

Вычислительный алгоритм расчета
напряженно-деформированного состояния
и устойчивости тонкостенных оболочек

Николай Александрович Мишуренко^{1,2}, Алексей Александрович Семенов¹
¹ Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ);
г. Санкт-Петербург, Россия;
² ООО «Газпром проектирование»; г. Санкт-Петербург, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Исследования процессов деформирования оболочек преимущественно осуществляют с использованием вычислительных алгоритмов, реализующих применение различных численных методов. Данные алгоритмы должны обеспечивать получение точных результатов и высокую скорость выполнения расчетов, а также быть устойчивы к изменению входных параметров (геометрия, материал). Цель данного исследования — разработка вычислительного алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости оболочек, построенного на применении метода Ритца и метода Ньютона, обеспечивающего высокую производительность и устойчивость решения.
Материалы и методы. Деформирование оболочечных конструкций описывается геометрически нелинейной математической моделью типа Тимошенко – Рейсснера, которая учитывает поперечные сдвиги и ортотропию материала. Математическая модель записана в виде функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки. Исследование НДС и устойчивости конструкции сводится к нахождению минимума функционала. Методом Ритца данная задача сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Решение полученной системы осуществляется методом Ньютона. Отличительная особенность этого алгоритма — применение адаптивного шага по нагрузке при решении системы нелинейных алгебраических уравнений.

Результаты. Проведены расчеты конструкций: пологих оболочек двоякой кривизны и цилиндрических панелей из изотропных и ортотропных материалов. Полученные значения критических нагрузок имеют хорошую согласованность с результатами других авторов: для пологих оболочек двоякой кривизны максимальное расхождение результатов составило 8,05 %, для цилиндрических панелей — 7,29 %.

Выводы. Разработан устойчивый к изменению геометрии и материала конструкции вычислительный алгоритм расчета НДС и устойчивости оболочек. Высокая производительность алгоритма обеспечивается за счет применения адаптивного шага по нагрузке при решении системы нелинейных алгебраических уравнений. Обоснована возможность использования алгоритма при исследовании пологих оболочек двоякой кривизны и цилиндрических панелей.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оболочка, панель, вычислительный алгоритм, метод Ритца, метод Ньютона, адаптивный шаг, устойчивость

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензентам за конструктивные замечания и рекомендации, которые помогли улучшить качество исследования и расширить его научную значимость.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Мишуренко Н.А., Семенов А.А. Вычислительный алгоритм расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонкостенных оболочек // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 6. С. 850–866. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.6.850-866

Автор, ответственный за переписку: Николай Александрович Мишуренко, nikolai8421@mail.ru.

Computational algorithm for calculating the stress-strain state
and buckling of thin-walled shells

Nikolai A. Mishurenko^{1,2}, Alexey A. Semenov¹
¹ Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU);
Saint Petersburg, Russian Federation;
² LLC “Gazprom proektirovanie”; Saint Petersburg, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The studies of the processes of deformation of shells are mainly carried out using computational algorithms that implement the application of various numerical methods. These algorithms must ensure obtaining accurate results and high speed of calculations, and must also be resistant to changes in input parameters (geometry, material). The purpose of this work is to develop a computational algorithm for calculating the stress-strain state (SSS) and buckling of shells, based on the application of the Ritz method and the Newton method, ensuring high productivity and stability of the solution.

Materials and methods. The deformation of shell structures is described by a geometrically nonlinear mathematical model of the Timoshenko – Reissner type, which considers transverse shears and orthotropy of the material. The mathematical model is written as a functional of the total potential energy of deformation of the shell. The study of the stress-strain state and buckling of the structure is reduced to finding the minimum of the functional. Using the Ritz method, this problem is reduced to solving a system of nonlinear algebraic equations. The solution of the resulting system is carried out using the Newton method. A distinctive feature of this algorithm is the use of an adaptive step by load when solving a system of nonlinear algebraic equations.

Results. Calculations of structures were performed: shallow shells of double curvature and cylindrical panels made of isotropic and orthotropic materials. The obtained values of critical loads have good agreement with the results of other authors: for shallow shells of double curvature, the maximum discrepancy of results was 8,05 %, and for cylindrical panels 7,29 %.

Conclusions. A computational algorithm for calculating the stress-strain state and buckling of shells that is stable to changes in geometry and material of the structure has been developed. High performance of the algorithm is ensured by using an adaptive step by load when solving a system of nonlinear algebraic equations. The possibility of using this algorithm when studying shallow shells of double curvature and cylindrical panels has been substantiated.

KEYWORDS: shell, panel, computational algorithm, Ritz method, Newton method, adaptive step, buckling

Acknowledgements. The authors express their gratitude to the reviewers for their constructive comments and recommendations, which helped improve the quality of the study and expand its scientific significance.

FOR CITATION: Mishurenko N.A., Semenov A.A. Computational algorithm for calculating the stress-strain state and buckling of thin-walled shells. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(6):850-866. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.6.850-866 (rus.).

Corresponding author: Nikolai A. Mishurenko, nikolai8421@mail.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные оболочечные конструкции используются в различных отраслях: промышленном и гражданском строительстве [1–3], космостроении [4, 5], авиастроении [6], судостроении [7], машиностроении [8–10], что связано с накоплением экспериментальных данных [11–13] и постоянным развитием теории и методов расчета оболочек [14–16].

Начиная с XX в. вектор научных исследований оболочек ориентирован на разработку математических моделей деформирования конструкций, учитывающих их нелинейное поведение (геометрическая, физическая нелинейность), и вычислительных алгоритмов, в которых реализовано применение численных методов. В настоящее время наряду с классическими направлениями научных изысканий по развитию теории оболочек особый интерес представляют исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости тонкостенных оболочек при запроектных воздействиях [3, 5, 8, 16].

Значительное количество исследований процесса деформирования оболочек проведено с использованием классического метода конечных элементов (МКЭ) [17–19] и др. Однако, несмотря на это, разработка математических моделей процесса деформирования и вычислительных алгоритмов расчета оболочек является актуальной задачей.

Разработан алгоритм для изучения устойчивости цилиндрических оболочек из полимерных композиционных материалов (ПКМ), основанный на применении МКЭ, линеаризации Ньютона – Канторовича, использовании метода последовательных приближений и шагового метода по нагрузке [6].

Ряд работ [20–22] посвящен развитию МКЭ (модификация или создание новых конечных элементов) для исследования НДС оболочек.

В.В. Петровым предложен алгоритм для расчета неоднородных по толщине оболочек (учитываются геометрическая и физическая нелинейности), заключающийся в построении инкрементальных линейных уравнений и их решении методом двухшагового последовательного возмущения параметров, разработанным автором [16].

Р.А. Каюмов в статье [23] для нахождения критических нагрузок потери устойчивости пологих панелей и арок предложил вариационный метод решения, основанный на разложении перемещений в ряд Фурье.

Исследования свободных колебаний оболочечных конструкций осуществлялись с применением алгоритмов на основе метода Ритца [24–26]; метода Рэлея – Ритца [27]. В трудах [28–30] для изучения деформирования плит использованы алгоритмы с модификациями метода Ритца.

В работе [31] математическая модель деформирования сферической оболочки представлена в виде уравнений Маргерра. Алгоритм нахождения конечных прогибов купола базируется на применении метода Рэлея – Ритца: задача сводится к решению системы нелинейных уравнений. Решение полученной системы реализовано методом непрерывного продолжения. Для нивелирования погрешности, возникающей при численном решении системы уравнений продолжения, применяется метод дискретного продолжения, основанный на методе Ньютона – Рафсона.

Метод Бубнова – Галеркина использован для решения системы дифференциальных уравнений состояния изотропных пологих оболочек на упругом основании с учетом геометрической нелинейности [32], в результате чего были выведены аналитические уравнения для определения напряжений и критической нагрузки потери устойчивости.

Л.Ю. Ступишиным и К.Е. Никитиным [33] предложен алгоритм, базирующийся на использовании метода Бубнова – Галеркина в смешанной конечно-элементной форме, для исследования вынужденных колебаний пологих осесимметричных ортотропных оболочек вращения.

Исследование НДС защемленной по контуру ортотропной пластинки осуществлено методом начальных функций (МНФ) [34]. При этом отмечается, что для обеспечения устойчивости алгоритма решения необходимо выполнять расчеты с длинной мантисой.

Для изучения упругопластических деформаций нанопластин Кирхгофа авторами статьи [35] разработан вычислительный алгоритм, построенный на применении комплекса численных методов: метода вариационных итераций (расширенный метод Канторовича), метода переменных параметров упругости И.А. Биргера, метода Ньютона для решения алгебраических систем уравнений. Достоверность полученных результатов с использованием данного алгоритма подтверждена сравнением с решениями, полученными другими численными методами.

Интересен подход к определению соотношения мембранных напряжений в тентовых оболочках арочного типа [36], заключающийся в применении итерационного метода хорд.

Для анализа устойчивости цилиндрических панелей авторами публикации [37] предложено использование метода аналоговых уравнений без сетки (МАЕМ). В основе метода лежит принцип аналогового уравнения, заключающийся в преобразовании исходных уравнений перемещений в замещающие.

Ф.С. Хайруллин и О.М. Сахбиев предложили алгоритм расчета прочности толстых и тонких оболочек, в которых появляются упругопластические деформации [38]. В алгоритме использован вариационный принцип Лагранжа, итерационный метод решения нелинейной системы уравнений: в ходе первой итерации осуществляется решение упругой задачи, таким образом система уравнений становится линейной и далее решается методом Холецкого. После проводится проверка условия пластичности и формируется матрица интенсивности деформаций, которая используется на следующей итерации.

С целью изучения волновых процессов в линейно-вязкоупругих оболочках А.В. Нетребко и С.Г. Пшеничнов использовали алгоритм, основанный на интегральном преобразовании Лапласа по времени [39].

Авторами работы [40] предложен численно-аналитический алгоритм решения контактной задачи для цилиндрической оболочки типа Тимошенко. В основе данного алгоритма — метод механических квадратур.

Для исследования гиперупругой пластины в статье [41] представлена математическая модель в виде управляющих уравнений и использован алгоритм, включающий в себя метод бессеточной коллокации (МСМ) и радиальную базисную функцию тонкого сплайна, а также метод продолжения по длине дуги.

Рассмотрены особенности реализации вычислительных алгоритмов, применяемых для исследования мягких оболочек [42]. Выполнен анализ алгоритма, реализующего метод дифференцирования по параметру. Авторам предложено руководствоваться методиками экспериментальной механики при проведении численных экспериментов для выявления границ применимости вычислительных алгоритмов.

Авторы статьи [43] отмечают, что для оценки корректности математической модели и вычислительного алгоритма, построенного на использовании численных методов, следует осуществлять проверку их устойчивости к входным параметрам.

Стоит отметить, что значимое количество рассмотренных работ основано на применении вариационных принципов [4, 6, 20, 22, 23, 30, 31, 35, 38, 43].

Исходя из вышепредставленного обзора литературы, можно сделать вывод, что расчетный алгоритм конструкций должен быть рациональным (включать набор процедур, необходимых для получения адекватного решения), высокопроизводительным (время решения задачи по сравнению с иными алгоритмами должно быть минимальным), устойчивым к входным параметрам (размеры конструкции, параметры материала).

Цель данного исследования — разработка вычислительного алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния и устойчивости оболочек, построенного на применении метода Ритца и метода Ньютона, обеспечивающего высокую производительность и устойчивость решения.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для описания процесса деформирования оболочечной конструкции используется геометрически нелинейная математическая модель типа Тимошенко – Рейсснера, учитывающая поперечные сдвиги, ортотропию, в виде функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки [44]:

$$E_s = E_s^0 + E_s^{Cut} + E_s^R, \quad (1)$$

где E_s^0 — функционал полной потенциальной энергии деформации обшивки оболочки; E_s^{Cut} — функционал полной потенциальной энергии деформации зон ослаблений (при наличии вырезов); E_s^R — функционал полной потенциальной энергии деформации ребер (при наличии ребер).

Далее для простоты выкладок будет рассматриваться оболочка без вырезов и ребер. Функционал

полной потенциальной энергии деформации обшивки оболочки имеет вид:

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + \right. \\ \left. + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - \right. \\ \left. - 2(P_x U + P_y V + qW) \right) AB dx dy. \quad (2)$$

Все перечисленные переменные подробно представлены в работе [44].

Исследование НДС и устойчивости оболочек сводится к решению вариационной задачи о нахождении минимума функционала (1). Используем метод Ритца: искомые функции перемещений и углов поворота нормали представим в следующем виде:

$$U = U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l; \\ V = V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l; \\ W = W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l; \\ \Psi_x = \Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{x_{kl}} X_4^k Y_4^l; \\ \Psi_y = \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{y_{kl}} X_5^k Y_5^l, \quad (3)$$

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x_{kl}}, \Psi_{y_{kl}}$ — неизвестные числовые параметры; $X_1^k, \dots, X_5^k$ и $Y_1^l, \dots, Y_5^l$ — известные аппроксимирующие функции, удовлетворяющие краевым условиям (назначаются исходя из способа закрепления контура конструкции); N — количество разложений искомых функций в ряды.

В теории оболочек преимущественно применяются аппроксимирующие функции в виде тригонометрических или полиномиальных функций [26, 45, 46]. В качестве аппроксимирующих функций в данном алгоритме приняты тригонометрические функции.

После подстановки функций (3) в функционал (1) находим производные по $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x_{kl}}, \Psi_{y_{kl}}$ и полученные выражения приравняем к нулю:

$$\frac{\partial E_s}{\partial U_{kl}} = 0; \frac{\partial E_s}{\partial V_{kl}} = 0; \frac{\partial E_s}{\partial W_{kl}} = 0; \\ \frac{\partial E_s}{\partial \Psi_{x_{kl}}} = 0; \frac{\partial E_s}{\partial \Psi_{y_{kl}}} = 0. \quad (4)$$

Получена система нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ), решение которой осуществляется последовательно при разном значении нагрузки методом Ньютона — в начале каждой итерации значение числовых параметров $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{x_{kl}}, \Psi_{y_{kl}}$ принимается равным значениям, полученным в ходе предыдущей итерации.

Представим полученное решение СНАУ в форме вектора:

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} U_{kl} \\ V_{kl} \\ W_{kl} \\ \Psi_{x_{kl}} \\ \Psi_{y_{kl}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

где $k = 1 \dots \sqrt{N}$; $l = 1 \dots \sqrt{N}$. Размерность вектора решения СНАУ (5) равна $5N$.

Рассматривается задача без учета начальных деформаций и несовершенств формы конструкций — начальные значения функций перемещений и углов поворота нормали до приложения нагрузки принимаются равными нулю. Таким образом, вектор решений до начала нагружения примет вид:

$$\tilde{X}_0^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Условие остановки итерации в методе Ньютона:

$$\|\tilde{X}_n^m - \tilde{X}_n^{m-1}\| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

где $\tilde{X}_n^m$ и $\tilde{X}_n^{m-1}$ — векторы, состоящие из значений числовых параметров, на текущей и предыдущей итерации в методе Ньютона соответственно; $\|\cdot\|$ — норма вектора; n — номер итерации по нагрузке; m — номер итерации в методе Ньютона; ε — точность метода Ньютона (в данном алгоритме принято $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$).

Данная последовательность операций позволяет определить НДС и момент потери устойчивости конструкции при нагружении. Далее будем рассматривать конструкции под действием равномерно распределенной нагрузки q , приложенной по нормали к поверхности оболочки.

В этом алгоритме для установления момента потери устойчивости принят критерий Ляпунова (малому изменению значения входного параметра соответствует большое изменение значения выходного параметра). Таким образом, задача сводится к построению и анализу графика зависимости прогиба W от нагрузки q в характерных точках конструкции [45].

На рис. 1 представлена кривая, характеризующая зависимость прогиба от приложенной нагрузки в центре $\left(x = \frac{a_1 + a}{2}, y = \frac{b}{2}\right)$ оболочки. Потеря устойчивости конструкции соответствует переходу в новое равновесное состояние: из точки A в точку B . Следовательно, критическая нагрузка потери устойчивости достигается в точке A .

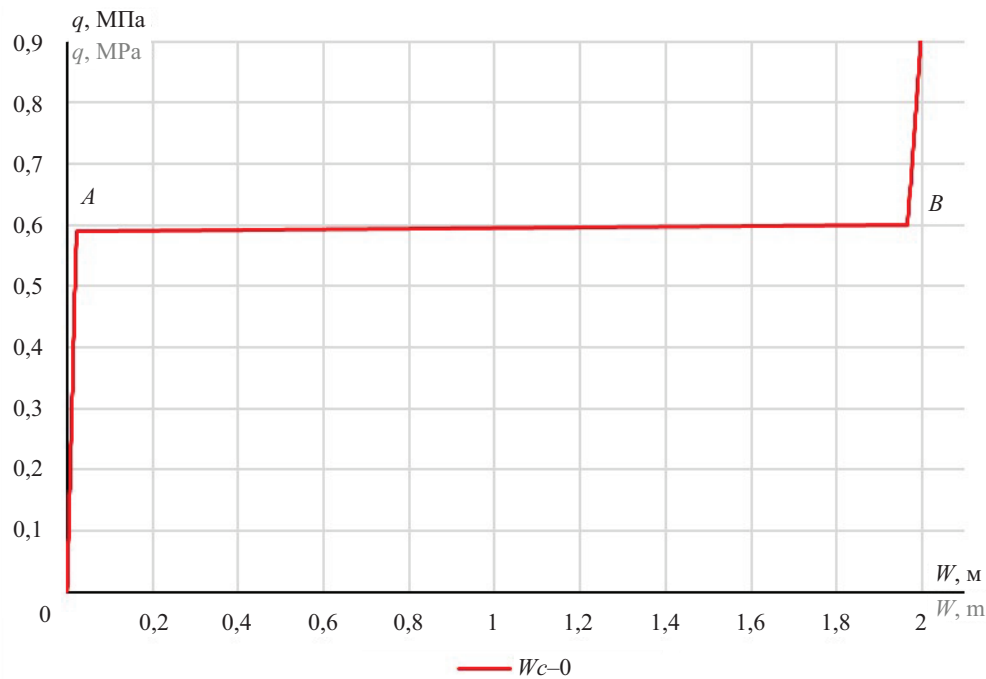


Рис. 1. Кривая прогиб – нагрузка
Fig. 1. Load – deflection curve

Из анализа кривой, представленной на рис. 1, следует, что процесс деформирования оболочечной конструкции характеризуется двумя участками: 1 — условная линейная зависимость функции перемещения от нагрузки; 2 — нелинейная зависимость, в большинстве случаев соответствующая околокритической зоне.

Очевидно, что для устойчивости вычислительного алгоритма при решении СНАУ и получения точного значения критической нагрузки требуется принимать малое значение шага по нагрузке q . Однако при таком подходе на участках кривых типа 1 получается большое количество решений, не представляющих интерес при исследовании устойчивости оболочки, и, как следствие, существенно увеличивается время выполнения расчета.

Для обеспечения высокой производительности и точности вычислений принят адаптивный шаг по нагрузке: шаг изменяется в зависимости от значения угла между векторами решений СНАУ (для текущего и предыдущего значения нагрузки). Адаптация шага осуществляется следующим образом: если угол между векторами решений меньше значения Δ_1 , то для следующей итерации происходит увеличение шага по нагрузке в Δ_{next} раз. Если угол между векторами решений превышает значение $\Delta_2 = 10\Delta_1$, то происходит уменьшение шага по нагрузке в $\Delta_{previous}$ раз с откатом на предыдущую итерацию и перерасчетом СНАУ.

Реализация алгоритма выполнена в системе компьютерной математики Maple.

Тестовые расчеты производились при значении изменения шага по нагрузке $\Delta_{previous} = \Delta_{next} = 2$. Расчеты проводились на компьютере с 64-разряд-

ной ОС (Windows 10); процессором AMD Ryzen 7 3750H Radeon Vega Mobile Gfx частотой 2,3 ГГц; ОЗУ 32 Гб.

Для отладки алгоритма рассматривались оболочки из материалов, представленных в табл. 1.

С целью выбора интервала значений угла между векторами проведен расчет шарнирно-неподвижно закрепленных оболочек и цилиндрических панелей из стали С345, размеры которых приведены в табл. 2, 3, при $N = 9$. Результаты данных расчетов показаны на рис. 2 (по оси абсцисс использована логарифмическая шкала).

На основании анализа полученных зависимостей на рис. 2 определено, что при минимальном значении угла между векторами решений $\Delta_1 \in [0,001; 0,01]$ изменение критической нагрузки не превышает 0,004857 %.

Ресурсоемкость алгоритма, представленная в виде зависимости количества пройденных шагов по нагрузке при решении СНАУ от минимального угла между векторами решений Δ_1 , приведена на рис. 3 (по оси абсцисс использована логарифмическая шкала).

Из анализа представленной на рис. 3 зависимости можно сделать вывод: уменьшение принятого для расчета значения угла Δ_1 приводит к увеличению количества шагов по нагрузке q при решении СНАУ — зависимость обратно пропорциональная.

Эффективность вычислительного алгоритма достигается при одновременном обеспечении высокой точности результатов и малом затрачивании вычислительных ресурсов. Для представленного в статье

Табл. 1. Характеристики материалов
Table 1. Characteristics of materials

Характеристика Characteristic	Изотропный Isotropic		Ортотропный Orthotropic		
	Сталь С345 Steel S345	Оргстекло Plexiglass	Материал 2 Material 2	Углепластик Carbon fiber	
				ЛУ-П/ЭНФБ LU-P/ENFB	T300/976
E_1 , МПа E_1 , MPa	$2,1 \cdot 10^5$	$0,03 \cdot 10^5$	$0,2 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$
μ_{12}	0,3	0,35	0,1	0,3	0,29
E_2 , МПа E_2 , MPa	$2,1 \cdot 10^5$	$0,03 \cdot 10^5$	$0,4 \cdot 10^5$	$0,97 \cdot 10^4$	$0,97 \cdot 10^4$
G_{12} , МПа G_{12} , MPa	$0,807 \cdot 10^5$	$1,111 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,55 \cdot 10^4$
G_{13} , МПа G_{13} , MPa	$0,807 \cdot 10^5$	$1,111 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,55 \cdot 10^4$
G_{23} , МПа G_{23} , MPa	$0,807 \cdot 10^5$	$1,111 \cdot 10^3$	$1,0 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,33 \cdot 10^4$
Источник / Source	–	–	[47]	[48]	[49]

алгоритма это осуществляется при интервале углов между векторами решений СНАУ: $\Delta_1 = 0,01$, $\Delta_2 = 0,1$.

Для определенного ранее интервала проведены дополнительные расчеты шарнирно-неподвижно закрепленных конструкций (размеры представлены в табл. 2, 3) из изотропных и ортотропных материалов (характеристики приведены в табл. 1) при $N = 9$. Выявлено, что при решении системы уравнений на участках с условно линейной зависимостью перемещений от нагрузки количество итераций в методе Ньютона для достижения заданной точности ε составляет от двух до четырех. При решении системы в околокритических зонах количество итераций в методе Ньютона составляет не менее десяти. Уменьшение шага нагрузки и откат итерационного процесса по нагрузке в большинстве случаев наблюдались в околокритических зонах.

Таким образом, до уменьшения шага по нагрузке при решении системы в методе Ньютона реализовывается значительное количество итераций, которые не имеют значимости, так как далее идет откат итерации по нагрузке. Вместе с тем данное явление снижает производительность алгоритма. Для устранения этого недостатка в цикл метода Ньютона вводится проверка по углу между векторами решений после десятой итерации — процесс проверки, уменьшения шага по нагрузке, отката итерационного процесса и перерасчета СНАУ аналогичен описанному ранее.

Сравнение производительности алгоритма с проверкой угла между векторами решений в методе Ньютона и без него представлено в табл. 4 при $N = 9$.

Табл. 2. Размеры пологих оболочек двоякой кривизны
Table 2. Dimensions of the shallow shells of double curvature

Номер / Number	h , м / m	a , м / m	b , м / m	R_1 , м / m	R_2 , м / m
1.1	0,00022	0,2	0,2	5	3,33
1.2	0,09	18	18	45,27	45,27
1.3	0,09	10,8	10,8	40,05	40,05
1.4	0,045	27	27	67,95	67,95
1.5	0,06	36	36	22,65	22,65

Табл. 3. Размеры цилиндрических панелей
Table 3. Dimensions of cylindrical panels

Номер / Number	h , м / m	a , м / m	b , рад / rad	R_1 , м / m	R_2 , м / m
2.1	0,08	16	1	∞	16
2.2	0,01	10	π	∞	5,4
2.3	0,01	20	π	∞	5,4

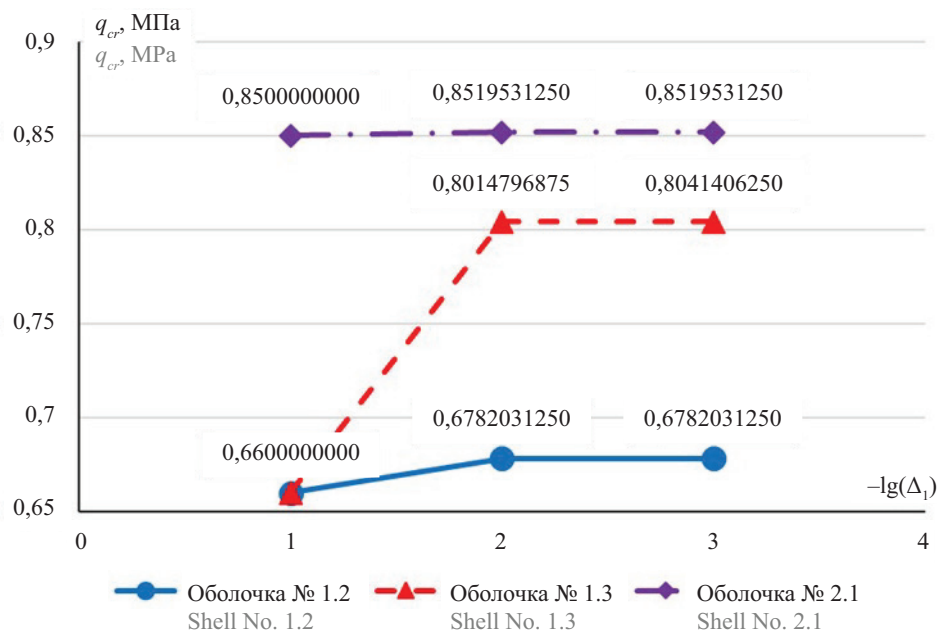


Рис. 2. Зависимость критической нагрузки от Δ_1
Fig. 2. Dependence of the critical load on Δ_1

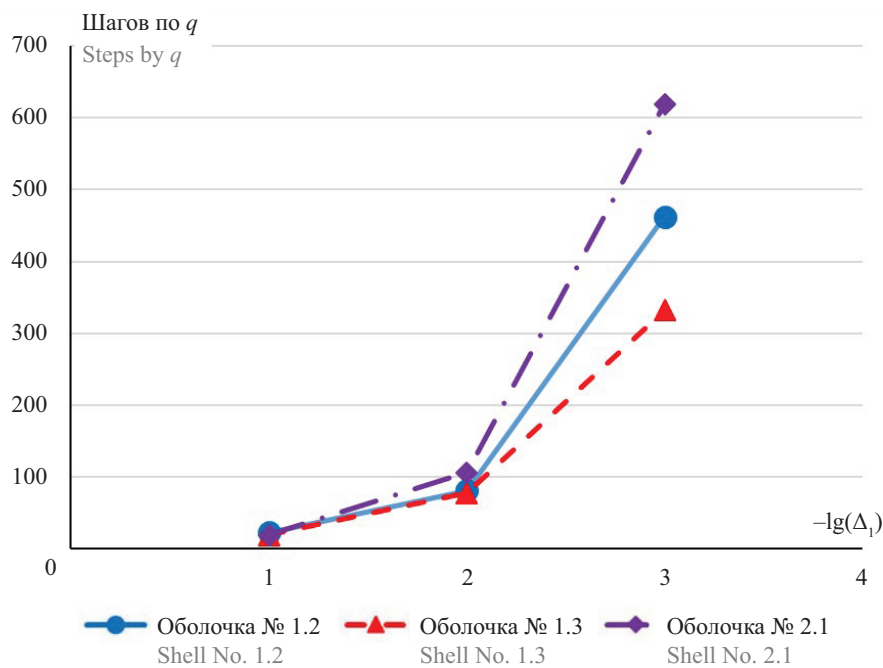


Рис. 3. Ресурсоемкость алгоритма
Fig. 3. Resource intensity of the algorithm

Проверка угла между векторами решений системы в методе Ньютона не оказывает влияния на точность решения, но повышает производительность алгоритма, так как уменьшается количество итераций в методе Ньютона и, как следствие, уменьшается время решения СНАУ: сокращение времени решения составило от 8 до 77,8 %.

Следует отметить, что в околоритических зонах на определенной итерации по нагрузке происходит несколько идущих подряд уменьшений ша-

гов по нагрузке, откатов итераций и перерасчетов СНАУ, что увеличивает общее время расчета задачи. Для исключения выполнения избыточных вычислений при откатах итераций осуществим подбор значения изменения шага по нагрузке $\Delta_{previous} = 2^{Degree}$ (*Degree* — степень) при $\Delta_{next} = 2^1 = 2$. Таким образом, получится исключить выполнение лишних откатов по нагрузке и при этом, в случае необходимости, нивелировать уменьшение шага по нагрузке на следующей итерации. Результаты вычислений представ-

Табл. 4. Производительность алгоритма

Table 4. Algorithm performance

Проверка в методе Ньютона Verification in Newton's method	q_{cr} , МПа MPa	Шагов по q Steps by q	Количество откатов шага по q Number of step rollbacks by q	Максимальное количество откатов по q в итерации Maximum number of rollbacks by q in iteration	Количество циклов метода Ньютона Number of cycles of Newton's method	Время решения системы, мин Time to solve the system, min	Сокращение времени решения, % Reduction in solution time, %
Оболочка № 1.2 Сталь С345 Shell No. 1.2 Steel S345							
Не выполняется Not implemented	0,6783	72	28	3	6936	99,84	77,8
Выполняется In progress		41	12	3	1597	22,19	
Оболочка № 1.3 Сталь С345 Shell No. 1.3 Steel S345							
Не выполняется Not implemented	0,8042	44	15	3	2367	33,87	8
Выполняется In progress		66	26	5	1840	31,15	
Оболочка № 1.4 ЛУ-П/ЭНФБ Shell No. 1.4 LU-P/ENFB							
Не выполняется Not implemented	0,0147	53	15	4	1968	25,15	69,3
Выполняется In progress		73	15	4	643	7,71	
Оболочка № 2.1 Сталь С345 Shell No. 2.1 Steel S345							
Не выполняется Not implemented	0,8520	52	14	3	3115	13,46	68,8
Выполняется In progress		52	14	3	1039	4,2	
Оболочка № 2.1 Оргстекло Shell No. 2.1 Plexiglass							
Не выполняется Not implemented	0,0121	54	13	4	1962	8,24	10,5
Выполняется In progress		74	27	6	1753	7,37	

Табл. 5. Подбор $\Delta_{previous}$

Table 5. Selection $\Delta_{previous}$

Степень Degree	2^{Degree}	q_{cr} , МПа MPa	Шагов по q Steps by q	Максимальное количество откатов по q в итерации Maximum number of rollbacks by q in iteration	Количество циклов метода Ньютона Number of cycles of Newton’s method	Время решения системы, мин Time to solve the system, min	Изменение времени решения, % Change in solution time, %
Оболочка № 1.2 Сталь С345 Shell No. 1.2 Steel S345							
2	4	0,6783	46	2	318	4,32	–80,5
3	8	0,6782	76	2	3640	49,06	121,1
4	16	0,6782	84	1	1717	22,30	0,5

Степень Degree	2^{Degree}	q_{cr} , МПа MPa	Шагов по q Steps by q	Максимальное количество откатов по q в итерации Maximum number of rollbacks by q in iteration	Количество циклов метода Ньютона Number of cycles of Newton's method	Время решения системы, мин Time to solve the system, min	Изменение времени решения, % Change in solution time, %
Оболочка № 1.3 Сталь С345 Shell No. 1.3 Steel S345							
2	4	0,8042	98	2	2129	37,72	21,1
3	8	0,8042	73	1	757	11,26	-63,9
4	16	0,8042	80	1	1406	25,04	-19,6
Оболочка № 1.4 ЛУ-П/ЭНФБ Shell No. 1.4 LU-P/ENFB							
2	4	0,0147	74	2	339	5,36	-30,5
3	8	0,0147	82	1	375	5,13	-33,4
4	16	0,0147	104	1	601	8,33	8
Оболочка № 2.1 Сталь С345 Shell No. 2.1 Steel S345							
2	4	0,8520	64	2	650	2,74	-34,8
3	8	0,8520	76	1	338	1,44	-65,7
4	16	0,8520	71	1	530	2,28	-45,9
Оболочка № 2.1 Оргстекло Shell No. 2.1 Plexiglass							
2	4	0,0121	106	3	1483	6,13	-16,8
3	8	0,0121	124	2	1178	4,96	-32,8
4	16	0,0121	96	1	537	2,26	-69,4

лены в табл. 5. Под изменением времени решения в табл. 5 подразумевается разница между временем решения СНАУ при $\Delta_{previous} = 2^1$ и $\Delta_{previous} = 2^{Degree}$ в процентах (знак минус обозначает уменьшение времени).

Из полученных в табл. 5 результатов можно выделить $\Delta_{previous} = 2^3 = 8$ и $\Delta_{previous} = 2^4 = 16$ для данных значений отмечено наибольшее снижение времени решения СНАУ: для $Degree = 3$ сокращение составило от 32,8 до 65,7 %, для $Degree = 4$ — от 19,6 до 69,4 %. При этом выбор параметра $Degree$ не оказывает существенного влияния на величину крити-

ческой нагрузки. Необходимо отметить, что среди выделенных значений $\Delta_{previous}$ нет однозначно лучшего параметра, так как лучшее решение (относительно затраченного времени) было получено при разных степенях 2 в зависимости от рассчитываемой конструкции. Вместе с тем при $\Delta_{previous} = 2^3 = 8$ для оболочки № 1.2 время решения СНАУ увеличилось на 121 %, при $\Delta_{previous} = 2^4 = 16$ для оболочки № 1.4 увеличение времени решения составило 8 %.

Итоговые параметры вычислительного алгоритма, принятые для последующих вычислений, приведены в табл. 6.

Табл. 6. Параметры алгоритма

Table 6. Algorithm parameters

Номер Number	Параметр Parameter	Значение Meaning
1	Минимальный угол между векторами решений Minimum angle between solution vectors	$\Delta_1 = 0,01$
2	Максимальный угол между векторами решений Maximum angle between solution vectors	$\Delta_2 = 0,1$
3	Уменьшение шага по нагрузке Step reduction by load	$\Delta_{previous} = 2^4 = 16$
4	Увеличение шага по нагрузке Increase step by load	$\Delta_{next} = 2^1 = 2$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Выполнены расчеты шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру оболочек из материалов, представленных в табл. 1.

Рассматривались пологие оболочки двоякой кривизны и цилиндрические панели, геометриче-

ские параметры рассчитываемых конструкций приведены в табл. 2, 3 соответственно.

Нагрузка — статическая, равномерно распределенная по нормали к поверхности.

Количество разложений искомых функций в ряды в методе Ритца $N = 16$.

Табл. 7. Результаты расчетов пологих оболочек двоякой кривизны

Table 7. Doubly-curved shallow shells calculation results

Номер Number	Материал Material	D. H. van Campen и др. [47] D. H. van Campen et al. [47]		X. Wang [50] X. Wang [50]		В.В. Карпов и др. [51] V.V. Karpov et al. [51]	A.A. Семенов [52] A.A. Semenov [52]	Авторские результаты Authors results
		PSM	AEM	DQM	FEM		МПРНП MCSBP	
q_{cr} , Па / Pa								
1.1	Материал 2 Material 2	57,86	76,71	50,76	52,89	–	54,35	53,55
q_{cr} , МПа / MPa								
1.2	Сталь С345 Steel S345	–	–	–	–	0,6238	–	0,6149
1.3		–	–	–	–	0,8023	–	0,8010
1.4	ЛУ-П/ЭНФБ LU-P/ENFB	–	–	–	–	–	0,013	0,0126
1.5	T300/976	–	–	–	–	–	0,586	0,5813

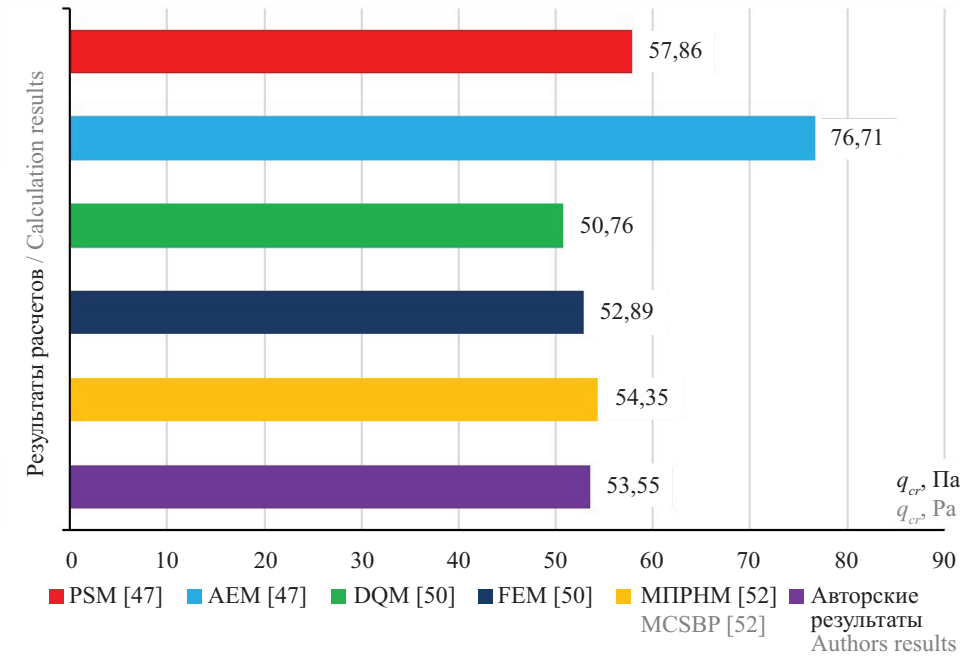


Рис. 4. Результаты расчетов оболочки вариант № 1.1

Fig. 4. Calculation results of the shell option No. 1.1

Табл. 8. Результаты расчетов цилиндрических панелей

Table 8. Calculation results of cylindrical panels

Номер Number	Материал Material	А.А. Семенов [52] A.A. Semenov [52]	Д.С. Петров и др. [53] D.S. Petrov et al. [53]	Авторские результаты Authors results
		МПРНП / MCSBP	ANSYS	
q_{cr} , МПа / MPa				
2.1	Сталь С345 Steel S345	–	0,6562	0,67469
	Оргстекло Plexiglass	–	0,0105	0,00979
2.2	ЛУ-П/ЭНФБ LU-P/ENFB	0,443	–	0,43572
	T300/976	0,465	–	0,45770
2.3	ЛУ-П/ЭНФБ LU-P/ENFB	0,632	–	0,62362
	T300/976	0,566	–	0,56120

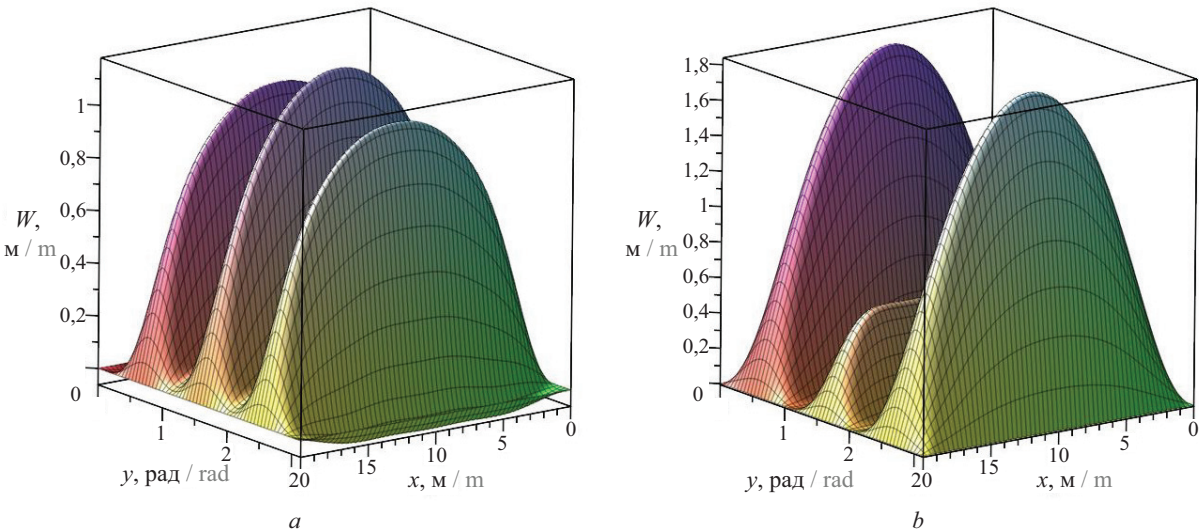


Рис. 5. Поля прогибов цилиндрической панели вариант № 2.3 (T300/976)

Fig. 5. Deflection fields of a cylindrical panel option No. 2.3 (T300/976)

Значения критических нагрузок потери устойчивости q_{cr} представлены в табл. 7, 8.

Для оболочки вариант № 1.1 значения критических нагрузок, полученные в ходе данной работы, а также другими авторами [47, 50, 52, 53], представлены на рис. 4.

Из представленных в табл. 7 и на рис. 4 результатов можно сделать вывод, что разработанный вычислительный алгоритм позволяет достоверно определить критические нагрузки потери устойчивости пологих оболочек двойкой кривизны. Это подтверждается сходимостью вычисленных критических нагрузок с результатами других авторов: расхождение результатов для конструкций из изотропных материалов не превышает 1,49 %, а для оболочек из ортотропных материалов не превышает 8,05 %.

При расчете цилиндрических панелей получены значения критических нагрузок, сопоставимые со значениями, полученными другими авторами:

расхождение результатов для панелей из изотропных материалов от 2,74 до 7,29 %; из ортотропных материалов от 0,85 до 1,67 %. На основании чего можно сделать вывод о применимости разработанного алгоритма для расчета цилиндрических панелей.

На рис. 5 показаны поля прогибов цилиндрической панели вариант № 2.3 из углепластика T300/976. На рис. 5, а — поле до потери устойчивости при нагрузке $q = 0,62362$ МПа, на рис. 5, b — после потери устойчивости при нагрузке $q = 0,62363$ МПа.

Деформирование цилиндрической панели (на рис. 5) до потери устойчивости характеризуется наибольшим нарастанием прогибов в центре и четвертях конструкции. Максимальное значение прогиба наблюдается в центре панели. После потери устойчивости общий характер деформирования (экстремумы в центре и четвертях) сохранился, однако максимальные значения прогибов зафиксированы в четвертях конструкции.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Разработанный вычислительный алгоритм оказался устойчивым к изменению геометрии и материала конструкции. При этом данный алгоритм пригоден для исследования НДС и устойчивости как пологих оболочек двоякой кривизны, так и цилиндрических панелей.

Высокая производительность алгоритма обеспечивается за счет учета процесса деформирования

рассматриваемых тонкостенных конструкций (учитывается характер кривой равновесных состояний) в виде адаптивного изменения шага по нагрузке в ходе расчета конструкции и ограничения выполняемых итераций в методе Ньютона при решении системы нелинейных уравнений.

Данный алгоритм может быть использован для исследования НДС и устойчивости оболочек иной геометрии, а также для конструкций переменной толщины (оболочки с ребрами и/или вырезами).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Соколов В.Г., Разов И.О., Волинец С.И. Исследование свободных колебаний тонкостенных прямолинейных газопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке // Вестник гражданских инженеров. 2019. № 6 (77). С. 149–156. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-5-149-156. EDN EGOGDV.
2. Гришин И.В., Каюмов Р.А. Упрощенное уравнение многослойной плиты для описания работы асфальтобетонных покрытий металлических мостов // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2022. № 4 (62). С. 119–128. DOI: 10.52409/20731523_20224119. EDN FDJBZY.
3. Василькин А.А. Управление поведением вертикального стального резервуара в период эксплуатации // Известия Юго-Западного государственного университета. 2018. № 4 (79). С. 66–74. DOI: 10.21869/2223-1560-2018-22-4-66-74. EDN YQVOJN.
4. Vescovini R., Oliveri V., Pizzi D., Dozio L., Weaver P.M. A semi-analytical approach for the analysis of variable-stiffness panels with curvilinear stiffeners // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 188–189. Pp. 244–260. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.10.011
5. Кузнецова В.О. К вопросу учета кинетики наводороживания на предельное состояние сферических оболочек из титанового сплава // Строительные конструкции, здания и сооружения. 2024. № 2 (7). С. 4–14. EDN SZJYCD.
6. Железнов Л.П. Нелинейное деформирование и устойчивость композитной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении изгибающим моментом и краевой поперечной силой // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 8 (749). С. 84–95. DOI: 10.18698/0536-1044-2022-8-84-95. EDN XAAWGI.
7. Тумашик Г.А., Фрумен А.И. Исследование статической и динамической прочности цилиндрической оболочки, контактирующей с круговой диафрагмой // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 5. С. 192–196. EDN PIGEEH.
8. Овчинников И.И., Овчинников И.Г. Моделирование и оптимальное проектирование круглых пластинок, взаимодействующих с агрессивными средами : монография. Тюмень : Тюменский индустриальный университет, 2023. 198 с. EDN QZDQRC.
9. Ghaiasvand A., Rashid H.A. Numerical and experimental analysis of buckling and post buckling in cylindrical shells with circular cutout // Computations and Simulations in Mechanical Science. 2018. Vol. 1. Issue 2. Pp. 24–28.
10. Турков А.В., Поleshko С.И. Исследование прогибов и частот собственных колебаний круглых изотропных пластин переменной толщины по закону квадратной параболы с утолщением на опоре // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. № 8. С. 1212–1219. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.8.1212-1219. EDN MKTADU.
11. Пятикрестовский К.П., Травуш В.И. Экспериментальные исследования характера НДС фанерных обшивок в составе пространственных конструкций // Известия Юго-Западного государственного университета. 2015. № 5 (62). С. 36–42. EDN VHNOAJ.
12. Dewangan H.Ch., Panda S.K. Nonlinear Thermoelastic Numerical Frequency Analysis and Experimental Verification of Cutout Abided Laminated Shallow Shell Structure // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. 2022. Vol. 144. No. 6. DOI: 10.1115/1.4054843. EDN AQYBRW.
13. Jiao P., Chen Z., Xu F., Tang X., Su W. Effects of ringed stiffener on the buckling behavior of cylindrical shells with cutout under axial compression: Experimental and numerical investigation // Thin-Walled Structures. 2018. Vol. 123. Pp. 232–243. DOI: 10.1016/j.tws.2017.11.013
14. Бауэр С.М., Венатовская Л.А., Воронкова Е.Б. Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023.

Т. 10. № 4. С. 686–712. DOI: 10.21638/spbu01.2023.407. EDN UJNCGP.

15. *Трещев А.А.* О механических испытаниях тонкостенных цилиндрических оболочек из композитных материалов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2023. № 7. С. 90–97. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-90-91. EDN ANDSZH.

16. *Петров В.В.* Расчет неоднородных по толщине оболочек с учетом физической и геометрической нелинейностей // Academia. Архитектура и строительство. 2016. № 1. С. 112–117. EDN VNRSEV.

17. *Кривошапко С.Н., Алёшина О.О., Иванов В.Н.* Статический расчет оболочек, очерченных по поверхностям с главным каркасом из трех заданных суперэллипсов // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 6 (305). С. 18–27. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.6.18.27. EDN DIBIMW.

18. *Li Sh.Ch., Zhang Yu.Ch., Chang Le., Zhou Ch.Yu., He X.H.* Research on Buckling Load of Cylindrical Shell with an Inclined through Crack under External Pressure and Its Solution // Metals. 2023. Vol. 13. Issue 1. P. 174. DOI: 10.3390/met13010174. EDN YKYTUZ.

19. *Pinto V.T., Rocha L.A. O., Fragassa C., dos Santos E., Isoldi L.A.* Multiobjective Geometric Analysis of Stiffened Plates under Bending through Constructal Design Method // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2020. Vol. 6. Pp. 1438–1449. DOI: 10.22055/jacm.2020.35248.2608

20. *Castro S.G.P., Jansen E.L.* Displacement-based formulation of Koiter's method: Application to multi-modal post-buckling finite element analysis of plates // Thin-Walled Structures. 2021. Vol. 159. P. 107217. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107217

21. *Klochkov Yu.V., Pshenichkina A.P., Nikolaev A.P., Marchenko S.S., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu.* Calculation of Shells of Revolution with the Use of a Mixed FEM with a Vector Approximation Procedure // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2024. Vol. 53. Issue 1. Pp. 10–21. DOI: 10.1134/S1052-618824010059. EDN NHDCXB.

22. *Сагдатуллин М.К.* Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 2. С. 130–148. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148. EDN KNCSOD.

23. *Каюмов Р.А.* Большие прогибы, потеря устойчивости и закритическое поведение пологих панелей и арок переменной толщины на упругом основании // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2024. № 2. С. 33–41. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.04. EDN KFDQBX.

24. *Liew K.M., Lim C.W.* Vibration of perforated doubly-curved shallow shells with rounded corners //

International Journal of Solids and Structures. 1994. Vol. 31. Issue 11. Pp. 1519–1536. DOI: 10.1016/0020-7683(94)90012-4

25. *Young P.G., Yuan J., Dickinson S.M.* Three-Dimensional Analysis of the Free Vibration of Thick Rectangular Plates With Depressions, Grooves or Cut-Outs // Journal of Vibration and Acoustics. 1996. Vol. 118. Issue 2. Pp. 184–189. DOI: 10.1115/1.2889647

26. *Qatu M.S.* Effect of inplane edge constraints on natural frequencies of simply supported doubly curved shallow shells // Thin-Walled Structures. 2011. Vol. 49. Issue 7. Pp. 797–803. DOI: 10.1016/j.tws.2011.01.001. EDN OENDQJ.

27. *Lam K.Y., Hung K.C., Chow S.T.* Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method // Applied Acoustics. 1989. Vol. 28. Issue 1. Pp. 49–60. DOI: 10.1016/0003-682X(89)90030-3

28. *Aljawhary M.H., Al-Gahtani H.J.* Boundary-type Ritz method for the analysis of arbitrarily shaped polygonal plates // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2021. Vol. 130. Pp. 124–134. DOI: 10.1016/j.enganabound.2021.05.008. EDN XXUFIY.

29. *Milazzo A., Guarino G., Gulizzi V.* Buckling and post-buckling of variable stiffness plates with cutouts by a single-domain Ritz method // Thin-Walled Structures. 2023. Vol. 182. P. 110282. DOI: 10.1016/j.tws.2022.110282. EDN YXGIOP.

30. *Karpov V.V., Kobelev E.A., Maslennikov A.M., Panin A.N.* Ritz method in the discrete approximation of displacements for slab calculation // Architecture and Engineering. 2023. Vol. 8. Issue 4. Pp. 57–67. DOI: 10.23968/2500-0055-2023-8-4-57-67. EDN FTPEME.

31. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А.* Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку // Известия МГТУ МАМИ. 2008. № 1 (5). С. 233–246. EDN LDMOJF.

32. *Колесников А.Г., Иванов А.А.* Напряженно-деформированное состояние пологой оболочки на упругом основании с переменными прочностными характеристиками // Известия Юго-Западного государственного университета. 2023. Т. 27. № 3. С. 21–33. DOI: 10.21869/2223-1560-2023-27-3-21-33. EDN UGXKEY.

33. *Ступишин Л.Ю., Никитин К.Е.* Численное исследование вынужденных колебаний ортотропных геометрически нелинейных пологих оболочек с использованием метода конечных элементов в смешанной форме // Промышленное и гражданское строительство. 2017. № 6. С. 28–33. EDN YUBOMD.

34. *Голоскоков Д.П., Матросов А.В.* Метод начальных функций в расчете изгиба защемленной по контуру тонкой ортотропной пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2021. Т. 17. № 4. С. 330–344. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2021.402. EDN RIFCWU.

35. Тебякин А.Д., Крысько А.В., Жигалов М.В., Крысько В.А. Упругопластическое деформирование нанопластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22. № 4. С. 494–505. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505. EDN KFJVBH.

36. Чесноков А.В., Михайлов В.В. Методика определения требуемого соотношения мембранных напряжений в тентовой оболочке арочного типа // Известия Юго-Западного государственного университета. 2024. Т. 28. № 2. С. 37–55. DOI: 10.21869/2223-1560-2024-28-2-37-55. EDN LCSYWD.

37. Yiotis A.J., Katsikadelis J.T. Buckling of cylindrical shell panels: a MAEM solution // Archive of Applied Mechanics. 2015. Vol. 85. Issue 9–10. Pp. 1545–1557. DOI: 10.1007/s00419-014-0944-9

38. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М. Упругопластический расчет оболочек вариационным методом на основе полиномов высокой степени // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2023. Т. 19. № 4. С. 349–361. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361. EDN WYVDDH.

39. Нетребко А.В., Пшеничников С.Г. Нестационарная динамическая задача для линейно-вязкоупругой цилиндрической оболочки конечной длины // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. 2014. № 4. С. 63–79. EDN TDVEUR.

40. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Spatial Non-Stationary Contact Problem for a Cylindrical Shell and Absolutely Rigid Body // Mechanics of Solids. 2020. Vol. 55. Issue 3. Pp. 366–376. DOI: 10.3103/S0025654420030127. EDN MRHREO.

41. Hosseini S., Rahimi G. Experimental and numerical analysis of hyperelastic plates using Mooney-Rivlin strain energy function and meshless collocation method // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2023. Vol. 150. Pp. 199–218. DOI: 10.1016/j.enganabound.2023.02.024

42. Коровайцева Е.А. О некоторых особенностях решения задач статики мягких оболочек вращения при больших деформациях // Труды МАИ. 2020. № 114. С. 3. DOI: 10.34759/trd-2020-114-04. EDN YYRPAW.

43. Бакусов П.А., Семенов А.А. Анализ устойчивости вычислительного алгоритма к изменению геометрических параметров цилиндрических оболочечных конструкций // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 1. С. 12–21. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.02. EDN ZIPFYC.

44. Мишуренко Н.А., Семенов А.А. Устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны с уче-

том наличия дискретно вводимых ослаблений // Известия КГАСУ. 2023. № 3 (65). С. 6–17. DOI: 10.52409/20731523_2023_3_6. EDN ASJURD.

45. Карнов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 285 с.

46. Vescovini R., Dozio L., D'Ottavio M., Polit O. On the application of the Ritz method to free vibration and buckling analysis of highly anisotropic plates // Composite Structures. 2018. Vol. 192. Pp. 460–474. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.03.017

47. Van Campen D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., ter Weeme B.J.W. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels — considering the effects of boundary conditions // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2002. Vol. 37. Issue 4–5. Pp. 659–667. DOI: 10.1016/S00207462(01)-00090-7

48. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. № 8. С. 70–77. EDN PBJFXB.

49. Цепенников М.В., Повышев И.А., Сметанников О.Ю. Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Прикладная математика и механика. 2012. № 10. С. 225–241. EDN PIEZDT.

50. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2007. Vol. 196. Issue 17–20. Pp. 2242–2251. DOI: 10.1016/j.cma.2006.11.009. EDN MKDNZV.

51. Karpov V.V., Semenov A.A. Refined model of stiffened shells // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 199. Pp. 43–56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019. EDN PNZVAI.

52. Semenov A.A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures // Thin-Walled Structures. 2016. Vol. 106. Pp. 428–436. DOI: 10.1016/j.tws.2016.05.018. EDN WVMNLF.

53. Петров Д.С., Семенов А.А. Анализ устойчивости ортотропной цилиндрической оболочечной конструкции в программном комплексе ANSYS Mechanical APDL // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23. № 3. С. 618–627. DOI: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-618-627. EDN IIAIEZ.

Поступила в редакцию 16 ноября 2024 г.

Принята в доработанном виде 25 февраля 2025 г.

Одобрена для публикации 24 марта 2025 г.

ОБ АВТОРАХ: **Николай Александрович Мишуренко** — аспирант, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий; **Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ)**; 190005, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4; ведущий инженер архитектурно-инженерного отдела; **ООО «Газпром проектирование»**; 191036, г. Санкт-Петербург, Суворовский пр. 16/13; SPIN-код: 5962-8693, РИНЦ ID: 1122500, ResearcherID: АНВ-4673-2022, ORCID: 0000-0002-0022-734X; nikolai8421@mail.ru;

Алексей Александрович Семенов — доктор технических наук, доцент, профессор кафедры информационных систем и технологий; **Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет (СПбГАСУ)**; 190005, г. Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4; SPIN-код: 9057-9882, РИНЦ ID: 648893, Scopus: 56460436800, ResearcherID: N-1075-2013, ORCID: 0000-0001-9490-7364; sw.semenov@gmail.com.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Sokolov V.G., Razov I.O., Volynec S.I. Investigation of free oscillation of thin-walled straight-line gas pipe lines of large diameter at semi-underground laying. *Bulletin of civil engineers*. 2019; 6(77):149-156. P. 149–156. DOI: 10.23968/1999-5571-2019-16-5-149-156. EDN EGOGDV. (rus.).
2. Grishin I.V., Kayumov R.A. Simplified multilayered slab equation describing asphalt concrete pavements of metal bridges. *News KSUAE*. 2022; 4(62):119-128. DOI: 10.52409/20731523_20224119. EDN FDJBZY. (rus.).
3. Vasilkin A.A. Control of Actions of Steel Tank in Working. *Proceedings of the Southwest State University*. 2018; 4(79):66-74. DOI: 10.21869/2223-1560-2018-22-4-66-74. EDN YQVOJN. (rus.).
4. Vescovini R., Oliveri V., Pizzi D., Dozio L., Weaver P.M. A semi-analytical approach for the analysis of variable-stiffness panels with curvilinear stiffeners. *International Journal of Solids and Structures*. 2020; 188-189:244-260. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2019.10.011
5. Kuznetsova V.O. On the issue of taking into account the kinetics of hydrogenation on the limiting state of spherical shells made of titanium alloy. *Construction, Buildings and Structures*. 2024; 2(7):4-14. EDN SZJYCD. (rus.).
6. Zheleznov L.P. Nonlinear Deformation and Stability of a Composite Cylindrical Shell under a Combined Loading by a Bending Moment and an Edge Transverse Force. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2022; 8(749):84-95. DOI: 10.18698/0536-1044-2022-8-84-95. EDN XAAWGI. (rus.).
7. Tumashik G.A., Frumen A.I. Study of static and dynamic strength of a cylindrical shell in contact with a circular diaphragm. *Aerospace MAI Journal*. 2012; 19(5):192-196. EDN PIGEEH. (rus.).
8. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G. *Modeling and optimal design of circular plates interacting with aggressive environments*. Tyumen, Industrial University of Tyumen, 2023; 198. EDN QZDQRC. (rus.).
9. Ghaiasvand A., Rashid H.A. Numerical and experimental analysis of buckling and post buckling in cylindrical shells with circular cutout. *Computations and Simulations in Mechanical Science*. 2018; 1(2):24-28.
10. Turkov A.V., Poleshko S.I. Investigation of deflections and natural vibration frequencies of circular isotropic plates of variable thickness according to the law of square parabola with thickening to the support. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2023; 18(8):1212-1219. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.8.1212-1219. EDN MKTADU. (rus.).
11. Pyatikrestovsky K.P., Travush V.I. Experimental studies on the nature of the VAT plywood sheathing as part of spatial structures. *Proceedings of the Southwest State University*. 2015; 5(62):36-42. EDN VHNOAJ. (rus.).
12. Dewangan H.Ch., Panda S.K. Nonlinear Thermoelastic Numerical Frequency Analysis and Experimental Verification of Cutout Abided Laminated Shallow Shell Structure. *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*. 2022; 144(6). DOI: 10.1115/1.4054843. EDN AQYBRW.
13. Jiao P., Chen Z., Xu F., Tang X., Su W. Effects of ringed stiffener on the buckling behavior of cylindrical shells with cutout under axial compression: Experimental and numerical investigation. *Thin-Walled Structures*. 2018; 123:232-243. DOI: 10.1016/j.tws.2017.11.013
14. Bauer S.M., Venatovskaya L.A., Voronkova E.B. Solid mechanics models in application to ophthalmology. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2023; 10(4):686-712. DOI: 10.21638/spbu01.2023.407. EDN UJNCGP. (rus.).
15. Treshchev A.A. About mechanical tests of thin-walled cylindrical shells made of composite materials. *Izvestiya Tula State University. Technical Sciences*. 2023; 7:90-97. DOI: 10.24412/2071-6168-2023-7-90-91. EDN ANDSZH. (rus.).
16. Petrov V.V. Calculation of Inhomogeneous Thickness of Shells with Considering Physical and Geometrical Nonlinearities. *Academia. Architecture and Construction*. 2016; 1:112-117. EDN VNRSEV. (rus.).

17. Krivoshapko S.N., Aleshina O.O., Ivanov V.N. Static analysis of shells with middle surfaces containing the main frame from three given superellipses. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022; 6(305):18-27. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.6.18.27. EDN DIBIMW. (rus.).
18. Li Sh.Ch., Zhang Yu.Ch., Chang Le., Zhou Ch.Yu., He X.H. Research on Buckling Load of Cylindrical Shell with an Inclined through Crack under External Pressure and Its Solution. *Metals*. 2023; 13(1):174. DOI: 10.3390/met13010174. EDN YKYTUZ.
19. Pinto V.T., Rocha L.A. O., Fragassa C., dos Santos E., Isoldi L.A. Multiobjective Geometric Analysis of Stiffened Plates under Bending through Constructal Design Method. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2020; 6:1438-1449. DOI: 10.22055/jacm.2020.35248.2608
20. Castro S.G.P., Jansen E.L. Displacement-based formulation of Koiter's method: Application to multi-modal post-buckling finite element analysis of plates. *Thin-Walled Structures*. 2021; 159:107217. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107217
21. Klochkov Yu.V., Pshenichkina A.P., Nikolaev A.P., Marchenko S.S., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. Calculation of Shells of Revolution with the Use of a Mixed FEM with a Vector Approximation Procedure. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2024; 53(1):10-21. DOI: 10.1134/S1052618824010059. EDN HHDCXB.
22. Sagdatullin M.K. Numerical modeling of non-linear deformation processes for shells of medium thickness. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023; 19(2):130-148. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-130-148. EDN KNCSOD. (rus.).
23. Kayumov R.A. Large deflections, loss of stability and over-critical behavior of sloping panels and arches of variable thickness on an elastic base. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2024; 2:33-41. DOI: 10.15593/perm.mech/2024.2.04. EDN KFDQBX. (rus.).
24. Liew K.M., Lim C.W. Vibration of perforated doubly-curved shallow shells with rounded corners. *International Journal of Solids and Structures*. 1994; 31(11):1519-1536. DOI: 10.1016/0020-7683(94)90012-4
25. Young P.G., Yuan J., Dickinson S.M. Three-Dimensional Analysis of the Free Vibration of Thick Rectangular Plates With Depressions, Grooves or Cut-Outs. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1996; 118(2):184-189. DOI: 10.1115/1.2889647
26. Qatu M.S. Effect of inplane edge constraints on natural frequencies of simply supported doubly curved shallow shells. *Thin-Walled Structures*. 2011; 49(7):797-803. DOI: 10.1016/j.tws.2011.01.001. EDN OENDQJ.
27. Lam K.Y., Hung K.C., Chow S.T. Vibration analysis of plates with cutouts by the modified Rayleigh-Ritz method. *Applied Acoustics*. 1989; 28(1):49-60. DOI: 10.1016/0003-682X(89)90030-3
28. Aljawhary M.H., Al-Gahtani H.J. Boundary-type Ritz method for the analysis of arbitrarily shaped polygonal plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2021; 130:124-134. DOI: 10.1016/j.engabound.2021.05.008. EDN XXUFYI.
29. Milazzo A., Guarino G., Gulizzi V. Buckling and post-buckling of variable stiffness plates with cutouts by a single-domain Ritz method. *Thin-Walled Structures*. 2023; 182:110282. DOI: 10.1016/j.tws.2022.110282. EDN YXGIOP.
30. Karpov V.V., Kobelev E.A., Maslennikov A.M., Panin A.N. Ritz method in the discrete approximation of displacements for slab calculation. *Architecture and Engineering*. 2023; 8(4):57-67. DOI: 10.23968/2500-0055-2023-8-4-57-67. EDN FTPEME.
31. Grigolyuk E., Lopanitsyn E. Influence of axisymmetric initial imperfections of a spherical shell on its critical load. *Izvestiya MGTU MAMI*. 2008; 1(5):233-246. EDN LDMOJF. (rus.).
32. Kolesnikov A.G., Ivanov A.A. Stress-Strain State of Shallow Shell in an Elastic Foundation with Variable Strength Characteristics. *Proceedings of the Southwest State University*. 2023; 27(3):21-33. DOI: 10.21869/2223-1560-2023-27-3-21-33. EDN UGXKEY. (rus.).
33. Stupishin L.Yu., Nikitin K.Ye. Numerical Investigation of Forced Oscillations of Orthotropic Geometrically Non-linear Shallow Shells with the Use of the Finite Element Method in Mixed Form. *Industrial and Civil Engineering*. 2017; 6:28-33. EDN YUBOMD. (rus.).
34. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Method of initial functions in analyses of the bending of a thin orthotropic plate clamped along the contour. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2021; 17(4):330-344. DOI: 10.21638/11701/spbu10.2021.402. EDN RIFCWU. (rus.).
35. Tebyakin A.D., Krysko A.V., Zhigalov M.V., Krysko V.A. Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method). *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2022; 22(4):494-505. DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505. EDN KFJVBH. (rus.).
36. Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Technique for obtaining the membrane stress ratio in a fabric arch-type shell. *Proceedings of the Southwest State University*. 2024; 28(2):37-55. DOI: 10.21869/2223-1560-2024-28-2-37-55. EDN LCSYWD. (rus.).
37. Yiotis A.J., Katsikadelis J.T. Buckling of cylindrical shell panels: a MAEM solution. *Archive of Applied Mechanics*. 2015; 85(9-10):1545-1557. DOI: 10.1007/s00419-014-0944-9
38. Khayrullin F.S., Sakhibiev O.M. Elastic-plastic analysis of shells by variational method on the basis of high-degree polynomials. *Structural Mechanics*

of Engineering Constructions and Buildings. 2023; 19(4):349-361. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-4-349-361. EDN WYVDDH. (rus.).

39. Netrebko A.V., Pshenichnov S.G. Nonstationary dynamic problem for visco-elastic cylindrical finite length shell. Izvestiya Tula State University. *Natural Sciences*. 2014; 4:63-79. EDN TDVEUR. (rus.).

40. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Spatial Non-Stationary Contact Problem for a Cylindrical Shell and Absolutely Rigid Body. *Mechanics of Solids*. 2020; 55(3):366-376. DOI: 10.3103/S0025654420030127. EDN MRHREO.

41. Hosseini S., Rahimi G. Experimental and numerical analysis of hyperelastic plates using Mooney-Rivlin strain energy function and meshless collocation method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2023; 150:199-218. DOI: 10.1016/j.engabound.2023.02.024

42. Korovaytseva E.A. On some features of soft shells of revolution static problems solution at large deformations. *Trudy MAI*. 2020; 114:3. DOI: 10.34759/trd-2020-114-04. EDN YYRPAW. (rus.).

43. Bakusov P.A., Semenov A.A. Analysis of the stability of the computational algorithm to a change in the geometric parameters of cylindrical shell structures. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2021; 1:12-21. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.1.02. EDN ZIPFYC. (rus.).

44. Mishurenko N.A., Semenov A.A. Buckling of shallow shells of double curvature considering the presence of discretely introduced weakenings. *News KSUAE*. 2023; 3(65):6-17. DOI: 10.52409/20731523_2023_3_6. EDN ASJURD. (rus.).

45. Karpov V.V. The strength and stability of reinforced shells of revolution. Part 1. *Models and algorithms of research of the strength and stability of supported shells of revolution*. Moscow, Fizmatlit, 2010; 285. (rus.).

46. Vescovini R., Dozio L., D'Ottavio M., Polit O. On the application of the Ritz method to free vibration and buckling analysis of highly anisotropic plates. *Com-*

posite Structures. 2018; 192:460-474. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.03.017

47. Van Campen D.H., Bouwman V.P., Zhang G.Q., Zhang J., ter Weeme B.J.W. Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels — considering the effects of boundary conditions. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002; 37(4-5):659-667. DOI: 10.1016/S0020-7462(01)00090-7

48. Smerdov A.A., Buyanov I.A., Chudnov I.V. Analysis of optimal combinations of requirements to developed CFRP for large space-rocket designs. *BMSTU Journal of Mechanical Engineering*. 2012; 8:70-77. EDN PBJFXB. (rus.).

49. Tsepennikov M.B., Povyshev I.A., Smetanikov O.Yu. Verification of numerical technique for composite structures failure modeling. Perm National Research Polytechnic University Bulletin. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2012; 10:225-241. EDN PIEZDT. (rus.).

50. Wang X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007; 196(17-20):2242-2251. DOI: 10.1016/j.cma.2006.11.009. EDN MKDNZV.

51. Karpov V.V., Semenov A.A. Refined model of stiffened shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2020; 199:43-56. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.03.019. EDN PNZVAI.

52. Semenov A.A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures. *Thin-Walled Structures*. 2016; 106:428-436. DOI: 10.1016/j.tws.2016.05.018. EDN WVMNLF.

53. Petrov D.S., Semenov A.A. Buckling analysis of an orthotropic cylindrical shell structure in the ANSYS Mechanical APDL software package. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2023; 23(3):618-627. DOI: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-618-627. EDN IIAIEZ. (rus.).

Received November 16, 2024.

Adopted in revised form on February 25, 2025.

Approved for publication on March 24, 2025.

B I O N O T E S: **Nikolai A. Mishurenko** — postgraduate student, senior lecturer of the Department of Information Systems and Technologies; **Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU)**; 4, 2nd Krasnoarmeyskaya st., Saint Petersburg, 190005, Russian Federation; **LLC “Gazprom proektirovanie”**; 16/13 Suvorovsky ave., Saint Petersburg, 191036, Russian Federation; SPIN-code: 5962-8693, ID RSCI: 1122500, ResearcherID: AHB-4673-2022, ORCID: 0000-0002-0022-734X; nikolai8421@mail.ru;

Alexey A. Semenov — Doctor of Technical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Information Systems and Technologies; **Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering (SPbGASU)**; 4, 2nd Krasnoarmeyskaya st., Saint Petersburg, 190005, Russian Federation; SPIN-code: 9057-9882, ID RSCI: 648893, Scopus: 56460436800, ResearcherID: N-1075-2013, ORCID: 0000-0001-9490-7364; sw.semenov@gmail.com.

Contribution of the authors: all authors made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

The authors declare no conflict of interest.