяющие выражения для констант  $A$  и  $B$  (12) найдены в два этапа. На первом путем постановки двух граничных условий на одном и том же нижнем конце сваи они были определены с точностью до одного параметра. В курсе высшей математики такое определение называется решением (11) как задачи Коши [31], что требует привлечения дополнительного условия и, как правило, приводит к более громоздкому виду расчетной функции.

Первое условие использует формулу Буссинеска для круглого штампа на поверхности упругого полупространства [32]:

$$s_d = \frac{P_d(1-\nu)}{4r_d G}, \quad (13)$$

где  $s_d$  и  $P_d$  — осадка штампа и реакция на него грунта;  $r_d$  — радиус штампа.

Модифицируя выражение (13) вводом коэффициента  $\eta_s$  (в [2]  $\eta_s = \eta = d_b/d$ , а в [9] в качестве аналогичного по смыслу коэффициента используется коэффициент в числителе) и переходя от  $G_b$  к  $E_b$  (чтобы подчеркнуть, что под пятой сваи основным является деформация сжатия грунта), в исследованиях [2, 9] фактически принято:

$$s_b = w_{z=L} = \frac{P_b(1-\nu)}{2G_b d\eta_s} = \frac{P_b(1-\nu^2)}{E_b d\eta_s}. \quad (14)$$

В работе [9] отмечается принципиальная возможность учета в коэффициенте типа  $\eta_s$  влияния факторов, определяющих условия работы пяты, таких как отличие ее формы от круговой и не учитываемое поверхностной зависимостью (13) влияние заглубления пяты в упругое полупространство. Из-за противоречивости данных об этом влиянии в публикации [9] принято  $\eta_s = 1$ , а в выражении (4) [2]  $\eta_s = \eta = d_b/d$ . Эти величины предполагают работу пяты как круглого гладкого поверхностного штампа.

Более подробное обсуждение учета условий работы пяты посредством  $\eta_s$  представлено ниже.

Второе граничное условие [9] следует из выражения (9):

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_{z=L} = \frac{-P_b}{EA} = \frac{-P_b}{\pi r_0^2 \lambda G_1}. \quad (15)$$

Таким образом, условия (14) и (15) содержат неизвестную еще величину грунта — упругую реакцию грунта под пятой сваи. Однако получаемые [9] по уравнениям (9) и (12) аналитические выражения пропорциональны  $P_b$  и  $P_b$  исключается для отношения этих выражений, в частности,  $N(z)/w(z)$  не зависит от  $P_b$ .

Таким образом, решение (12) найдено в труде [9] с двумя граничными условиями на нижнем конце сваи (14) и (15), с дополнительным привлечением отношения (9) и (12), в частности, в уровне головы сваи  $z = 0$ .

Однако найти эквивалентное решение (12) можно и более просто, используя обычный подход в один этап, с постановкой по одному граничному условию на каждом торце сваи в качестве условия на верхнем торце (в голове) сваи, где известна заданная нагрузка  $P$ :

$$P = N_{z=0} = -EA \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} = -\pi r_0^2 \lambda G_1 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0}. \quad (16)$$

Более общее и корректное решение задачи получим, записав на нижнем торце (пяте) сваи граничное условие относительно ее коэффициента постели (Винклера):

$$K_b = \frac{N_{z=L}}{w_{z=L}} = -EA \frac{(\partial w/\partial z)_{z=L}}{w_{z=L}} = -\pi r_0^2 \lambda G_1 \frac{(\partial w/\partial z)_{z=L}}{w_{z=L}}. \quad (17)$$

При этом величина  $K_b$  для пяты сваи определяется по выражению (14):

$$K_b = \frac{2G_b d\eta_s}{1-\nu_b} = \frac{E_b d\eta_s}{1-\nu_b^2}. \quad (18)$$

Граничные условия (16) и (17) с учетом (18) дают следующее решение дифференциального уравнения (12):

$$I_{sl} = \frac{sG_1 L}{P} = \psi \frac{k' \exp(2\mu L) + 1}{k' \exp(2\mu L) - 1}; \quad (19)$$

$$P_{bo} = \frac{P_b}{P} = \frac{k' - 1}{k' \exp(\mu L) - \exp(-\mu L)}, \quad (20)$$

где  $\psi = \frac{\zeta \mu L}{2\pi}$ ;  $k' = \frac{K_b + \mu EA}{\mu EA - K_b}$ .

При  $K_b = 0$  ( $G_b = 0$ ,  $k' = 1$ ), что соответствует «выключению» пяты из-за отсутствия ее контакта с грунтом (из-за сохранения рыхлого шлама под пятой буронабивной сваи или в случае отсутствия сцепления с пятой грунта или его нулевым сопро-

тивлением растяжению при выдергивании сваи), выражение (19) упрощается до:

$$I_{sL} = I_{sLa} = \psi / \tanh(\mu L), \quad (21)$$

что совпадает с уравнением (4) при  $\eta = 0$  с учетом  $\rho = G_1/G_L$ .

Для опирающейся пятой на абсолютно жесткую скалу сваи-стойки ( $\xi = 0$ )  $K_b = \infty$  ( $k' = -1$ ) выражение (19) упрощается до:

$$I_{sLa} = I_{sL} = \psi \tanh(\mu L), \quad (22)$$

что совпадает с решением [33], а (20), так же как (6), при  $\eta = \infty$ , до:

$$P_{bo} = 1 / \cosh(\mu L). \quad (23)$$

Несмотря на функциональное отличие выведенной здесь основной аналитической формулы (19) от полученного ранее выражения (4) [2, 9], при применении корректного выражения параметра относительной сжимаемости сваи, в частности  $\lambda = E_p/G_1$ , а не  $\lambda = E_p/G_L$  [2], результаты расчетов по выражениям (4) и (19) фактически совпадают. Относительная разница в результатах для свай со средним значением  $\lambda = 1000$  при  $L/d = 5-100$  и  $G_1/G_2 = 0,01-2$  составляет величину порядка  $10^{-14}$ . Это обозначает математическую эквивалентность уравнений (4) и (19). С учетом этого телескопическое решение о взаимодействии сваи с грунтовым массивом далее будем обозначать как (4/19).

Сопоставление показывает, что за счет применения  $\lambda = E_p/G_L$  [2] вместо  $\lambda = E_p/G_1$ , уменьшение подсчитанных по выражению (4) осадок для свай с  $L/d = 100$  достигает 30 %.

Выведенная структурная форма (19) этого решения показывает, что в интервале  $k' = [-1; 1]$  ( $1 < k' > -1$ ) вдавливаю сваи соответствует расчетное растяжение пяты сваи ( $P_{bo} < 0$ ) подстилающим ее упругим грун-

том. Этому интервалу  $k'$  соответствует лишь  $K_b < 0$ , а при использовании формулы (19) он заведомо не применяется. Это исключает ситуацию, когда телескопическое решение предполагает наличие у дисперсного грунта сопротивления растяжению и адгезии (сцепления) этого грунта с пятой сваи. Таким образом, телескопическое решение исключает работу грунта на растяжение, которую в некоторых случаях, например, при коротких сваях в области их пяты, прогнозируют численные расчеты по теории упругости [27]. При концентрации нагрузки в нижней части сваи расчетное растяжение грунта отмечается и в периферийных зонах окружающего сваю упругого массива.

В работе [12] предложено использовать вытекающее из уравнения (4) выражение, записанное относительно коэффициента постели (Винклера) одиночной сваи  $K = P/s$ :

$$\bar{K} = \frac{K}{\mu EA} = \frac{\bar{K}_b + \tanh(\mu L)}{1 + \bar{K}_b \tanh(\mu L)}, \quad (24)$$

$$\text{где } \bar{K}_b = \frac{K_b}{\mu EA}.$$

Путем несложных преобразований можно показать, что выражение (24) эквивалентно и (19). Форма (24) демонстрирует, что произведение жесткости идеальной сваи-стойки ( $\bar{K}_b = \infty$ ,  $\bar{K} = \coth(\mu L)$ ) и жесткости идеальной сваи-трения ( $\bar{K}_b = 0$ ,  $\bar{K} = \tanh(\mu L)$ ) той же длины равно квадрату жесткости бесконечно длинной сваи  $\bar{K} = \bar{K}_b = 1$ . Это замечательное свойство означает, что  $\bar{K} = \bar{K}_b = 1$  является геометрическим средним кривых  $\bar{K}$  для  $\bar{K}_b = \infty$  и  $\bar{K}_b = 0$  от  $\mu L$ .

С учетом этого для сваи со стволом, расположенным в произвольном по отношению к уровню пяты сваи двухслойном грунте (см. рис. 1, б), получено достаточно простое выражение для жесткости  $K$ , а значит, и осадки сваи [12]:

$$I_{sL} = \frac{sG_1L}{P} = \frac{G_1L}{K} = \psi \frac{\mu_1 EA + K_b \tanh(\mu_2 h_2) + [K_b + \mu_2 EA \tanh(\mu_2 h_2)] \tanh(\mu_1 h_1)}{[\mu_1 EA + K_b \tanh(\mu_2 h_2)] \tanh(\mu_1 h_1) + K_b + \mu_2 EA \tanh(\mu_2 h_2)}, \quad (25)$$

где  $h_2 = L - h_1$ ;  $\mu_1$  и  $\mu_2$  рассчитываются с применением модуля сдвига грунт а на соответствующем участке сваи при  $\xi = 1$ .

Можно легко убедиться, что при  $h_1 = 0$  уравнение (25) сводится к уравнению (24) для однородного грунта с  $\mu = \mu_2$ , а  $h_2 = 0$  ( $h_1 = L$ ) соответствует двухслойному грунту (рис. 1, б) с  $\mu = \mu_1$ . Отметим, что схема на рис. 1, б является наиболее рациональной при классическом применении свай с заглублением их нижней части в подстилающий более слабую покровную толщу несущий слой грунтового основания.

Рассмотрим использование в решении (4/19) коэффициента  $\eta_s$  для учета условий работы пяты сваи, в частности влияния ее размеров, формы, неоднородности подстилающего грунта и заглубления, а также способа устройства и вида грунта. Для воз-

можности комплексного учета различных факторов представим следующую зависимость:

$$\eta_s = \prod_{i=0}^n \eta_i = \eta_0 \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n, \quad (26)$$

где  $\eta_i$  — коэффициент влияния  $i$ -го фактора, определяющего условия работы пяты.

При  $\eta_s = 1$  зависимость (18) совпадает с (13). Для учета способа устройства сваи и вида грунта целесообразно принять  $\eta_0 = \gamma_c \gamma_{cr}$ , где  $\gamma_c$  и  $\gamma_{cr}$  — нормативные коэффициенты СП 24 (табл. 7.4 или п. 7.2.6).

Рассмотрим факторы, приводящие к другим компонентам  $\eta_s$ , выделим четыре основных фактора и приведем рекомендации по их назначению.

Коэффициент  $\eta_2$  влияния прямоугольной формы пяты в зависимости от отношения сторон  $l/b$

Coefficient  $\eta_2$  of influence of rectangular shape of heel depending on the ratio of sides  $l/b$

$l/b$	1	2	3 "	4 "	5 "
$\eta_2$	0,99	0,97	0,94	0,91	0,87

Отличие диаметра  $d_b$  (площади) пяты сваи от диаметра  $d$  ее ствола учитывает зависимость [2]  $\eta_1 = \eta = d_b/d$ . По причинам, указанным выше, при выдерживающей нагрузке или присутствии под пятой буровой сваи рыхлого шлама  $\eta_1 = 0$ .

Представленные в таблице величины коэффициента  $\eta_2$  для учета отличия прямоугольного сечения пяты баретной сваи от соответствующего  $\eta_2 = 1$  круга получены по данным обобщения (13) [32] Шлейхером [34] на штампы прямоугольной формы. Если для обычной квадратной забивной сваи  $\eta_2 = 0,99 \approx 1$ , то для применяемых для баретных свай прямоугольных сечений с соотношением сторон 1:5 имеем  $\eta_2 = 0,87$ .

Учет фактора наличия на некоторой глубине под пятой жесткого подстилания приведен в труде [12]. По данным решений теории упругости для штампа на упругом слое [35]  $\eta_3 = 1 + 0,65d_b/H_c$ , где  $H_c$  — толщина упругого слоя под пятой.

Как указывалось выше, влияние линейного возрастания с глубиной жесткости подстилающего пяту грунта Гибсона было приближенно учтено в работе [9] при разработке формулы для коэффициента  $\zeta$ . Альтернативное исследование этого фактора с использованием представленных в публикации [36] формул для коэффициента Винклера такого грунта подтвердили адекватность учета [2, 9].

Рассмотрим подробнее проблему учета [2, 9] фактора  $\eta_4$  — влияния заглубления пяты в упругое полупространство. По результатам упомянутого выше анализа в [2, 9] принято  $\eta_4 = 1$ . Согласно ГОСТ 20276.1<sup>5</sup> на определение модуля деформации грунта в случае заглубленного винтового штампа  $\eta_4 = 1 - 1,4$  с  $\eta_4 = 1,4$  при  $L/d_b \geq 5$ . Такие повышающие сопротивления грунта  $\eta_4$  вытекают из решений, полученных интегрированием формулы Миндлина [37] для сосредоточенной силы, приложенной внутри однородного упругого полупространства. Отметим зависимости для осадки под заглубленной нагрузкой, равномерно распределенной по площади круга [38, 39] и прямоугольника [40]. Однако при применении таких решений следует учитывать, что анализ описывающей упругое поведение грунта величины  $\eta_4$  должен проводиться с учетом совместного влияния жесткостных параметров сваи и неоднородности основания.

С этой целью рассмотрим вариации параметра  $\eta_4$  с использованием результатов выполненных упругих расчетов осадки и реакций пяты одиночных свай с применением выражений (1) и (2) [3], а также

по результатам проведенных в рамках настоящего исследования численных (МКЭ) расчетов по Плакисис [41]. В частности, использовалась моделирующая вмещающее сваю упругое полупространство (УПП), разбитая на мелкие (very fine) 15-узловые конечные элементы, расчетная область с  $r_x = 10L$  и  $H = 6L$  (см. рис. 1).

На рис. 2 представлены подсчитанные этим способом графики изменения величины  $\eta_4$  в зависимости от относительных длины  $L/d$  и показателя  $g_{12}$  неоднородности грунтового массива для абсолютно жесткой (рис. 2, а) и сжимаемой (рис. 2, б) свай. Для сопоставления на рис. 2 приведены также величины  $\eta_4$  теоретических решений для гладкого [32] и сцепленного [42] штампов на поверхности ( $L/d = 0$ ) однородного ( $g_{12} = 1$ ) полупространства.

Данные рис. 2 показывают очевидную значительную погрешность расчетов по выражениям (1) и (2) [3]. Как отмечалось в п. 1, это может объясняться ограниченной точностью выполненных на рубеже 70-х гг. численных расчетов на ЭВМ. Другая серьезная причина математическая — произведение нескольких коэффициентов неизбежно ведет к увеличению диапазона погрешностей, так как погрешности каждого параметра умножаются. Особенно грубые погрешности в формулах (1) и (2) могут дать коэффициенты неоднородности  $R_b$  и  $C_b$ . Об этом свидетельствуют и представленные на рис. 2, б результаты численных расчетов по модели УПП Плакисис [41]. Эти данные демонстрируют качественное различие между результатами [3] и [41] для двухслойного основания и их сходимость в однородном случае, что свидетельствует о том, что полученные по выражениям (1) и (2) величины  $\eta_4$  в промежуточном диапазоне  $l/d = 10-25$ ,  $E_1/E_2 = 0,1-0,5$  могут являться ошибочными (техническими «отскоками»), а действительные значения находятся в промежутке между данными при  $l/d < 10$  и  $l/d > 25$  примерно в диапазоне  $\eta_4 = 0,55-0,9$ . Учитывая структуру зависимости (14) и решения (4/19), запас надежности расчета осадки в практически значимых диапазонах  $l/d$  и  $E_1/E_2$  обеспечивает величина  $\eta_4 = 0,5$ . Эта величина означает, что в результате взаимовлияния между нагрузками, передаваемыми пятой и боковой поверхностью сваи, податливость под пятой выше, чем для штампа на поверхности упругого полупространства [32, 42]. В свою очередь, принятая в работах [2, 9] величина  $\eta_4 = 1$  предполагает равенство этих податливостей. В обоих случаях  $\eta_4 \leq 1$  и в (4/19) исключается работа расположенного выше пяты сваи упругого массива на растяжение.

Структура выражений (19)–(23) позволяет подобно применению  $\eta_4$  для пяты учесть влияние условий

<sup>5</sup> ГОСТ 20276.1–2020. Грунты. Метод испытания штампом. М. : Стандартинформ, 2020. 14 с.

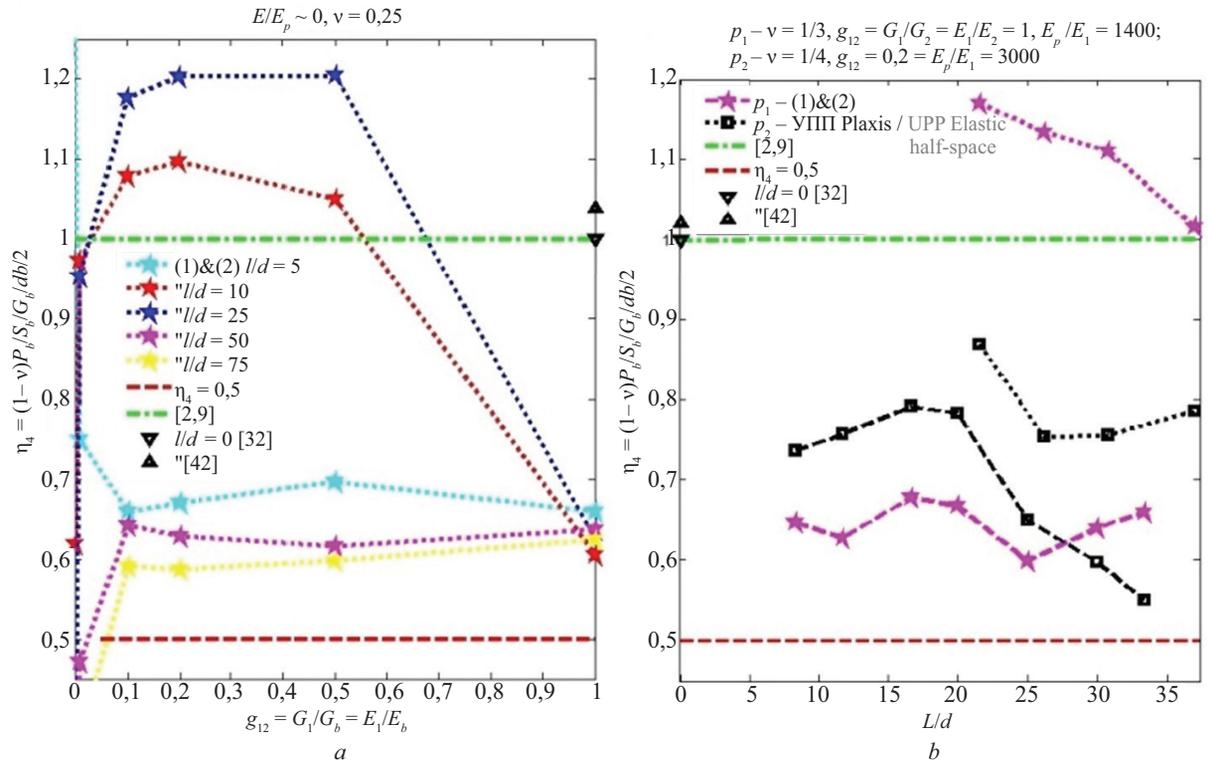


Рис. 2. Анализ влияния неоднородности упругого полупространства и жесткости сваи на условия работы грунта у пяты сваи: *a* — абсолютно жесткая свая  $E_p/E_p \approx 0, \nu = 1/3$ ; *b* — упругие сжимаемые сваи  $p_1$  с  $\nu = 1/3, g_{12} = G_1/G_2 = E_1/E_2 = 1, E_p/E_1 = 1400, E_1 = 17 \text{ МПа}$  и  $p_2$  с  $\nu = 1/4, g_{12} = 0,2, E_p/E_1 = 3000, E_1 = 8 \text{ МПа}$

Fig. 2. Analysis of the influence of heterogeneity of the elastic half-space and pile rigidity on the working conditions of the soil at the pile heel: *a* — absolutely rigid pile  $E_p/E_p \approx 0, \nu = 1/3$ ; *b* — elastic compressible piles  $p_1$  with  $\nu = 1/3, g_{12} = G_1/G_2 = E_1/E_2 = 1, E_p/E_1 = 1400, E_1 = 17 \text{ MPa}$  and  $p_2$  with  $\nu = 1/4, g_{12} = 0,2, E_p/E_1 = 3,000, E_1 = 8 \text{ MPa}$

работы сваи по боковой поверхности посредством коэффициента  $\alpha_s$ . В частности, принимая  $\mu^2 = \alpha_s K_1$ , где  $K_1$  определено в выражении (9). Уточнение величин компонентов является задачей дальнейших исследований. В первом приближении целесообразно принять  $\alpha_s = \alpha_0 = \gamma_c \gamma_{cf}$ , где  $\gamma_c$  и  $\gamma_{cf}$  — нормативные коэффициенты СП 24 (табл. 7.4 или 7.6).

### 5. Оценка применимости основанных на теории упругости расчетных зависимостей

Представленные выражения (4/19) основаны посредством калибровки на телескопической модели деформации вмещающего сваю упругого полупространства. Привлечение теории упругости обуславливает присущие ей недостатки. В частности, игнорирование ограниченной возможности дисперсного грунта работать на растяжение и завышение распределительной способности грунтового массива. Выше на основе анализа структурной формы (19) телескопического решения было показано, что оно исключает работу грунта на растяжение.

Высокая распределительная способность упругого массива не согласуется с фиксируемой в опытах концентрацией напряжений и деформаций в примыкающих к месту приложения нагрузки (контактной поверхности) областях грунта. В российской практике проектирования фундаментов учет этого обстоя-

тельства на настоящем этапе выполняется хорошо зарекомендовавшим себя методом расчета на основе инженерной модели осадок фундамента мелкого заложения, а также условного фундамента СП 24, в частности, способом СП 22 ограничения сжимаемой толщи грунтового основания  $H_c$ , в пределах которой под подошвой фундамента интегрируется расчетное сжатие от вертикальных нормальных напряжений  $\sigma_{zq}$ . Способ основан на данных экспериментов и натурных наблюдений. Как впервые показано в работе [43], распределение вертикальных перемещений грунта по глубине в принципе отличается от расчетного по теории УПП. В то же время распределение сонаправленных нагрузке вертикальных напряжений, особенно в основаниях с постепенно возрастающей с глубиной жесткостью или при слоистости  $E_1/E_2$  порядка 0,5–5, хорошо качественно и близко количественно соответствует рассчитанной по УПП [44]. Основная часть суммарного сжатия основания, т.е. осадки, концентрируется в верхней части основания фундамента толщиной  $H_0 \approx b/2$  ( $b$  — ширина фундамента). С ростом нагрузки толщина этой зоны может возрастать. Для обеспечения сходимости с опытными данными в СП 22 нижнюю границу сжимаемой толщи определяют как глубину  $Z_c \geq H_0$ , на которой рассчитан-

ное по УПП вертикальное напряжение от внешней нагрузки  $\sigma_{zq} \leq 50\%$  (для грунтов с  $E > 7$  МПа) бытового давления (эффективного напряжения в грунте до начала строительства)  $\sigma_{zg}$ . При этом деформации сжатия рассчитываются по напряжениям  $\sigma_{zq}$  по компрессионной (одометрической) схеме с коэффициентом Пуассона  $\nu \approx 0,25$ .

По расчетным размерам активной зоны грунтового основания в горизонтальном направлении в нормативных документах и справочных руководствах подобные рекомендации отсутствуют. Поэтому анализ этого вопроса выполним применительно к принятой в исследованиях [2, 9] телескопической схеме деформирования грунтового массива вокруг сваи с применением разработанного посредством интегрирования формулы Миндлина [37] упругого решения [26]. Представленные [26] аналитические формулы для расчета компонентов напряжений  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  от распределенных по длине (оси) сваи равномерной и линейно возрастающей с глубиной вертикальной нагрузки позволяют выполнить расчет вертикальных деформации  $\varepsilon_z$  в однородном грунтовом массиве по формуле обобщенного закона Гука:

$$\varepsilon_z(z, r) = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)). \quad (27)$$

Принимая для расчетной области  $r_x = 3,75L$ ,  $H = 2,5L$  и интегрируя расчетные  $\varepsilon_z(z, r)$ , исследовано распределение вертикальных перемещений грунта в околосвайном массиве (рис. 3).

Учитывая принцип Сен-Венана, рассчитанный с использованием формул [26] и интегрирования (27) НДС грунта может считаться полностью представительным в областях расчетной области, расположенных на некотором удалении от ее границ и сваи. Ограниченный на рис. 3 двумя горизонтальными штриховыми линиями диапазон изменения величины  $Z_c$  определялся с учетом возможного изменения удельного веса грунтов в пределах от 10–20 кН/м<sup>3</sup> и глубины заложения пяты сваи от 5 до 50 м.

Данные рис. 3 иллюстрируют, что при расчете  $r_m$  по выражению (7) и выборе  $H_c = r_m/2$  расчетная ячейка (см. рис. 1) ограничивает зону, в которой концентрируется около 90% вызванной нагружением сваи деформации упругого грунтового массива. При этом определяемая эмпирическим СП 22 правилом глубина  $Z_c$  сжимаемой части расчетной области не превышает  $L + r_m/2$ . Этот анализ подтверждают выводы [2] о том, что определяемые по формуле (7)  $r_m$  хорошо согласуются с эмпирическими данными, согласно которым  $r_m$  представляет собой величину порядка  $L$ . Таким образом, выполненный анализ свидетельствует

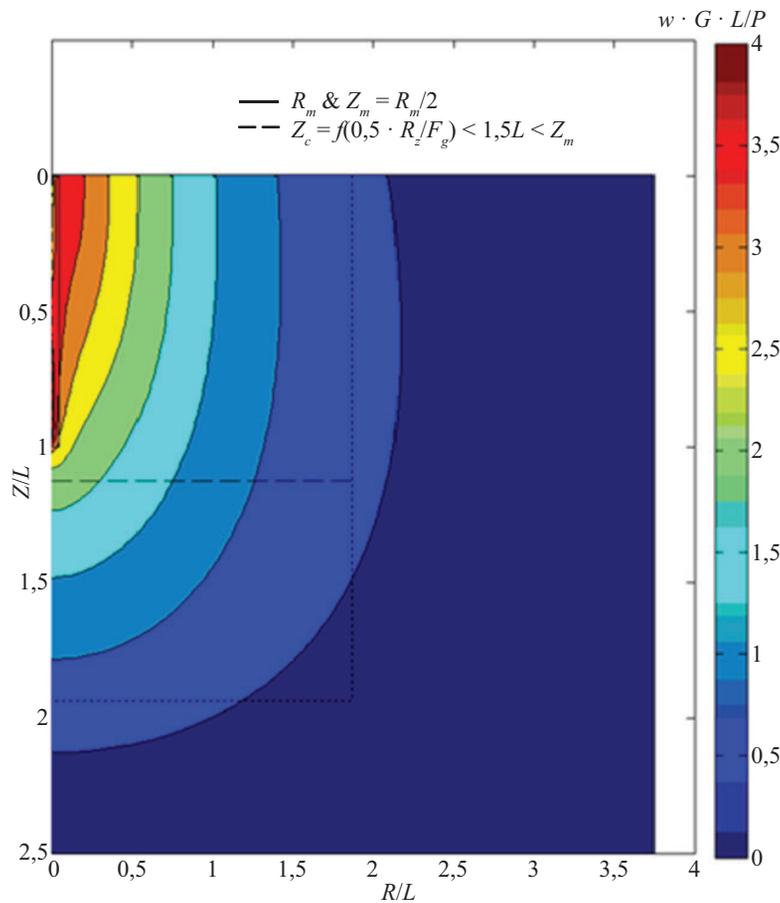


Рис. 3. Распределение вертикальных перемещений в околосвайном массиве

Fig. 3. Distribution of vertical soil movements in the pile massif

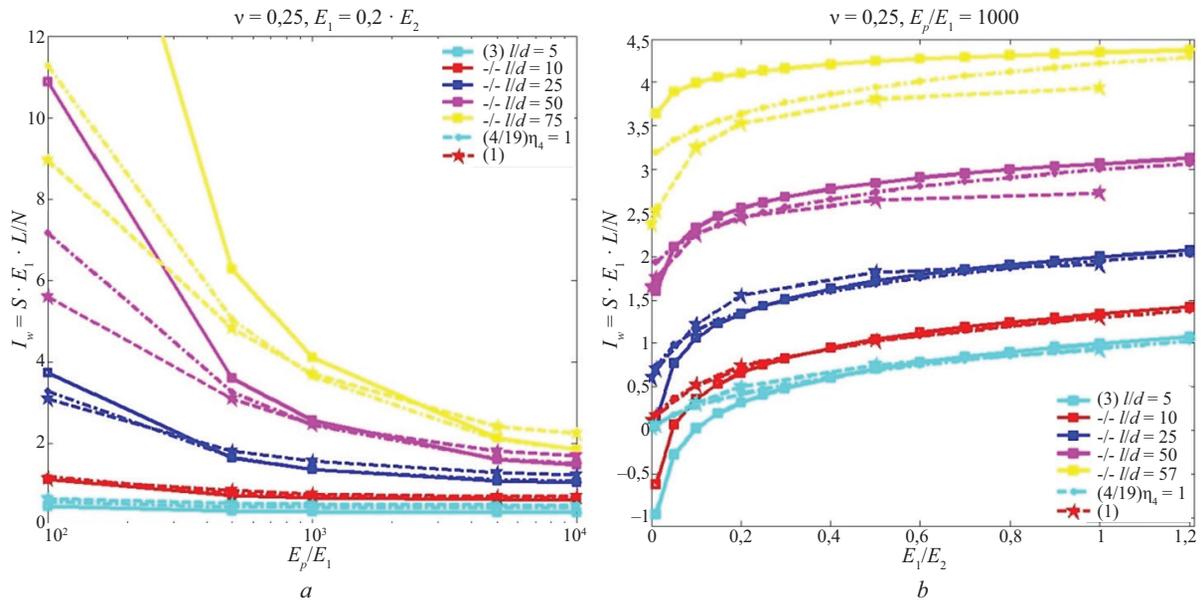


Рис. 4. Сопоставление результатов расчетов по решениям (1), (3) и (4/19): сплошные линии — расчет по зависимости (3) СП 24; пунктир — расчет по зависимости (4) [2, 9], эквивалентной выведенной в настоящей статье зависимости (19); штриховые линии — расчет по зависимости (1) [3]; цвет линий в зависимости от относительной длины свай  $L/d$

Fig. 4. Comparison of calculation results for solutions (1), (3) and (4/19): solid lines — calculation for dependence (3) SP 24; dotted line, dashed line — calculation for dependence (4) [2, 9] equivalent to dependence (19) derived in this paper; dashed lines — calculation for dependence (1) [3]; line colour depending on the relative pile length  $L/d$

о применимости решения (4/19) для описания работы свай в упругом массиве. Отметим также, что применение в публикации [14] уравнений телескопического сдвига в расчетной цилиндрической ячейке означает необходимость использования ее расчетного радиуса  $r_x \geq r_m$ .

### 6. Сопоставление результатов расчетов разными методами

Важно сопоставить результаты нормативной (СП 24) зависимости (3) с аналогичными по теоретической основе актуализированным решением (4/19) и зависимостью (1) [3, 6, 7]. При этих сопоставлениях в решении (4/19) рассматривался случай  $\rho = G_1/G_L = 1$ ,  $G_b = G_2$ , при котором грунт Гибсона (рис. 1, c) совпадает с двухслойным основанием (рис. 1, a) и результаты расчетов по зависимостям (1), (3) и (4/19) исходя из их единой упругой основы теоретически должны совпадать.

Анализ показывает, что в ряде случаев между результатами наблюдаются значительные отличия, примеры которых представлены на рис. 4.

Особенно сильные отличия наблюдаются при неоднородном основании, в частности при низких  $g_{12}$  ( $< 0,5$ ) и большой относительной длине свай  $L/d$  ( $> 50$ ). При  $g_{12} < 0,1$  решение (3) [1] ошибочно прогнозирует выход свай с  $L/d < 10$  из основания. Это обусловлено приближенным описанием выражения (3) влияния сжимаемости ствола свай и неоднородности основания. Несколько улучшила эту ситуацию корректировка СП 24 величины коэффициента  $\lambda_2$  с 1 [1] до 0,5, а так-

же ограничение применения решения (3) с учетом сжимаемости ствола свай условием  $\kappa \geq 7,5$ .

Сопоставление расчетов по актуализированному решению (4/19) с разработанным по данным рис. 2  $\eta_s = \eta_4 = 0,5$  с обычно используемым на практике исходным [2, 9]  $\eta_s = \eta_4 = 1$  при неоднородном основании может увеличивать расчетные осадки до 50 %.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ И ИХ ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ

Как показали расчетные сопоставления п. 6, в целом расчеты по актуальному решению (4/19) дают, очевидно, более реалистичные промежуточные результаты между данными решений (1) [3] и (3) СП 24.

Параметрические исследования показали возможность сближения результатов расчетов по (4/19) и нормативной (СП 24) формуле (3). Для этого условия телескопического сдвига (6) заменяются следующей обобщенной зависимостью:

$$r_m = 2,5d[0,1 + (\rho - \rho\nu - 0,1)\xi](L/d)^\alpha, \quad (28)$$

в которой введенный дополнительный показатель  $\alpha = 1$  соответствует совпадению (28) и (6) [2, 9]. Параметрические расчеты показали, что при  $\rho = G_1/G_L = 1$ ,  $G_b = G_2$  (см. рис. 1) наилучшее совпадение результатов (4/19) и (3) СП 24 наблюдается при  $\alpha = 0,9$ . По сравнению (4/19) решение (3) СП 24 обладает более узким диапазоном применимости, в частности, ограничено СП 24 и [1] условием  $L/d \geq 5$  и по струк-

туре решения соотношением параметров  $k_{\nu} > 1$ . Представленные сопоставления указывают, что эти ограничения (3) должны быть расширены на неоднородные основания с  $g_{12} = G_1/G_2 < 0,1$  для свай с  $L/d < 10$ . Кроме того, в СП 24 и [1] не разработана методика определения приходящейся на пяту сваи нагрузки  $P_b$ , выделения параметров сопротивления грунта по боковой поверхности сваи и оценки сжатия ствола сваи. Эти величины не могут быть оценены на основе зависимости (3) с привлечением зависимости для пяты (14), так как разработка (3) в [1, 9] выполнена в предположении сферической формы пяты сваи. По этим причинам (3) не позволяет осуществлять оценку параметров осадок и выхода сваи при отмеченных выше случаях «выключения» пяты из работы из-за присутствия под пятой шлама или выдерживающей нагрузки. Применение формулы (28) при расчетах (4/19) дает возможность преодолевать отмеченные ограничения без принципиального выхода за рамки нормативного выражения (3) СП 24.

В случае очень коротких свай с  $L/d < 10$  расхождение с результатами численных упругих расчетов было отмечено в работе [11] и для решения (4). С учетом данных [11] адекватность использования телескопического решения (4/19) для коротких (с  $L/d < 10$ ) свай обеспечивается посредством модификации выражения (6) к следующему виду:

$$r_m = 3,1d[1 - \min(1, 0, 1L/d)] + 2,5L[0,1 + (\rho - \rho\nu - 0,1)\xi]. \quad (29)$$

В формуле (29) первое слагаемое корректирует (6) при  $L/d < 10$  и оставляет его без изменения для длинных свай. Применение выражения (29) в решении (4/19) весьма актуально для моделирования группы свай, так называемой эквивалентной сваем [11], у которой, как правило,  $L/d \ll 10$ .

При проектировании свайных фундаментов необходимо определить допускаемую нагрузку на сваю и ее осадку при этой нагрузке, вызывающую на практике допускаемые рамки упругопластического состояния, вмещающего сваю грунтового массива. Геометрические размеры сваи (диаметр, длина), механические свойства окружающих и подстилающих грунтов оказывают значительное влияние на осадку сваи и должны учитываться адекватной методикой расчета.

Разработанные посредством аппроксимации упругих решений о свае в упругом полупространстве решения (1) [3], (3) [1], (4) [2] и полученное в настоящей работе эквивалентное (4) выражение (19) по существу предназначены для оценки начального линейного сопротивления сваи внешней нагрузке. В частности, определять ее коэффициент жесткости  $k_z$  — основной параметр контактных моделей [1, 33], широко применяемых для практических расчетов конструкций свайных фундаментов, в том числе при динамических воздействиях. Выполненный анализ и сопоставления показали, что для определения осадки одиночной сваи и па-

раметра  $k_z$  ее линейного сопротивления наиболее обоснованно аналитическое решение (4/19) с применением (29). Простейший вид этого аналитического решения обеспечивает его практическое применение для проектирования свайных фундаментов не только в статических, но и в динамических и реологических задачах [45].

Адекватное определение параметров контактной модели позволяет выполнить по ним надежные и рациональные расчеты конструкций свайных фундаментов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Упрощенные решения для расчета осадки одиночных свай востребованы строительной практикой, повышение точности и общности таких решений обеспечивает определение адекватных параметров контактных моделей для разработки надежных и рациональных конструкций свайных фундаментов.

Выполненный теоретический анализ и сопоставление результатов упрощенных методов расчета осадки сваи [1–3, 9], основанных на аппроксимации ее работы в упругом полупространстве, выявил ряд противоречий в зависимости от параметров сваи и грунтового основания. Для преодоления выявленных противоречий была выполнена актуализация упрощенного аналитического решения (4) [2, 9], разработана альтернативная (4) его структурная форма (19), проведены сопоставления, установлена и рекомендована область применения решения (4/19) — оценка начального линейного сопротивления сваи.

Достоинством актуализированного решения (4/19) является четко выделенная доля пяты сваи, что позволяет отдельно оценить работу ее боковой поверхности, в частности, в актуальных задачах с выдерживающей нагрузкой на сваю или по учету «выключения» пяты сваи из-за рыхлого шлама под пятой буронабивной сваи. В этом направлении авторы планируют проведение исследования и разработку решения для повторяющейся (циклической) знакопеременной нагрузки, например, на сваи опор под воздействием ветровых нагрузок или в результате повторяющихся сезонных нагрузок от пучения-оттаивания поверхностных грунтов. Структура выражений (19)–(23) дает возможность учитывать влияние различных факторов на условия работы грунта под пятой сваи и у ее боковой поверхности посредством применения коэффициентов  $\eta_s$  и  $\alpha_s$ .

Другой планируемой авторами работой является актуальная разработка упрощенного метода расчета осадки сваи с учетом практической упругопластической работы грунта в диапазоне, допускаемой на сваю нормами СП 24 расчетной нагрузки. Поскольку деформация вокруг сваи преимущественно имеет сдвиговой характер, большой интерес представляет исследование вопроса использования в расчетах, установленных по данным прямых

испытаний грунта на сдвиг, величины его модуля сдвига. Это особенно актуально при учете упруго-пластических эффектов, из-за которых неопределен-

ным образом изменяется упругое соотношение  $G = E/2/(1 + \nu)$  между модулями сдвига и Юнга (сжатия) грунта.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Федоровский В.Г., Левачев С.Н., Курилло С.В., Колесников Ю.М. Сваи в гидротехническом строительстве : учебное пособие. М. : Изд-во АСВ, 2003. 238 с.
2. Fleming K., Weltman A., Randolph M., Elson K. Piling Engineering, 3rd ed. CRC Press, 2020. 408 p.
3. Poulos H.G., Davis E.H. Pile Foundation Analysis and Design. Sydney : Rainhom-Bridge Book Co., 1980. 398 p.
4. Tomlinson M.J., Woodward C.J. Pile Design and Construction Practice: 6th ed. London : CRC Press Taylor & Francis Group, 2015. 574 p.
5. Бартоломей А.А., Омельчак И.М., Юшков Б.С. Прогноз осадок свайных фундаментов. М. : Стройиздат, 1994. 380 с.
6. Poulos H.G., Davis E.H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers // Géotechnique. 1968. Vol. 18. Issue 3. Pp. 351–371. DOI: 10.1680/geot.1968.18.3.351
7. Poulos H.G. Settlement of single piles in non-homogeneous soil // Journal of the Geotechnical Engineering Division. 1979. Vol. 105. Issue 5. Pp. 627–641. DOI: 10.1061/ajgeb6.0000799
8. Федоровский В.Г. Расчет осадок свай в одно-родных и многослойных основаниях : дис. ... канд. техн. наук. М., 1974. 198 с.
9. Randolph M.F., Wroth C.P. Analysis of deformation of vertically loaded piles // Journal of the Geotechnical Engineering Division. 1978. Vol. 104. Issue 12. Pp. 1465–1488. DOI: 10.1061/ajgeb6.0000729
10. Randolph M.F., Wroth C.P. An analysis of the vertical deformation of pile groups // Geotechnique. 1979. Vol. 29. Issue 4. Pp. 423–439. DOI: 10.1680/geot.1979.29.4.423
11. Randolph M.F. Design Methods for Pile Groups and Piled Rafts // Proceeding of the 13th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering (ICSMFE). 1994. Vol. 5. Pp. 61–82.
12. Mylonakis G., Gazetas G. Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil // Geotechnique. 1998. Vol. 48. Issue 1. Pp. 55–72. DOI: 10.1680/geot.1998.48.1.55
13. Боков И.А., Федоровский В.Г. Об учете неоднородности грунта по глубине в расчетах осадки свай // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2021. № 4. С. 2–6. EDN QIVGYU.
14. Тер-Мартirosян З.Г., Тер-Мартirosян А.З., Ермошина Л.Ю. Осадка и длительная несущая способность свай // Промышленное и гражданское строительство. 2021. № 9. С. 18–23. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.09.18-23. EDN HEIXNL.
15. Безволев С.Г. Аналитическое решение для расчета дополнительных осадок свайных полей // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 4 (243). С. 58–65. EDN PCOHRJ.
16. Федоровский В.Г., Безволев С.Г. Метод расчета свайных полей и других вертикально армированных грунтовых массивов // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1994. № 3. С. 11–15. EDN KSYPMF.
17. Banerjee P.K., Davies T.G. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in nonhomogeneous soils // Geotechnique. 1978. Vol. 28. Issue 3. Pp. 309–326. DOI: 10.1680/geot.1978.28.3.309
18. Butterfield R., Banerjee P.K. The elastic analysis of compressible piles and pile groups // Geotechnique. 1971. Vol. 21. Issue 1. Pp. 43–60. DOI: 10.1680/geot.1971.21.1.43
19. Слепак М.Э. Осадки и НДС пластично-мерзлого грунта в основании центрально-нагруженной сваи // Реология грунтов и инженерное мерзлотоведение. 1982. С. 154–158.
20. Rajapakse R.K.N.D. Response of an axially loaded elastic pile in a Gibson soil // Geotechnique. 1990. Vol. 40. Issue 2. Pp. 237–249. DOI: 10.1680/geot.1990.40.2.237
21. Lee C.Y., Small J.C. Finite-Layer Analysis of Axially Loaded Piles // Journal of Geotechnical Engineering. 1990. Vol. 117. Issue 11. Pp. 1706–1722. DOI: 10.1061/(asce)0733-9410(1991)117:11(1706)
22. Viggiani C., Mandolini A., Russo G. Piles and Pile Foundations. UK : Spon Press, 2012. 278 p.
23. Готман А.Л., Гавриков М.Д. Расчет длинномерных буронабивных свай на вертикальную нагрузку // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2024. № 4. С. 2–8. EDN MSBJDN.
24. Шарафутдинов Р.Ф., Разводовский Д.Е., Закатов Т.С. Инженерный метод прогноза осадки одиночных свай с учетом упругопластического поведения грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2024. № 3. С. 7–15. EDN OFOAVE.
25. Савинов А.В. Применение свай, погружаемых вдавливанием, при реконструкции исторической застройки городов : автореф. дис. ... д-ра техн. наук. Волгоград, 2008. 34 с. EDN NKJRJL.
26. Geddes J.D. Stresses in foundation soils due to vertical subsurface loading // Geotechnique. 1966. Vol. 16. Issue 3. Pp. 231–255. DOI: 10.1680/geot.1966.16.3.231

27. Барвашов В.А. Расчет на ЭЦВМ осадки свай от вертикальной нагрузки и определение перемещений грунта вокруг свай // Труды 3-й науч.-техн. конф. молодых научных работников НИИ оснований. 1967. С. 20–23.
28. Frank R. Etude theorique du comportement des pieux sous charge vertical; introduction de la dilatance. Paris : France, 1974. 238 p.
29. Cooke R.W. Settlement of friction pile foundations // Proceeding Conference on Toll Buildings. 1974. Pp. 7–19.
30. Coyle H.M., Reese L.C. Load transfer for axially loaded piles in clay // Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. 1966. Vol. 92. Issue 2. Pp. 1–26.
31. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 2. М. : Наука, 1985. 576 с.
32. Boussinesq J. Applications des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. Paris : Gauthier-Villiers, Imprimeur-Libraire, 1885.
33. Scott R.F. Foundation analysis. New Jersey, USA : Prentice Hall, 1981. 545 p.
34. Schleicher F. Zur Theorie des Baugrundes // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 1925. No. 5. P. 199; Bauingenieur. 1926. Vol. 48. No. 7. Pp. 931–935; Vol. 49. Pp. 949–952.
35. Giroud J.P. Tables pour le calcul des fondations. Vol. 1: Tassement. Paris : Dunod, 1972. 383 p.
36. Ильичев В.А., Аникьев А.В. Система с полтора степенями свободы как динамическая модель неоднородного основания // Труды института НИИОСП им. Н.М. Герсеванова. 1987. № 85. С. 30–32.
37. Mindlin R.D. Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid // Physics. 1936. Vol. 7. Issue 5. Pp. 195–202. DOI: 10.1063/1.1745385
38. Nishida Y. Vertical stress and vertical deformations of ground under a deep circular uniform pressure in the semi-infinite // Proceedings of the 1st International Society for Rock Mechanics Congress. 1966. Vol. 2. Pp. 493–498.
39. Нгуен Занг Нам. Определение осадки круглого штампа с учетом его заглубления // Строительство — формирование среды жизнедеятельности : сб. тр. 4-й Междунар. науч.-практ. конф. молодых ученых, аспирантов и докторантов. 2006. С. 40–43.
40. Знаменский В.В. Работа свайного фундамента в глинистых грунтах и расчет их по деформациям основания : автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 1971. 14 с.
41. PLAXIS 2D-v.9 Finite Element Code for Soil and Rock Analyses: User Manual. Rotterdam : Balkema, 2008.
42. Моссаковский В.И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий // Прикладная математика и механика. 1954. Т. 18. № 2. С. 187–196.
43. Ефремов М.Г., Коновалов П.А., Михеев В.В. К вопросу о распределении послойных деформаций грунта в сжимаемой толще глинистых и песчаных оснований (по материалам полевых испытаний) // Основания, фундаменты и механика грунтов. 1963. № 6. С. 5–7. EDN XYWMZF.
44. Федоровский В.Г., Безволев С.Г. Прогноз осадок фундаментов мелкого заложения и выбор модели основания для расчета плит // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2000. № 4. С. 10–18. EDN WESCFN.
45. Шарафутдинов Р.Ф., Безволев С.Г. Определение сдвиговой ползучести глинистых грунтов полевыми и лабораторными методами при изысканиях под свайные фундаменты // Российский форум изыскателей : сб. докл. III Междунар. науч.-практ. конф. 2022. С. 271–275. EDN TGREAF.

Поступила в редакцию 9 января 2025 г.

Принята в доработанном виде 22 марта 2025 г.

Одобрена для публикации 22 марта 2025 г.

ОБ АВТОРАХ: **Андрей Григорьевич Алексеев** — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры механики грунтов и геотехники; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; руководитель центра геокриологических и геотехнических исследований; **Научно-исследовательский, проектно-изыскательский и конструкторско-технологический институт оснований и подземных сооружений им. Н.М. Герсеванова Научно-исследовательского центра «Строительство» (НИИОСП НИЦ «Строительство»)**; 109428, г. Москва, Рязанский проспект, д. 59; SPIN-код: 9753-4640, РИНЦ ID: 873091, ResearcherID: AAB-8070-2020, ORCID: 0000-0001-6020-0328; adr-alekseev@ya.ru;

**Степан Георгиевич Безволев** — кандидат технических наук, старший научный сотрудник; **Научно-исследовательский, проектно-изыскательский и конструкторско-технологический институт оснований и подземных сооружений им. Н.М. Герсеванова Научно-исследовательского центра «Строительство» (НИИОСП НИЦ «Строительство»)**; 109428, г. Москва, Рязанский проспект, д. 59; РИНЦ ID: 271303, Scopus: 6602971111; compgeo@ya.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. Fedorovsky V.G., Levachev S.N., Kurillo S.V., Kolesnikov Yu.M. *Piles in hydraulic engineering : tutorial*. Moscow, ASV Publishing House, 2003; 238. (rus.).
2. Fleming K., Weltman A., Randolph M., Elson K. *Piling Engineering. 3rd ed.* CRC Press, 2020; 408.
3. Poulos H.G., Davis E.H. *Pile Foundation Analysis and Design*. Sydney, Rainhom-Bridge Book Co., 1980; 398.
4. Tomlinson M.J., Woodward C.J. *Pile Design and Construction Practice: 6th ed.* London, CRC Press Taylor & Francis Group, 2015; 574.
5. Bartolomey A.A., Omelchak I.M., Yushkov B.S. *Forecast of settlement of pile foundations*. Moscow, Stroyizdat, 1994; 380. (rus.).
6. Poulos H.G., Davis E.H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. *Géotechnique*. 1968; 18(3):351-371. DOI: 10.1680/geot.1968.18.3.351
7. Poulos H.G. Settlement of single piles in non-homogeneous soil. *Journal of the Geotechnical Engineering Division*. 1979; 105(5):627-641. DOI: 10.1061/ajgeb6.0000799
8. Fedorovsky V.G. *Rainfall of piles in the uniform and multilayered bases : thesis ... candidate of technical sciences*. Moscow, 1974; 198. (rus.).
9. Randolph M.F., Wroth C.P. Analysis of deformation of vertically loaded piles. *Journal of the Geotechnical Engineering Division/ASCE*. 1978; 104(12):1465-1488.
10. Randolph M.F., Wroth C.P. An analysis of the vertical deformation of pile groups. *Geotechnique*. 1979; 29(4):423-439. DOI: 10.1680/geot.1979.29.4.423
11. Randolph M.F. Design Methods for Pile Groups and Piled Rafts. *Proceeding of the 13th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering (ICSMFE)*. 1994; 5:61-82.
12. Mylonakis G., Gazetas G. Settlement and additional internal forces of grouped piles in layered soil. *Geotechnique*. 1998; 48(1):55-72. DOI: 10.1680/geot.1998.48.1.55
13. Bokov I.A., Fedorovskii V.G. Taking into account the soil depth inhomogeneity in calculation of the piles settlement. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2021; 4:2-6. EDN QIVGYU. (rus.).
14. Ter-Martirosyan Z.G., Ter-Martirosyan A.Z., Ermoshina L.Yu. Settlement and long-term bearing capacity of the pile. *Industrial and Civil Engineering*. 2021; 9:18-23. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.09.18-23. EDN HEIXNL. (rus.).
15. Bezvolev S.G. Analytical solution for calculating additional settlements of pile fields. *Structural Mechanics and Calculation of Structures*. 2012; 4(243):58-65. EDN PCOHRJ. (rus.).
16. Fedorovsky V.G., Bezvolev S.G. Method of calculation of pile fields and other vertical reinforced soil masses. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1994; 3:11-15. EDN KSYPMF. (rus.).
17. Banerjee P.K., Davies T.G. The behaviour of axially and laterally loaded single piles embedded in non-homogeneous soils. *Geotechnique*. 1978; 28(3):309-326. DOI: 10.1680/geot.1978.28.3.309
18. Butterfield R., Banerjee P.K. The elastic analysis of compressible piles and pile groups. *Geotechnique*. 1971; 21(1):43-60. DOI: 10.1680/geot.1971.21.1.43
19. Slepak M.E. Rainfall and the VAT of plastic and frozen soil in the basis of the central loaded pile. *Soil Rheology and Engineering Permafrost Science*. 1982; 154-158. (rus.).
20. Rajapakse R.K.N.D. Response of an axially loaded elastic pile in a Gibson soil. *Geotechnique*. 1990; 40(2):237-249. DOI: 10.1680/geot.1990.40.2.237
21. Lee C.Y., Small J.C. Finite-Layer Analysis of Axially Loaded Piles. *Journal of Geotechnical Engineering*. 1990; 117(11):1706-1722. DOI: 10.1061/(asce)0733-9410(1991)117:11(1706)
22. Viggiani C., Mandolini A., Russo G. *Piles and Pile Foundations*. UK, Spon Press, 2012; 278.
23. Gotman A.L., Gavrikov M.D. Calculation of long bored piles for vertical loading. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2024; 4:2-8. EDN MSBJDN. (rus.).
24. Sharafutdinov R.F., Razvodovskii D.E., Zakatov D.S. Single bored pile settlement prediction taking into account the elastic-plastic behavior of the soil. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2024; 3:7-15. EDN OFOAVE. (rus.).
25. Savinov A.V. *Application of piles driven by pressing in the reconstruction of historical urban development : abstract of dis. ... doctor of technical sciences*. Volgograd, 2008; 34. EDN NKJRJL. (rus.).
26. Geddes J.D. Stresses in foundation soils due to vertical subsurface loading. *Geotechnique*. 1966; 16(3):231-255. DOI: 10.1680/geot.1966.16.3.231
27. Barvashov V.A. Calculation on ETsVM of draft of piles from vertical loading and definition of movements of soil around piles. *Proceedings of the 3rd scientific and technical conference of young researchers of the Research Institute of Foundations*. 1967; 20-23. (rus.).
28. Frank R. *Etude theorique du comportement des pieux sous charge vertical; introduction de la dilatance*. Paris, France, 1974; 238.
29. Cooke R.W. Settlement of friction pile foundations. *Proceeding Conference on Toll Buildings*. 1974; 7-19.
30. Coyle H.M., Reese L.C. Load transfer for axially loaded piles in clay. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*. 1966; 92(2):1-26.
31. Piskunov N.S. *Differential and integral calculus. Vol. 2*. Moscow, Science, 1985; 576. (rus.).

32. Boussinesq J. *Applications des Potentiels a l'Étude de l'Équilibre et du Mouvement des Solides Élastiques*. Paris, Gauthier-Villiers, Imprimeur-Libraire, 1885.
33. Scott R.F. *Foundation analysis*. New Jersey, USA, Prentice Hall, 1981; 545.
34. Schleicher F. Zur Theorie des Baugrundes. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 1925; 5:199; Bauingenieur, 1926; 48(7):931-935; 49:949-952.
35. Giroud J.P. *Tables pour le calcul des fondations. Vol. 1: Tassement*. Paris, Dunod, 1972; 383.
36. Ilyichev V.A., Anikiev A.V. A system with one and a half degrees of freedom as a dynamic model of a heterogeneous foundation. *Proceedings of the Institute NIIOSP named after N.M. Gersevanov*. 1987; 85:30-32. (rus.).
37. Mindlin R.D. Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid. *Physics*. 1936; 7(5):195-202. DOI: 10.1063/1.1745385
38. Nishida Y. Vertical stress and vertical deformations of ground under a deep circular uniform pressure in the semi-infinite. *Proceedings of the 1-st International Society for Rock Mechanics Congress*. 1966; 2:493-498.
39. Nguyen Giang Nam. Determination of the settlement of a round stamp taking into account its depth. *Construction — formation of the living environment : collection of works of the 4th International scientific and practical conference of young scientists, postgraduates and doctoral students*. 2006; 40-43. (rus.).
40. Znamensky V.V. *Work of pile foundation in clay soils and their calculation based on deformations of the base : abstract of dis. ... cand. of technical sciences*. Moscow, 1971; 14. (rus.).
41. *PLAXIS 2D-v.9 Finite Element Code for Soil and Rock Analyses: User Manual*. Rotterdam, Balkema, 2008.
42. Mossakovsky V.I. The main mixed problem of elasticity theory for a half-space with a circular line of separation of boundary conditions. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1954; 18(2):187-196. (rus.).
43. Efremov M.G., Kononov P.A., Mikheev V.V. On the distribution of layer-by-layer soil deformations in the compressible thickness of clay and sandy foundations (based on field test materials). *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 1963; 6:5-7. EDN XYWMZF. (rus.).
44. Fedorovskii V.G., Bezvolev S.G. Prediction of shallow-foundation settlements and selection of bed models for slab analysis. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 2000; 4:10-18. EDN WESCFN. (rus.).
45. Sharafutdinov R.F., Bezvolev S.G. Determination of shear creep of clay soils by field and laboratory methods during surveys under pile foundations. *Russian Surveyors Forum : collection of reports of the III International Scientific and Practical Conference*. 2022; 271-275. EDN TGREAF. (rus.).

Received January 9, 2025.

Adopted in revised form on March 22, 2025.

Approved for publication on March 22, 2025.

**B I O N O T E S :** **Andrej G. Alekseev** — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Soil Mechanics and Geotechnical Engineering; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Head of the Center for Geocryological and Geotechnical Research; **Research, Design and Survey and Design and Technological Institute of Foundations and Underground Structures named after N.M. Gersevanov of the Research Center “Construction”**; 59 Ryazansky prospect, Moscow, 109428, Russian Federation; SPIN-code: 9753-4640, ID RSCI: 873091, ResearcherID: AAB-8070-2020, ORCID: 0000-0001-6020-0328; adr-alekseev@ya.ru;

**Stepan G. Bezvolev** — Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher; **Research, Design and Survey and Design and Technological Institute of Foundations and Underground Structures named after N.M. Gersevanov of the Research Center “Construction”**; 59 Ryazansky prospect, Moscow, 109428, Russian Federation; ID RSCI: 271303, Scopus: 6602971111; compgeo@ya.ru.

*Contribution of the authors: all authors made an equivalent contribution to the preparation of the publication.*

*The authors declare no conflict of interest.*