

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 69.04

DOI: 10.22227/1997-0935.2025.6.867-887

Методика расчета плит на продавливание, построенная с использованием регрессионного анализа

Александр Михайлович Бударин¹, Олег Юрьевич Ушаков², Линар Салихзанович
Сабитов³, Левон Рафаэлович Маилян⁴, Сергей Сергеевич Сосновских¹

¹ Институт «Гидропроект»; г. Москва, Россия;

² Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ);
г. Екатеринбург, Россия;

³ Национальный исследовательский Московский государственный строительный
университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;

⁴ Донской государственный технический университет (ДГТУ); г. Ростов-на-Дону, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. В местах сопряжения плитных и вертикальных железобетонных конструкций, где значительная сила сконцентрирована на относительно небольшой площади опоры, возможно разрушение плиты от продавливания. Данный тип разрушения сопровождается образованием пространственной поверхности разрушения, формируемой сетью трещин и называемой пирамидой продавливания. К основным факторам, оказывающим влияние на несущую способность плиты при продавливании, можно отнести: масштабный энергетический эффект, процент продольного армирования растянутой зоны плиты, относительный пролет среза плиты, отношение периметра опоры к рабочей высоте плиты. Отсутствие учета этих факторов в методике вычисления предельного продавливающего усилия, воспринимаемого плитой, ведет к ухудшению ее точности. Цель исследования — разработка методики расчета железобетонных плит на продавливание, учитывающей основные факторы, влияющие на несущую способность плиты.

Материалы и методы. Представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний и с помощью отечественного (СП 63.13330) и зарубежных нормативных документов (Eurocode 2, ACI 318-11, Model Code 2010). Актуальной является задача разработки более точной методики расчета плит на продавливание. Коэффициенты методики получены с помощью регрессионного анализа методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга – Марквардта на основании опытных данных.

Результаты. В результате выполнения регрессионного анализа получена методика расчета на продавливание. Приведено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний и с помощью полученной методики.

Выводы. Сравнение показало, что полученная методика имеет более высокие показатели соответствия с опытными данными, чем методики, представленные в ряде нормативных документов. Разработанная методика может применяться для оценки несущей способности плит перекрытия и фундаментных плит на продавливание с поперечной арматурой и без нее.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: железобетон, плита, продавливание, масштабный эффект, регрессия, алгоритм Левенберга – Марквардта

Благодарности. Авторы выражают благодарность Никите Кирилловичу Гольякову и Сергею Сергеевичу Петрову за консультации по теме регрессионного анализа, а также анонимным рецензентам за конструктивные замечания и предложения.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Бударин А.М., Ушаков О.Ю., Сабитов Л.С., Маилян Л.Р., Сосновских С.С. Методика расчета плит на продавливание, построенная с использованием регрессионного анализа // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 6. С. 867–887. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.6.867-887

Автор, ответственный за переписку: Александр Михайлович Бударин, alex.budarin01@gmail.com.

Regression-based method for calculation of the punching shear capacity of the slab

Alexander M. Budarin¹, Oleg Yu. Ushakov², Linar S. Sabitov³, Levon R. Mailyan⁴,
Sergey S. Sosnovskikh¹

¹ Institute Hydroproject; Moscow, Russian Federation;

² Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU);
Yekaterinburg, Russian Federation;

³ Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation;

⁴ Don State Technical University (DSTU); Rostov-on-Don, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. At slab-column joints, where significant force is concentrated on a relatively small area of the support, punching shear failure of the slab may occur. This type of failure is accompanied by formation of the spatial failure surface called punching cone. The main factors influencing punching shear capacity are: energetic size effect, percentage of longitudinal reinforcement in the tensile zone of the slab, span to depth ratio, column perimeter to depth ratio. Lack of consideration for these factors in a calculation method may result in low accuracy. The purpose of this work is to develop a calculation method which takes into account the main factors affecting the punching shear capacity of the slab.

Materials and methods. The paper presents a comparison of the punching shear strength obtained in laboratory tests with domestic (CP 63.13330) and foreign (Eurocode 2, ACI 318-11, Model Code 2010) building codes. It is important to develop a more accurate method for calculation of punching shear strength of a slab. Coefficients of the method can be obtained by the least squares regression analysis using Levenberg – Marquardt algorithm based on the experimental data.

Results. As a result of the regression analysis, a calculation method for punching was obtained. The comparison of the punching shear strength obtained in laboratory tests with the described method is given.

Conclusions. The comparison showed that the obtained method has a higher compliance with the experimental data than the methods presented in a number of building codes. The developed method can be used to assess the punching shear strength of slabs and foundation with and without transverse reinforcement.

KEYWORDS: reinforced concrete, slab, punching shear, size effect, regression, Levenberg – Marquardt algorithm

Acknowledgements. The authors express their gratitude to Nikita Kirillovich Goltakov and Sergey Sergeevich Petrov for consultations on the topic of regression analysis, as well as to anonymous reviewers for constructive comments and suggestions.

FOR CITATION: Budarin A.M., Ushakov O.Yu., Sabitov L.S., Mailyan L.R., Sosnovskikh S.S. Regression-based method for calculation of the punching shear capacity of the slab. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(6):867-887. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.6.867-887 (rus.).

Corresponding author: Alexander M. Budarin, alex.budarin01@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

В местах сопряжения плитных и вертикальных железобетонных конструкций, где значительная сила сконцентрирована на относительно небольшой площади опоры, возможно разрушение плиты от продавливания. Данный тип разрушения сопровождается образованием пространственной поверхности разрушения, формируемой сетью трещин и называемой пирамидой продавливания. Величина предельного продавливающего усилия F_{ult} зависит от конфигурации плиты, ее армирования, а также геометрии опор.

В упрощенном виде для плит без поперечной арматуры значение F_{ult} принимается равным величине усилия, воспринимаемого бетоном F_b (1). Для плит с поперечной арматурой F_{ult} может быть найдено как минимальная величина среди условий (2)–(5), представляющих собой разные механизмы разрушения:

$$F_{ult} = \min(F_w, F_{out}, F_{cr}); \quad (1)$$

$$F_w = C_1 \cdot F_b + C_2 \cdot F_{sw}; \quad (2)$$

$$F_b = u \cdot h_0 \cdot R \cdot f_1 \cdot f_2 \dots f_n; \quad (3)$$

$$F_{out} = u_{out} \cdot h_0 \cdot R \cdot f_1 \cdot f_2 \dots f_n; \quad (4)$$

$$F_{cr} = C_3 F_b, \quad (5)$$

где C_1, C_2 — эмпирические коэффициенты, учитывающие изменение вклада бетона и поперечной арматуры в несущую способность плиты [1]; F_{sw} — усилие, воспринимаемое поперечной арматурой; u — периметр контура расчетного поперечного сечения, вос-

принимающего продавливающее усилие; h_0 — рабочая высота плиты; R — прочностной параметр, характеризующий сопротивление материала плиты; $f_1 \dots f_n$ — набор эмпирических функций; C_3 — эмпирический коэффициент, учитывающий тип поперечной арматуры и условия ее анкеровки [2].

Эмпирические функции $f_1 \dots f_n$ отражают влияние различных эффектов на величину вклада бетона F_b . В качестве основных можно выделить следующие эффекты.

1. Влияние процента продольного армирования растянутой зоны μ . Существенная часть несущей способности плиты обеспечивается за счет сил зацепления в изгибной трещине. Уменьшение процента продольного армирования μ ведет к увеличению ширины раскрытия трещин. С увеличением ширины раскрытия трещины уменьшается площадь контакта между крупным заполнителем и противоположным берегом трещины, что ведет к уменьшению вклада сил зацепления в несущую способность плиты. При этом, согласно исследованиям [3, 4], вклад продольной арматуры в несущую способность плиты при продавливании за счет нагельного эффекта пренебрежимо мал. В некоторых работах [5] данный параметр заменяется механическим коэффициентом продольного армирования ω , имеющим лучшую корреляцию с опытными данными:

$$\omega = \mu \cdot R_s / R_b, \quad (6)$$

где R_s — предел текучести продольной арматуры растянутой зоны; R_b — предел прочности бетона на одноосное сжатие.

2. Величина относительного пролета среза r_λ оказывает существенное влияние на механизм разрушения и несущую способность плиты:

$$r_\lambda = b/h_0, \quad (7)$$

где b — расстояние от грани колонны до точки приложения нагрузки; для плит, нагруженных равномерно распределенной нагрузкой, величина b принимается равной расстоянию от грани колонны до линии изменения знака радиального изгибающего момента в плите (для отдельно стоящих фундаментов b принимается равным расстоянию от грани колонны до края плиты, для плит перекрытий может быть принято $\approx 0,22L$, где L — величина пролета); h_0 — рабочая высота плиты.

Согласно исследованиям [6, 7] с уменьшением величины r_λ несущая способность плиты растет. Наиболее существенный рост наблюдается при значениях $r_\lambda < 4$, что объясняется образованием поля нормальных сжимающих напряжений между опорой и точкой приложения нагрузки, оказывающего влияние на напряженное состояние в области формирования пирамиды продавливания (нормальные сжимающие напряжения вызывают уменьшение величины гидростатического инварианта тензора напряжений, что ведет к увеличению прочности материала). В то же время увеличение значения r_λ сопровождается уменьшением несущей способности плиты, связанной с уменьшением изгибной жесткости конструкции (уменьшение изгибной жесткости конструкции ведет к увеличению ширины раскрытия трещин и уменьшению вклада сил зацепления [8]).

3. Одним из факторов, оказывающих влияние на несущую способность плит при продавливании, является масштабный энергетический эффект [9, 10]. Стабильный рост трещины происходит, когда величина высвобождаемой потенциальной энергии деформации U_E равна поверхностной энергии Γ , требуемой для образования новой поверхности трещины. Поверхностная энергия пропорциональна длине трещины l_{cr} , в то время как высвобождаемая энергия пропорциональна квадрату ее длины l_{cr}^2 (высвобождение энергии происходит из некоторой области во-

круг трещины). На рис. 1 представлены графики изменения энергий в процессе роста трещины.

После достижения определенной длины трещины (называемой критической) величина U_E превышает Γ вследствие более высокой скорости роста (квадратичная против линейной). В результате трещина производит больше энергии, чем потребляет, что выражается в ее лавинообразном росте, ведущем к хрупкому разрушению конструкции. С увеличением рабочей высоты плиты растет абсолютное значение критической длины трещины, а ее относительная величина (относительной рабочей высоты плиты) падает. Данное явление называется энергетическим масштабным эффектом. Подобная ситуация наблюдается и с зависимостью несущей способности плиты от ее рабочей высоты. Пример проявления этого эффекта представлен в труде [15], где приведено описание результатов испытаний плит PG-3 и PG-5. Образцы имели разную рабочую высоту ($h_0 = 456$ мм для PG-3 и $h_0 = 210$ мм для PG-5), в то время как остальные конструктивные параметры (процент продольного армирования, пролет среза, размер опоры относительно рабочей высоты) оставались идентичными. Процесс разрушения образца PG-5 имел пластичный характер и сопровождался значительными деформациями, интенсивным образованием изгибных трещин и достижением части продольной арматуры предела текучести. Для образца PG-3, имеющего большую рабочую высоту, напротив, наблюдался хрупкий механизм разрушения без достижения продольной арматурой предела текучести. В общем виде этот эффект может быть выражен с помощью формулы:

$$\sigma_n = B \cdot R_{bt} \cdot \left(1 + \frac{h_0}{d_0}\right)^{-1/2}, \quad (8)$$

где B — функция, учитывающая геометрию образца; R_{bt} — предел прочности бетона при одноосном растяжении; d_0 — переходный размер, представляющий собой эмпирическую величину, принимаемую постоянной для конструкций без поперечной арматуры.

Выражение (8) называется законом масштабного эффекта 3. Бажанта и представляет собой функцию, отражающую влияние масштабного эффекта на несущую способность конструкций без поперечной арматуры, в которых возможно стабильное развитие трещин [11]. С увеличением интенсивности поперечного армирования влияние масштабного эффекта на несущую способность плиты уменьшается.

4. Согласно исследованиям [8, 12] форма и размер опоры оказывают влияние на F_b . С ростом отношения периметра опоры u_0 , отнесенного к рабочей высоте плиты h_0 , наблюдается увеличение концентрации напряжений в углах опоры, что ведет к локальному образованию трещин, снижающих несущую способность плиты. На рис. 2 изображены изополя касательных напряжений ν в плитах одинаковой ра-

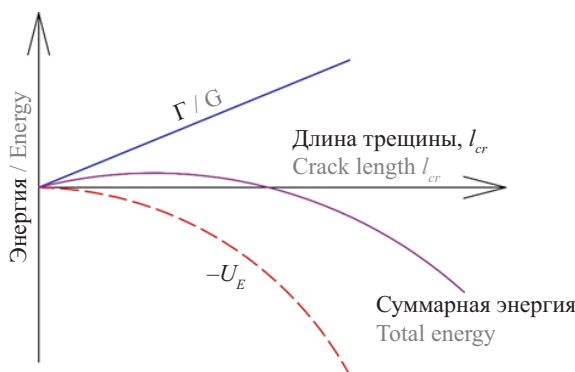


Рис. 1. Баланс энергии при росте трещины

Fig. 1. Energy balance during crack growth

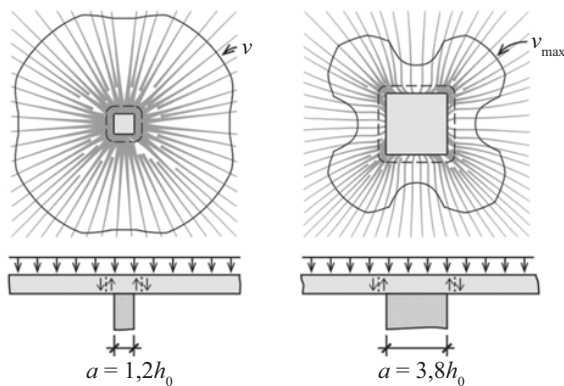


Рис. 2. Распределение касательных напряжений v в области вокруг опоры для колонн разного размера

Fig. 2. Distribution of the shear stresses v around support for different column sizes

бочей высоты, расположенных на расстоянии $h_0/2$ от грани опоры для колонн разного размера. Снижение несущей способности плиты также наблюдается при увеличении соотношения между максимальным и минимальным размером опоры c_{max}/c_{min} .

Этот эффект также объясняет снижение предельных касательных напряжений, воспринимаемых плитой при разрушении за контуром размещения поперечной арматуры [1].

В методиках расчета на продавливание, представленных в нормативных документах, отсутствует учет данных факторов, либо используемая функция некорректно отражает влияние фактора на несущую способность плиты при продавливании. Более точная зависимость может быть получена методом наименьших квадратов с помощью регрессионного анализа на основе результатов лабораторных испытаний. Регрессионный анализ позволяет для выбранного выражения (например, выражений (2)–(5)) найти значения независимых переменных (коэффициенты функций $f_1 \dots f_n$, эмпирические коэффициенты $C_1 \dots C_2$) таким образом, чтобы сумма квадратов разностей зависимой переменной (величина несущей способности плиты F_{calc} , полученная на основе выражений (1)–(5)) и наблюдаемой величин (величина несущей способности плиты F_{exp} , полученная в рамках лабораторных испытаний) была наименьшей.

Ранее подобный анализ применялся в публикациях [5, 10, 13, 14]. Однако исследования [5, 13, 14] были сконцентрированы на плитах без поперечной арматуры, в работе [10] не учитывалась возможность разрушения плит с поперечной арматурой по грани колонны и за контуром размещения поперечной арматуры.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

За многолетний период изучения механизма разрушения плит от продавливания создано множество методик, позволяющих оценить несущую способность плиты в рамках этого типа разруше-

ния. Методики, созданные различными авторами, существенно отличаются друг от друга: учитывают разные параметры, коэффициенты и могут давать разные результаты. Оценка точности результатов, полученных с помощью методики, может быть установлена путем сравнения их с результатами лабораторных испытаний. Ниже приведено сравнение величин предельных продавливающих усилий, полученных в результате лабораторных испытаний F_{exp} , с величинами, вычисленными с помощью методик, представленных в следующих нормативных документах: Eurocode 2¹, СП 63.13330², ACI 318-11³, Model Code 2010⁴ F_{calc} . Для выполнения данной задачи собраны результаты испытаний 544 плит, включающих образцы, моделирующие работу плит перекрытия и фундаментных плит, разрушение которых произошло от продавливания [12–57]. Сравнение выполнялось без учета коэффициентов надежности. В табл. 1 приведены максимальные и минимальные значения параметров испытанных плит.

Для плит с поперечной арматурой учитывалось распределение поперечной арматуры (рис. 3) и ее тип (рис. 4).

Геометрическое представление параметров, используемых в нормативных документах для вычисления несущей способности плиты на продавливание, показано на рис. 5.

Табл. 1. Минимальные и максимальные значения параметров испытанных плит

Table 1. Minimum and maximum parameter values of tested slabs

Все плиты / All slabs		
Параметр Parameter	Минимум Minimum	Максимум Maximum
h_0 , мм / mm	41	670
a_1 , мм / mm	54	520
a_2 , мм / mm	25	901
r_λ	0,60	13,55
B	12	150
d_g , мм / mm	4	38
μ , %	0,2	3,7
μ' , %	0	1,8
R_s , МПа / MPa	255	720

¹ EN 1992-1-1:2004. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings.

² СП 63.13330.2018. СНиП 52-01–2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. М. : Минстрой России, 2018.

³ ACI 318. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-11). American Concrete Institute, ACI Committee 318. Detroit, USA, 2011. 503 p.

⁴ MC, Model Code 2010 (Final Draft), Fédération internationale du béton fib. Lausanne, Switzerland, 2011.

Окончание табл. 1 / End of the Table 1

Плиты с поперечным армированием Slabs with shear reinforcement		
Параметр Parameter	Минимум Minimum	Максимум Maximum
R_{sw} , МПа / MPa	238	917
n_r	2	10
s_0 , мм / mm	20	200
s_1 , мм / mm	40	500
$\varnothing_{sw}$, мм mm	5	25

Примечание: h_0 — рабочая высота плиты; a_1 — размер стороны квадратной колонны; a_2 — диаметр круглой колонны; r_λ — величина относительного пролета среза (расстояние от грани опоры до точки приложения нагрузки, деленное на рабочую высоту); B — класс бетона; d_g — максимальный диаметр крупного заполнителя; μ — процент армирования растянутой зоны; μ' — процент армирования сжатой зоны; R_s — предел текучести продольной арматуры; R_{sw} — предел текучести поперечной арматуры; n_r — количество рядов поперечного армирования; s_0 — расстояние от грани колонны до центра тяжести стержня первого периметра поперечной арматуры; s_1 — шаг поперечной арматуры; $\varnothing_{sw}$ — диаметр поперечной арматуры.

Note: h_0 — effective depth of the slab; a_1 — side dimension of a square column; a_2 — diameter of a round column; r_λ — value of relative shear span (distance from the support face to the point of load application divided by the effective depth); B — concrete grade; d_g — maximum diameter of coarse aggregate; μ — percentage of tensile zone reinforcement; μ' — percentage of compressed zone reinforcement; R_s — yield strength of longitudinal reinforcement; R_{sw} — yield strength of transverse reinforcement; n_r — number of rows of transverse reinforcement; s_0 — distance from the column face to the centre of gravity of the first perimeter transverse reinforcement bar; s_1 — transverse reinforcement spacing; $\varnothing_{sw}$ — diameter of transverse reinforcement.

Результаты сравнения характеризуются с помощью следующих величин:

1. Коэффициент детерминации R^2 является показателем соответствия математической моде-

ли данным лабораторных испытаний. Величина R^2 принимает значения от 0 до 1: чем ближе значение R^2 к 1, тем выше степень соответствия:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (F_{exp,i} - F_{calc,i})^2}{\sum_{i=1}^n (F_{exp,i} - \overline{F_{exp}})^2}, \tag{9}$$

где $\overline{F_{exp}}$ — средняя величина среди опытных результатов.

В рамках работы используется следующая условная шкала оценки значения коэффициента детерминации:

- $R^2 \geq 0,9$ — высокая степень соответствия опытным данным;
- $0,8 \leq R^2 < 0,9$ — хорошая степень соответствия опытным данным;
- $0,7 \leq R^2 < 0,8$ — удовлетворительная степень соответствия опытным данным;
- $R^2 < 0,7$ — низкая степень соответствия опытным данным.

2. Коэффициент вариации (Coefficient of Variation — CV) является показателем стабильности вычислений и характеризует относительную меру отклонения измеренных значений от среднего арифметического. Чем ближе величина CV к нулю, тем стабильнее результаты.

3. Максимальная и минимальные величины F_{calc}/F_{exp} характеризуют наибольшее отклонение в сторону завышения и занижения результатов.

Согласно СП 63.13330 предельная несущая способность плиты на продавливание без поперечной арматуры может быть вычислена с помощью формулы (10). Несущая способность для плит с поперечной арматурой рассчитывается как минимальная величина среди выражений (11–13):

$$F_b = u_{СП63} \cdot h_0 \cdot R_{bt}; \tag{10}$$

$$F_w = F_b + F_{sw} = u_{СП63} \cdot h_0 \cdot R_{bt} + 0,8 \cdot \frac{A_{sw,СП63} \cdot R_{sw}}{s_w} \cdot u_{СП63}, F_{sw} \geq 0,25 \cdot F_b; \tag{11}$$

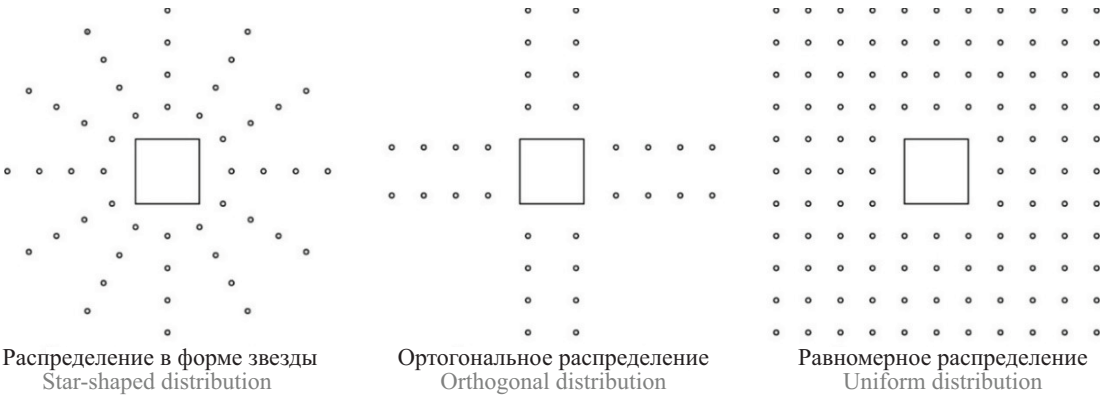


Рис. 3. Виды распределения поперечной арматуры вокруг опоры

Fig. 3. Transverse reinforcement distribution around the support

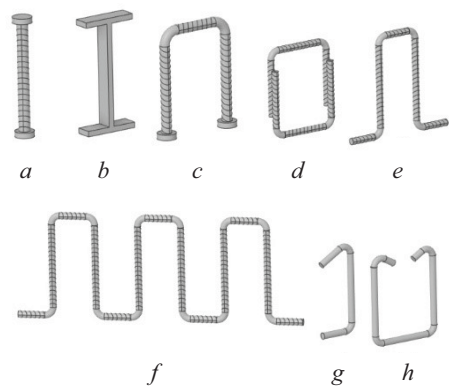


Рис. 4. Типы поперечной арматуры: *a* — поперечная арматура с высаженной головкой; *b* — поперечная арматура, сформированная из обрезков металлоконструкций; *c* — хомуты с высаженными головками; *d–h* — хомуты различной конфигурации

Fig. 4. Types of transverse reinforcement: *a* — transverse reinforcement with double headed studs; *b* — transverse reinforcement formed from metal structure scraps; *c* — stirrups with double headed studs; *d–h* — stirrups of various configurations

$$F_{out} = u_{CP63,out} \cdot h_0 \cdot R_{bt}; \tag{12}$$

$$F_{cr} = 2 \cdot F_b, \tag{13}$$

где F_b — предельное усилие, воспринимаемое бетоном; u_{CP63} — длина контрольного периметра, расположенного на расстоянии $0,5h_0$ от опоры;

R_{bt} — прочность бетона на одноосное растяжение; 0,8 — скалярный множитель, учитывающий неравномерное распределение напряжений в поперечной арматуре; $A_{sw,CP63}$ — площадь поперечной арматуры, расположенной в расчетном сечении; $u_{CP63,out}$ — длина расчетного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от границы размещения поперечной арматуры.

На рис. 6 приведено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью СП 63.13330 F_{calc} . В табл. 2 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

Результаты, полученные с помощью СП 63.13330 для плит без поперечной арматуры, имеют хорошую степень соответствия опытным данным для плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1\%$, а также для плит с $r_\lambda > 4$ и $\mu \geq 1\%$. Для плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu \geq 1\%$ наблюдается удовлетворительное соответствие опытным данным, для плит с $r_\lambda > 4$ и $\mu < 1\%$ — низкая степень соответствия, что связано с отсутствием учета влияния процента продольного армирования и учета масштабного энергетического эффекта [10, 57]. Для $r_\lambda \leq 4$ влияние масштабного эффекта компенсируется за счет отсутствия учета величины относительного пролета среза, увеличивающей несущую способность плиты. Для плит с поперечной арматурой наблюдается хорошая степень соответствия опытным данным.

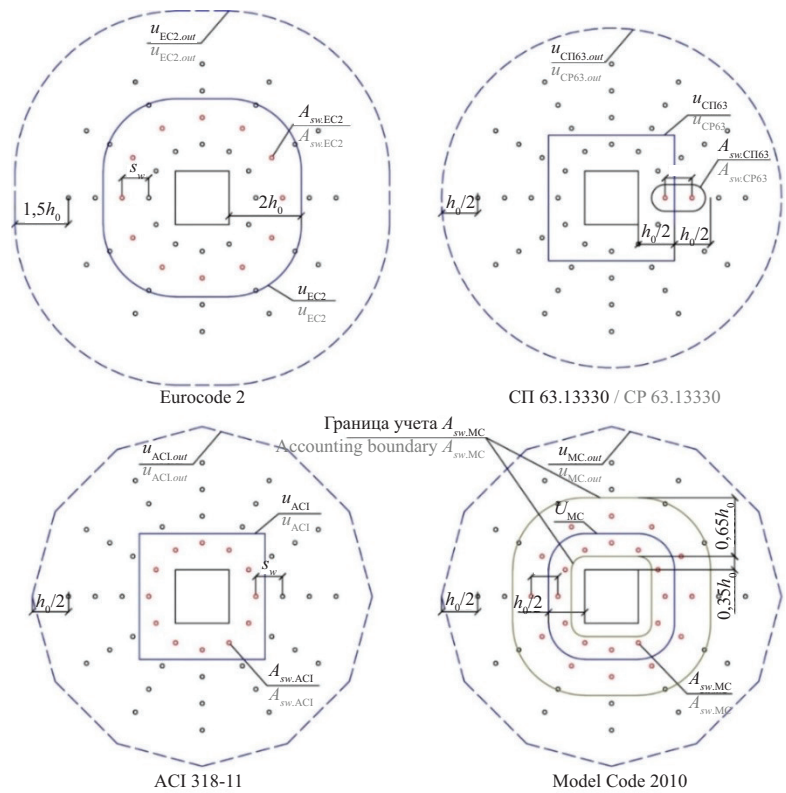


Рис. 5. Геометрическое представление параметров, используемых в нормативных документах для вычисления несущей способности плиты на продавливание

Fig. 5. Geometric representation of the parameters used in building codes to calculate punching shear capacity of the slab

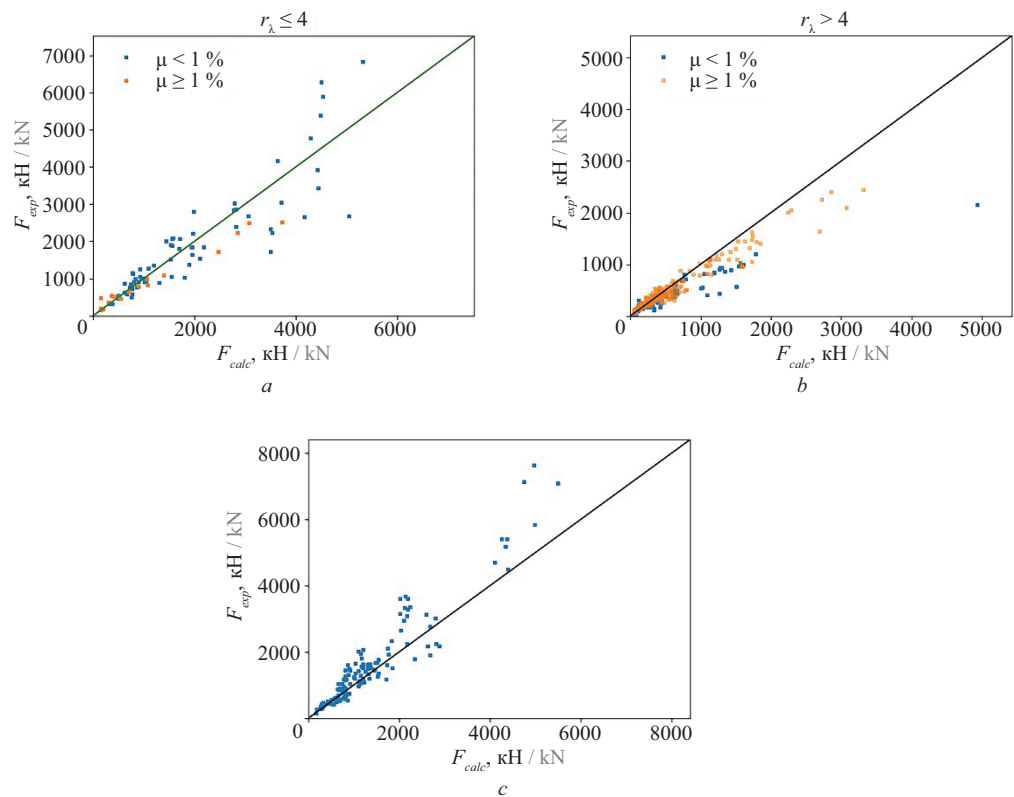


Рис. 6. Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью СП 63.13330 F_{calc} : *a* — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_k \leq 4$; *b* — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_k > 4$; *c* — плиты с поперечной арматурой

Fig. 6. Comparison of the punching shear capacity obtained in laboratory tests F_{exp} and CP 63.13330 F_{calc} : *a* — slabs without shear reinforcement with $r_k \leq 4$; *b* — slabs without shear reinforcement with $r_k > 4$; *c* — slabs with shear reinforcement

Предельное продавливающее усилие для плит без поперечной арматуры согласно Eurocode 2 может быть вычислено на основании формул (14) и (15). Предельное продавливающее усилие для плит с поперечной арматурой можно рассчитать как минимальную величину среди выражений (16), (18) и (19). Эффективные напряжения в поперечной арматуре $f_{yw,sw}$ вычисляются на основании выражения (17):

$$F_b = 0,18 \cdot k \cdot \mu^{1/3} \cdot u_{EC2} \cdot h_0 \cdot f_c^{1/3} \geq v_{min} \cdot u_{EC2} \cdot h =$$
$$= 0,035 \cdot k^{3/2} \cdot f_c^{1/2} \cdot u_{EC2} \cdot h;$$

(14)

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{h_0 [\text{мм}]} } \leq 2;$$

(15)

$$F_w = 0,75 \cdot F_b + F_{sw} = 0,75 \cdot F_b +$$
$$+ 1,5 \cdot A_{sw,EC2} \cdot f_{sw,ef} \cdot \frac{1}{s_w \cdot u_{EC2}}, F_{sw} \leq 1,5 \cdot F_b;$$

(16)

$$f_{yw,ef} = 250 + 0,25 \cdot h_0 [\text{мм}] \leq R_{swL} [\text{МПа}];$$

(17)

$$F_{out} = 0,18 \cdot k \cdot (100 \cdot \mu)^{1/3} \cdot u_{EC2,out} \cdot h_0 \cdot f_c^{1/3};$$

(18)

Табл. 2. Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью СП 63.13330

Table 2. Evaluation indicators of F_{exp} and F_{calc} comparison results calculated with CP 63.13330

Плиты без поперечной арматуры Slabs without shear reinforcement					Плиты с поперечной арматурой Slabs with shear reinforcement
Показатель Indicator	$r_{\lambda} \leq 4$		$r_{\lambda} > 4$		
	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	
CV	0,24	0,51	0,37	0,26	
R^2	0,80	0,70	−0,21	0,81	0,81
Минимум F_{exp}/F_{calc} Minimum	0,49	0,68	0,34	0,48	0,62
Максимум F_{exp}/F_{calc} Maximum	1,51	3,19	2,50	2,21	1,86

$$F_{cr} = 0,24 \cdot \left(1 - \frac{f_c \text{ [МПа]}}{250}\right) \cdot f_c \cdot u_{EC2,0} \cdot h_0, \quad (19)$$

где k — функция, учитывающая влияние энергетического масштабного эффекта; μ — процент продольного армирования растянутой зоны (принимаемый не более 2 %); u_{EC2} — контрольный периметр, расположенный на расстоянии $2h_0$ от грани опоры; f_c — цилиндрическая прочность бетона на одноосное сжатие; ν_{min} — минимальная величина номинальных касательных напряжений, воспринимаемых расчетным кон-

туром, позволяющая установить нижнюю границу величины F_b для случаев с низкими процентами продольного армирования; $A_{sw,EC2}$ — площадь поперечной арматуры одного периметра армирования вокруг колонны; $f_{sw,ef}$ — эффективные напряжения в арматуре; R_{sw} — предел текучести арматуры; s_w — шаг поперечной арматуры; $u_{EC2,0}$ — периметр опоры.

На рис. 7 приведено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью Eurocode 2 F_{calc} . В табл. 3 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

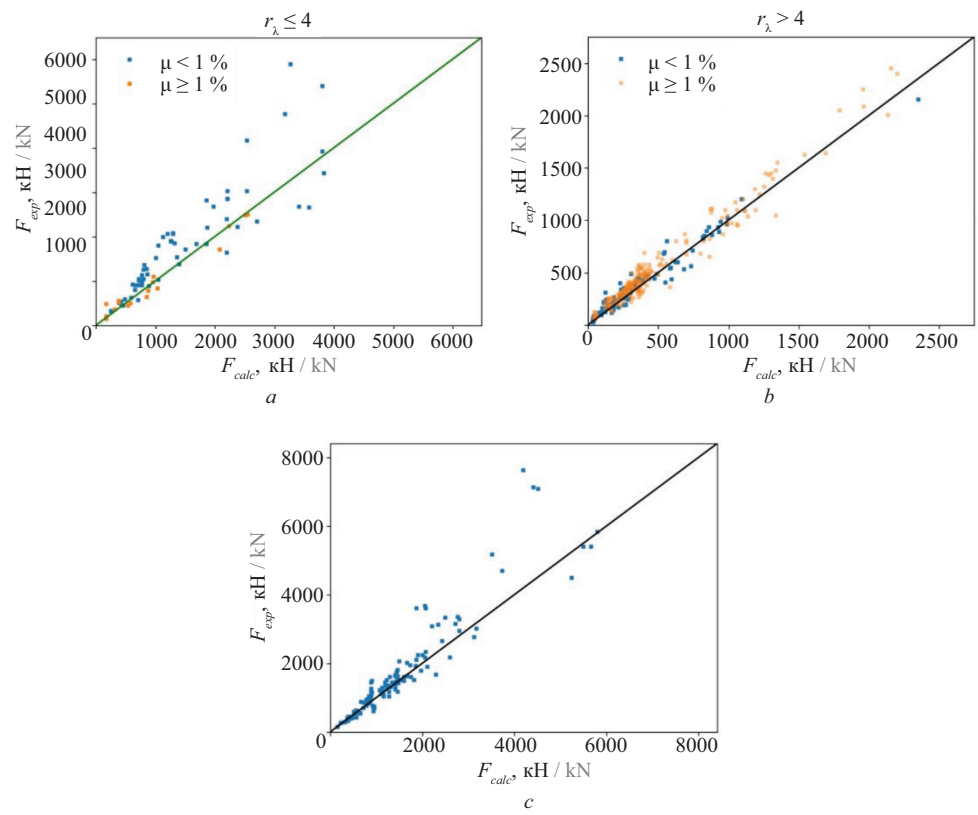


Рис. 7. Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью Eurocode 2 F_{calc} : а — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_k \leq 4$; б — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_k > 4$; в — плиты с поперечной арматурой

Fig. 7. Comparison of the punching shear capacity obtained in laboratory tests F_{exp} and Eurocode 2 F_{calc} : а — slabs without shear reinforcement with $r_k \leq 4$; б — slabs without shear reinforcement with $r_k > 4$; в — slabs with shear reinforcement

Табл. 3. Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью Eurocode 2

Table 3. Evaluation indicators of F_{exp} and F_{calc} comparison results calculated with Eurocode 2					
Плиты без поперечной арматуры Slabs without shear reinforcement					Плиты с поперечной арматурой Slabs with shear reinforcement
Показатель Indicator	$r_k \leq 4$		$r_k > 4$		
	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	
CV	0,22	0,42	0,27	0,23	0,20
R^2	0,65	0,95	0,95	0,95	0,83
Минимум F_{exp}/F_{calc} Minimum	0,74	0,75	0,70	0,63	0,65
Максимум F_{exp}/F_{calc} Maximum	1,95	2,91	2,58	2,70	1,94

Результаты, полученные с помощью Eurocode 2 для плит без поперечной арматуры, показывают высокую степень соответствия опытных данных кроме плит с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1\%$, где наблюдается низкая степень. Согласно исследованию [10] функция k некорректно отражает зависимость влияния масштабного эффекта на вклад бетона F_b , что может приводить к завышению реальной несущей способности для плит с большой рабочей высотой. Для плит с поперечной арматурой наблюдается хорошее соответствие опытным данным.

Согласно ACI 318-11 предельное продавливающее усилие для плит без поперечной арматуры может быть вычислено с помощью формулы (20). Предельное продавливающее усилие для плит с поперечной арматурой вычисляется как минимальная величина среди выражений (21)–(23), представляющих различные механизмы разрушения плиты:

$$F_b = \frac{1}{3} \cdot u_{ACI} \cdot h_0 \cdot \sqrt{f_c}; \quad (20)$$

$$F_w = C_1 \cdot u_{ACI} \cdot h_0 \cdot \sqrt{f_c} + A_{sw,ACI} \cdot R_{sw} \cdot \frac{h_0}{s_w}; \quad (21)$$

$$F_{out} = \frac{1}{6} \cdot u_{ACI,out} \cdot h_0 \cdot \sqrt{f_c}; \quad (22)$$

$$F_{cr} = C_2 \cdot u_{ACI} \cdot h_0 \cdot \sqrt{f_c}, \quad (23)$$

где C_1 — эмпирическая константа, зависящая от типа поперечного армирования и принимаемая равной 1/6 для типов a – c и 1/4 для типов d – h согласно рис. 5; $A_{sw,ACI}$ — площадь поперечной арматуры одного периметра армирования вокруг колонны; R_{sw} — предел текучести арматуры; s_w — шаг поперечной арматуры; $u_{ACI,out}$ — длина расчетного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от границы размещения поперечной арматуры; C_2 — эмпирическая константа, зависящая от типа поперечного армирования и принимаемая равной 1/2 для типов a – c и 2/3 для типов d – h согласно рис. 5.

На рис. 8 приведено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью ACI 318-11 F_{calc} . В табл. 4 представлены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

Результаты, полученные с помощью ACI 318-11 для плит без поперечной арматуры, имеют низкую степень соответствия опытным данным для плит

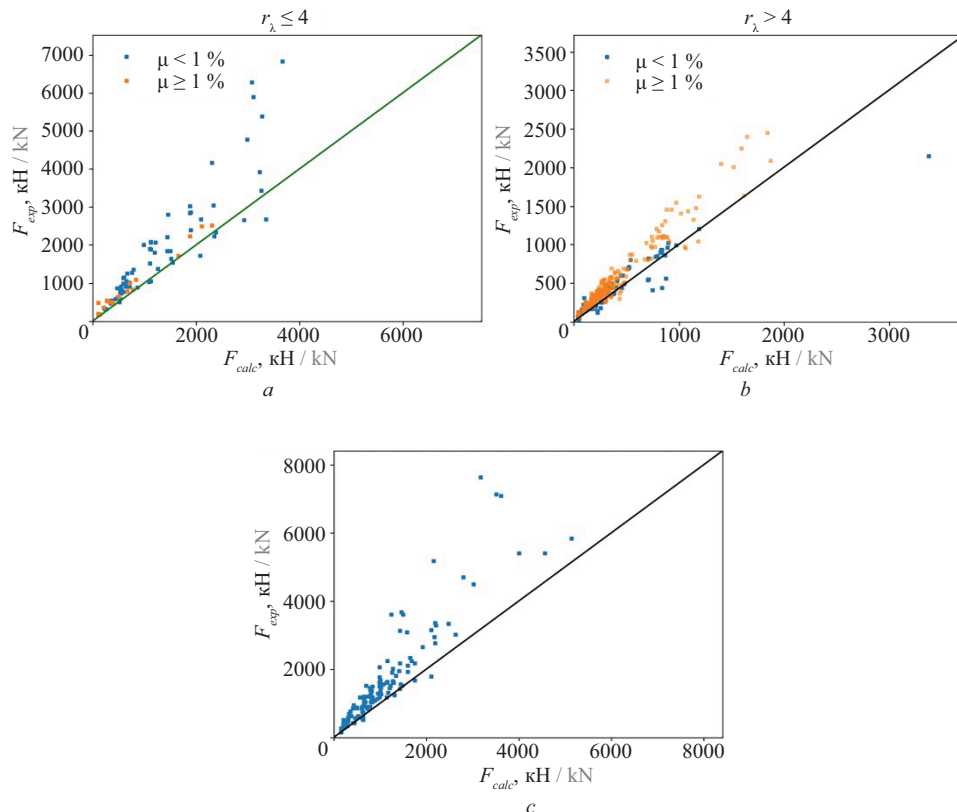


Рис. 8. Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью ACI 318-11 F_{calc} : a — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; b — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; c — плиты с поперечной арматурой

Fig. 8. Comparison of the punching shear capacity obtained in laboratory tests F_{exp} and ACI 318-11 F_{calc} : a — slabs without shear reinforcement with $r_\lambda \leq 4$; b — slabs without shear reinforcement with $r_\lambda > 4$; c — slabs with shear reinforcement

Табл. 4. Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью ACI 318-11

Table 4. Evaluation indicators of F_{exp} and F_{calc} results comparison calculated with ACI 318-11

Плиты без поперечной арматуры Slabs without shear reinforcement					Плиты с поперечной арматурой Slabs with shear reinforcement
Показатель Indicator	$r_{\lambda} \leq 4$		$r_{\lambda} > 4$		
	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	
CV	0,22	0,53	0,30	0,23	
R^2	0,60	0,92	0,76	0,81	0,58
Минимум F_{exp}/F_{calc} Minimum	0,80	1,04	0,51	0,70	0,84
Максимум F_{exp}/F_{calc} Maximum	2,03	4,81	3,22	3,15	2,93

с $r_{\lambda} \leq 4$ и $\mu < 1 \%$ и удовлетворительную степень для плит с $r_{\lambda} > 4$ и $\mu < 1 \%$, что связано с отсутствием учета процента продольного армирования. Для плит с $\mu \geq 1 \%$ и $r_{\lambda} \leq 4$ наблюдается высокая степень соответствия опытным данным, для плит с $\mu \geq 1 \%$ и $r_{\lambda} > 4$ — хорошая степень соответствия. В формуле (20) отсутствует учет масштабного энергетического эффекта, что может приводить к завышению реальной несущей способности плит с рабочей высотой более 400 мм и $r_{\lambda} > 4$ [10]. Также в формуле (20) отсутствует учет масштабного энергетического эффекта, что может приводить к занижению реальной несущей способности плит с величинами $r_{\lambda} \leq 4$. Для плит с поперечной арматурой отмечается низкое соответствие опытным данным с тенденцией к занижению реальной несущей способности плит. Наличие этой тенденции можно объяснить некорректными (слишком низкими) величинами коэффициентов C_1 , C_2 , а также эмпирического коэффициента $1/6$, вводимого к усилию, воспринимаемого бетоном за гранью установки поперечной арматуры. Например, использование коэффициента $1/4$ вместо $1/6$ позволяет получить $R^2 = 0,74$ вместо $R^2 = 0,58$.

Согласно Model Code 2010 предельное продавливающее усилие для плит без поперечной арматуры может быть вычислено на основании формул (24)–(27). Документ предполагает четыре уровня уточнения результатов, влияющих на содержание формулы (26):

- 1) уровень I используется для предварительных расчетов, позволяющих назначить размеры конструкции;
- 2) уровень II рекомендуется для проектирования новых конструкций;
- 3) применение уровня III рекомендуется для проверки несущей способности существующих конструкций;
- 4) уровень IV используется для более детального изучения существующих конструкций и нестандартных проектных решений.

Применение формул более высоких уровней дает возможность получить более точный результат, но сопряжено с существенным усложнением расчета (уровень IV требует использования результатов

физически нелинейного расчета). В рамках данной работы используются формулы уровня II:

$$F_b = k_{\psi} \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC} \cdot h_0; \tag{24}$$

$$k_{\psi} = \frac{1}{1,5 + 0,9 \cdot \psi \cdot h_0 \cdot k_{dg}} \leq 0,6; \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \psi &= 1,5 \cdot \frac{r}{h_0} \cdot \frac{R_s}{E_s} \cdot \left(\frac{m_s}{m_R} \right)^{3/2} = \\ &= 1,5 \cdot \frac{r}{h_0} \cdot \frac{R_s}{E_s} \cdot \left(\frac{F}{8 \cdot m_R} \right)^{3/2}; \end{aligned} \tag{26}$$

$$k_{dg} = \frac{32}{16 + d_g [\text{мм}]} \geq 0,75, \tag{27}$$

где k_{ψ} — функция, учитывающая снижение несущей способности плиты из-за раскрытия изгибных трещин; ψ — угол поворота плиты в результате раскрытия изгибных трещин возле опоры; k_{dg} — функция, учитывающая шероховатость трещины; r — расстояние от центра опоры до линии изменения знака радиального изгибающего момента (может быть принят равным $\approx 0,22$ пролета плиты); R_s , E_s — предел текучести и модуль упругости продольной арматуры соответственно; m_s — изгибающий момент, действующий в плите (может быть принят равным $F/8$, где F — продавливающее усилие); m_R — предельный изгибающий момент, при котором происходит разрушение плиты от изгиба; d_g — максимальный диаметр крупного заполнителя.

Поскольку изгибающий момент m_s , требуемый для вычисления угла поворота ψ , связан с величиной продавливающего усилия F , предельное продавливающее усилие F_b может быть найдено путем совместного решения уравнений (24) и (26) с подстановкой F_b вместо F . Графическое представление решения изображено на рис. 9.

Предельное продавливающее усилие для плит с поперечной арматурой может быть вычислено с помощью стратегии решения, используемой для получения величины F_b как минимальная величина среди выражений (28), (30) и (31). Напряжения

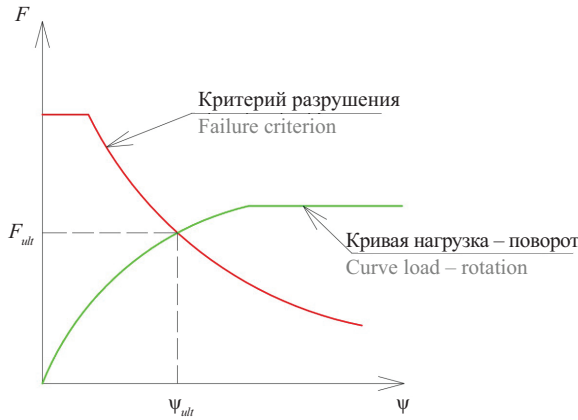


Рис. 9. Графическая интерпретация решения согласно Model Code 2010

Fig. 9. Graphical interpretation of the solution according to Model Code 2010

в поперечной арматуре $f_{yw,sw}$ вычисляются на основании выражения (29):

$$F_w = F_b + F_{sw} = k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC} \cdot h_0 + \sum A_{sw,MC} \cdot \sigma_{sw}, \sum A_{sw,MC} \cdot R_{sw} \geq 0,5 \cdot F_b; \quad (28)$$

$$\sigma_{sw} = \frac{E_{sw} \cdot \psi}{6} \cdot \left(1 + \frac{f_{bd}}{R_{sw}} \cdot \frac{h_0}{\phi} \right) \leq R_{sw}; \quad (29)$$

$$F_{out} = k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC,out} \cdot h_0; \quad (30)$$

$$F_{cr} = k_{sys} \cdot k_\psi \cdot \sqrt{f_c} \cdot u_{MC} \cdot h_0, \quad (31)$$

где $A_{sw,MC}$ — площадь всей поперечной арматуры, расположенной в границах $0,35h_0 \dots h_0$ вокруг опоры; E_{sw} — модуль упругости поперечной арматуры; f_{bd} — прочность связи бетона и арматуры (для арматуры периодического профиля может быть принята равной 3 МПа); ϕ — диаметр поперечной арматуры; $u_{MC,out}$ — длина расчетного периметра, расположенного на расстоянии $h_0/2$ от границы размещения поперечной арматуры; k_{sys} — эмпирический коэффициент, принимаемый на основе опытных данных в зависимости от типа поперечной арматуры (согласно работе [1] величину коэффициента можно принять равной 2,4 для типов поперечной арматуры a – c и 2,8 для типов d – h согласно рис. 4).

На рис. 10 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью

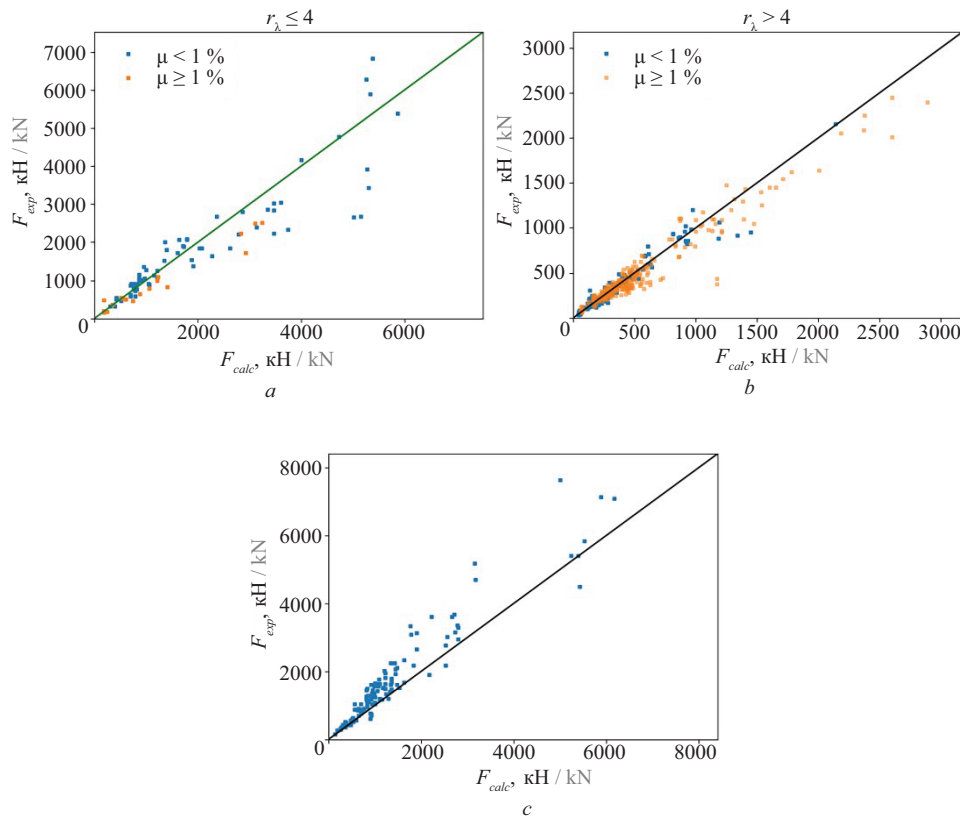


Рис. 10. Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью Model Code 2010 F_{calc} : a — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; b — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; c — плиты с поперечной арматурой

Fig. 10. Comparison of the punching shear capacity obtained in laboratory tests F_{exp} and Model Code 2010 F_{calc} : a — slabs without shear reinforcement with $r_\lambda \leq 4$; b — slabs without shear reinforcement with $r_\lambda > 4$; c — slabs with shear reinforcement

Табл. 5. Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью Model Code 2010
Table 5. Evaluation indicators of F_{exp} and F_{calc} results comparison calculated with Model Code 2010

Плиты без поперечной арматуры Slabs without shear reinforcement					Плиты с поперечной арматурой Slabs with shear reinforcement
Показатель Indicator	$r_{\lambda} \leq 4$		$r_{\lambda} > 4$		
	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	
CV	0,22	0,49	0,22	0,20	0,19
R^2	0,79	0,67	0,96	0,94	0,85
Минимум F_{exp}/F_{calc} Minimum	0,52	0,59	0,60	0,58	0,67
Максимум F_{exp}/F_{calc} Maximum	1,48	2,67	2,27	1,91	1,91

Model Code 2010 F_{calc} . В табл. 5 приведены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

Для плит без поперечной арматуры с $r_{\lambda} \leq 4$ и $\mu \geq 1 \%$ наблюдается низкое соответствие опытными данным, для плит с $r_{\lambda} \leq 4$ и $\mu < 1 \%$ — удовлетворительная степень соответствия опытными данным. Для плит с $r_{\lambda} > 4$ отмечается высокая степень соответствия опытными данным. Масштабный энергетический эффект в функции (24) учитывается с помощью использования в функции k_{ψ} произведения $k_{dg} \cdot h_0$ в знаменателе. Согласно работе [10] подобный подход к учету масштабного эффекта некорректен и приводит к занижению реальной несущей способности плит с большой рабочей высотой. Для плит с поперечной арматурой наблюдается хорошее соответствие опытными данным с тенденцией к занижению реальной несущей способности плит.

Таким образом, актуальной является задача разработки методики расчета на продавливание, отражающей основные эффекты, оказывающие влияние на несущую способность плиты. Методика может быть изложена в виде набора функций, представляющих собой разные механизмы разрушения плиты. Используя в качестве основы выражения (1)–(5), общий вид функций может быть показан в виде выражений (32)–(35):

$$F_b = x_1 \cdot R_{bt} \cdot u_{СП63} \cdot h_0 \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{x_2}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{x_3} \cdot r_{\lambda}^{x_4} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{x_5}; \quad (32)$$

$$F_w = x_6 \cdot F_b + x_7 \cdot A_{sw} \cdot R_{sw} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{x_5}; \quad (33)$$

$$F_{out} = x_8 \cdot R_{bt} \cdot u_{СП63,out} \cdot h_0 \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{x_2}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{x_3} \cdot r_{\lambda}^{x_4} \cdot \left(\frac{a_{out}}{h_0} \right)^{x_5}; \quad (34)$$

$$F_{cr} = x_9 \cdot F_b, \quad (35)$$

где $x_1 \dots x_9$ — коэффициенты функций; a — параметр, принимаемый равным $2 \cdot \pi \cdot d$ для круглых опор (d — диаметр опоры) и $4 \cdot a_{\max} \leq 16 \cdot a_{\min}$ для остальных видов опор ($a_{\max}$ и $a_{\min}$ — размеры наиболее длинной и короткой сторон опоры в плане соответственно); A_{sw} — площадь всей поперечной арматуры, расположенной в границах $1/3 h_0 \dots h_0$ вокруг опоры; a_{out} — параметр, принимаемый аналогично параметру a , но для контура установки поперечной арматуры с учетом его сторон и формы. Вид функции, описывающей влияние масштабного энергетического эффекта, был выбран на основе работ [10, 11].

Задача сводится к поиску величин коэффициентов функций. Искомые коэффициенты могут быть найдены с помощью взвешенной регрессии нескольких переменных с помощью итерационного алгоритма Левенберга – Марквардта [58–60]. Алгоритм Левенберга – Марквардта позволяет найти коэффициенты функции, дающие наименьшую сумму квадратов разностей наблюдаемой F_{exp} и предсказанной F_{calc} величин $F(x)$:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i^2(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (F_{calc,i}(x) - F_{exp,i})^2 \rightarrow \min. \quad (36)$$

В рамках взвешенной регрессии при сохранении формы регрессионного уравнения вводится неравноценное отношение к ошибкам уравнения. Для этого точкам данных присваиваются веса в зависимости от их дисперсии. Взвешенная регрессия

```

1      begin
2      initialize initial values:  $x = x_0, \lambda = \max\{a_{ij}\} \cdot 10^{-3}, v = 2, k = 0, F(x), L(x)$ 
3      calculate:  $f(x), J(x), A = J(x)^T \cdot J(x), g(x) = J(x)^T \cdot f(x), \text{found} = (\|g(x)\|_\infty \leq \varepsilon_1)$ 
4      while (not found), and ( $k < k_{\max}$ )
5           $k = k + 1$ , solve  $(A + \lambda \cdot I) \cdot h_{lm} = -g(x) \rightarrow h_{lm}$ 
6          if  $\|h_{lm}\| \leq \varepsilon_2 \cdot (\|x\| + \varepsilon_2)$ :
7              found = true
8          else:
9               $x_{\text{new}} = x + h_{lm}$ 
10              $l(x_{\text{new}}) = f(x) + J(x) \cdot h_{lm}$ 
11              $L(x_{\text{new}}) = 0.5 \cdot l(x_{\text{new}}) \cdot l(x_{\text{new}})$ 
12              $\rho = (F(x) - F(x_{\text{new}})) / (L(0) - L(x_{\text{new}}))$ 
13             if  $\rho > 0$ :
14                  $x = x_{\text{new}}$ 
15                  $A = J(x)^T \cdot J(x), g(x) = J(x)^T \cdot f(x)$ 
16                 found =  $(\|g(x)\|_\infty \leq \varepsilon_1)$ 
17                  $\lambda = 1/3 \cdot \lambda, v = 2$ 
18             else:
19                  $\lambda = \lambda \cdot v, v = v \cdot 2$ 
20      end

```

Рис. 11. Алгоритм Левенберга — Марквардта, представленный в виде псевдокода

Fig. 11. Levenberg – Marquardt algorithm represented as a pseudocode

дает возможность снизить влияние ошибки с большей дисперсией на результат. Алгоритм Левенберга — Марквардта в виде псевдокода представлен на рис. 11, где x, x_0 — текущие и начальные значения искомых параметров $x_1, x_2 \dots x_n$; $f(x)$ — минимизируемая величина ошибки $F_{\text{calc}}(x) - F_{\text{exp}}$; $J(x)$ — матрица Якоби вектора-функции $f(x)$; λ — параметр регуляризации; v — коэффициент линейности шага; h_{lm} — величина изменения параметров x ; ε — критерии сходимости алгоритма; a_{ij} — элементы матрицы A . Множитель $1/3$ (строка 17 рис. 11) к параметру λ выбирался на основании данных работы [10]. Алгоритм считается сошедшимся при удовлетворении условия $\|g(x)\|_\infty \leq \varepsilon_1$ (строка 16 рис. 11) или условия $\|h_{lm}\| \leq \varepsilon_2 \cdot (\|x\| + \varepsilon_2)$ (строка 6 рис. 11).

Регрессионный анализ выполняется в два этапа: на первом этапе, используя результаты испытаний плит без поперечной арматуры, осуществляется поиск коэффициентов $x_1 \dots x_5$ для функции (32), описывающей продавливающее усилие F_b , воспринимаемое бетоном. На втором этапе проводится подбор коэффициентов для функций (33)–(35), представляющих собой несущую способность плит с поперечным армированием в рамках разных механизмов разрушения. Коэффициенты x_6 и x_7 в формуле (33) подбираются на основании результатов плит, разрушение которых произошло по контуру установки поперечной арматуры. Поиск коэффициента x_8 выполняется для плит, разрушение которых произошло за гранью контура установки поперечной арматуры; при поиске коэффициентов учитывается форма контура согласно рис. 3. Подбор коэффициента x_9 , используемого в формуле (35), осуществлялся с учетом типа поперечной арматуры (отдельно выполнялся подбор коэффициент для типов a – c и d – h согласно рис. 4) на основании испы-

таний плит, чье разрушение произошло за контуром установки поперечной арматуры.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В результате выполнения регрессионного анализа с учетом округления коэффициентов получены выражения (37)–(40):

$$F_b = 1,15 \cdot R_{bt} \cdot u_{\text{СП63}} \cdot h_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{d_0}}} \times \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{1/3} \cdot r_\lambda^{-1/4} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{-1/5}, \quad (37)$$

$$\mu = \sqrt{\mu_x \cdot \mu_y};$$

$$F_w = F_b + F_{sw} = F_b + 0,8 \cdot A_{sw} \cdot R_{sw}, F_{sw} \cdot \left(\frac{a}{h_0} \right)^{-1/5} \geq 0,25 \cdot F_b; \quad (38)$$

$$F_{out} = 1,15 \cdot R_{bt} \cdot u_{\text{СП63,out}} \cdot h_0 \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{h_0}{d_0}}} \cdot \left(\frac{\mu \cdot R_s}{R_b} \right)^{1/3} \cdot r_\lambda^{-1/4} \cdot \left(\frac{a_{out}}{h_0} \right)^{-1/5}, \quad (39)$$

$$r_\lambda \geq 0,25;$$

$$F_{cr} = C \cdot F_b, \quad (40)$$

где μ_x, μ_y — коэффициенты продольного армирования плиты в разных направлениях; $d_0 = 0,1$ м — переходный размер; C — эмпирический коэффициент, зависимый от типа поперечного армирования и при-

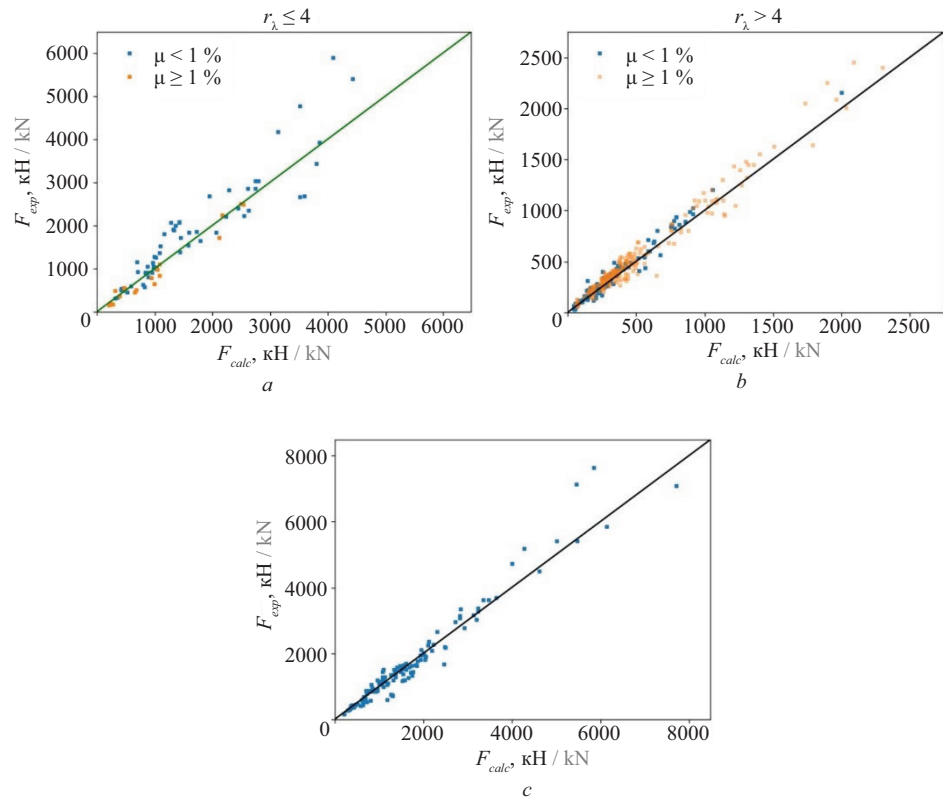


Рис. 12. Сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью регрессионного анализа F_{calc} : a — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda \leq 4$; b — плиты без поперечной арматуры с величиной $r_\lambda > 4$; c — плиты с поперечной арматурой

Fig. 12. Comparison of the punching shear capacity obtained in laboratory tests F_{exp} and regression analysis model F_{calc} : a — slabs without shear reinforcement with $r_\lambda \leq 4$; b — slabs without shear reinforcement with $r_\lambda > 4$; c — slabs with shear reinforcement

Табл. 6. Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью выражений (37)–(40)

Table 6. Evaluation indicators of F_{exp} and F_{calc} results comparison calculated with expressions (37)–(40)

Плиты без поперечной арматуры Slabs without shear reinforcement					Плиты с поперечной арматурой Slabs with shear reinforcement
Показатель Indicator	$r_{\lambda} \leq 4$		$r_{\lambda} > 4$		
	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	$\mu < 1 \%$	$\mu \geq 1 \%$	
CV	0,2	0,24	0,20	0,16	
R^2	0,84	0,95	0,97	0,97	0,96
Минимум F_{exp}/F_{calc} Minimum	0,68	0,61	0,58	0,55	0,55
Максимум F_{exp}/F_{calc} Maximum	1,60	1,48	2,12	1,82	1,52

нимаемый равным 2 для типов a – c и 1,5 для типов d – h согласно рис. 4. Условие $F_{sw} \geq 0,25 \cdot F_b$ добавлено для обеспечения деформаций, позволяющих выполнить включение поперечной арматуры в работу плиты. Ограничение $r_\lambda \geq 0,25$ добавлено для предотвращения завышения несущей способности плиты.

На рис. 12 представлено сравнение величин предельного продавливающего усилия, полученного в рамках лабораторных испытаний F_{exp} и с помощью выражений (37)–(40) F_{calc} . В табл. 6 приведены показатели оценки сравнения величин F_{exp} и F_{calc} .

Для плит без поперечной арматуры с $r_\lambda \leq 4$ и $\mu < 1\%$ наблюдается хорошее соответствие опытным данным, в остальных случаях отмечается высокое соответствие опытными данным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основании результатов, полученных различными исследователями, были выделены основные факторы, оказывающие влияние на несущую способность плит при продавливании. Используя эти факторы, сформирована упрощенная методика, по-

Табл. 7. Показатели оценки результатов сравнения F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью разных подходов

Table 7. Evaluation indicators of F_{exp} and F_{calc} results comparison calculated with different approaches

Документ Document	Параметры плиты Parameters of the slab		Показатели оценки результатов Outcome evaluation indicators			
			CV	R^2	Минимум F_{exp}/F_{calc} Minimum	Максимум F_{exp}/F_{calc} Maximum
СП 63.13330 CP 63.13330	$r_{\lambda} \leq 4$	$\mu < 1 \%$	0,24	0,80	0,49	1,51
		$\mu \geq 1 \%$	0,51	0,70	0,68	3,19
	$r_{\lambda} > 4$	$\mu < 1 \%$	0,37	–0,21	0,34	2,50
		$\mu \geq 1 \%$	0,26	0,81	0,48	2,21
	Плиты с поперечным армированием / Slabs with shear reinforcement		0,37	0,81	0,62	1,86
Eurocode 2	$r_{\lambda} \leq 4$	$\mu < 1 \%$	0,22	0,65	0,74	1,95
		$\mu \geq 1 \%$	0,42	0,95	0,75	2,91
	$r_{\lambda} > 4$	$\mu < 1 \%$	0,27	0,95	0,70	2,58
		$\mu \geq 1 \%$	0,23	0,95	0,63	2,70
	Плиты с поперечным армированием / Slabs with shear reinforcement		0,20	0,83	0,65	1,94
ACI 318-11	$r_{\lambda} \leq 4$	$\mu < 1 \%$	0,22	0,60	0,80	2,03
		$\mu \geq 1 \%$	0,53	0,92	1,04	4,81
	$r_{\lambda} > 4$	$\mu < 1 \%$	0,30	0,76	0,51	3,22
		$\mu \geq 1 \%$	0,23	0,81	0,70	3,15
	Плиты с поперечным армированием / Slabs with shear reinforcement		0,27	0,58	0,84	2,93
Model Code 2010	$r_{\lambda} \leq 4$	$\mu < 1 \%$	0,22	0,79	0,52	1,48
		$\mu \geq 1 \%$	0,49	0,67	0,59	2,67
	$r_{\lambda} > 4$	$\mu < 1 \%$	0,22	0,96	0,60	2,27
		$\mu \geq 1 \%$	0,20	0,94	0,58	1,91
	Плиты с поперечным армированием / Slabs with shear reinforcement		0,19	0,85	0,67	1,91
Представленная методика The presented method	$r_{\lambda} \leq 4$	$\mu < 1 \%$	0,20	0,84	0,68	1,60
		$\mu \geq 1 \%$	0,24	0,95	0,61	1,48
	$r_{\lambda} > 4$	$\mu < 1 \%$	0,20	0,97	0,58	2,12
		$\mu \geq 1 \%$	0,16	0,97	0,55	1,82
	Плиты с поперечным армированием / Slabs with shear reinforcement		0,18	0,96	0,55	1,52

звляющая оценить несущую способность при продавливании. Методика — это набор из четырех выражений, представляющих собой разные механизмы разрушения плиты. С помощью нелинейной регрессии нескольких переменных методом наименьших квадратов с использованием алгоритма Левенберга – Марквардта получены коэффициенты выражений. Коэффициенты подбирались таким образом, чтобы сумма квадратов разностей между величиной несущей способности плиты, полученной в рамках опыта F_{exp} , и несущей способности, полученной с помощью выражений методики F_{calc} , была наименьшей. Данные коэффициенты отражают корреляцию между величиной несущей способности плиты и соответствующими

факторами. В табл. 7 приведено сравнение показателей оценки сопоставления величин F_{exp} и F_{calc} , вычисленной с помощью разных подходов. Жирным шрифтом выделены лучшие показатели среди подходов.

Таким образом, в рамках сравнения с результатами опытных данных представленная методика обладает наименьшим коэффициентом вариации CV , величиной коэффициента детерминации R^2 , наиболее близкой к 1, и величиной максимального отклонения F_{exp}/F_{calc} , наиболее близкой к 1.

В качестве дальнейшего развития методика может быть усовершенствована для учета сосредоточенного изгибающего момента, действующего на опоре, а также преднапряжения плиты.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Lips S.* Punching of Flat Slabs with Large Amounts of Shear Reinforcement : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2012.
2. *Beutel R., Hegger J.* The effect of anchorage on the effectiveness of the shear reinforcement in the punching zone // *Cement and Concrete Composites*. 2002. Vol. 24. Issue 6. Pp. 539–549. DOI: 10.1016/S0958-9465(01)00070-1
3. *Kueres D.* Two-parameter kinematic theory for punching shear in reinforced concrete slabs : Ph.D. Thesis. Aachen, 2018.
4. *Simones J.T., Ruiz M.F., Muttoni A.* Validation of the Critical Shear Crack Theory for punching of slabs without transverse reinforcement by means of a refined mechanical model // *Structural Concrete*. 2018. Vol. 19. Issue 1. Pp. 191–216. DOI: 10.1002/suco.201700280
5. *Staller M.* Analytische und numerische Untersuchungen des Durchstanztragverhaltens punktgestützter Stahlbetonplatten : Ph.D. Thesis. Munich, 2000.
6. *Lovorovich J.S., McLean D.I.* Punching Shear Behavior of Slabs With Varying Span-Depth Ratios // *ACI Structural Journal*. 1990. Vol. 87. Issue 5. Pp. 507–512. DOI: 10.14359/2616
7. *Simones J.T.* The mechanics of punching in reinforced concrete slabs and footings without shear reinforcement : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2018.
8. *Einpaul J.* Punching strength of continuous flat slabs : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2016.
9. *Bažant P.Z., Cao Z.* Size Effect in Punching Shear Failure of Slabs // *ACI Structural Journal*. 1987. Vol. 84. Issue 1. Pp. 44–53. DOI: 10.14359/2785
10. *Donmez A., Bažant Z.P.* Size Effect on Punching Strength of Reinforced Concrete Slabs without and with Shear Reinforcement // *ACI Structural Journal*. 2017. Vol. 114. Issue 4. Pp. 875–886. DOI: 10.14359/51689719
11. *Bažant Z., Planas J.* Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. New York : Routledge, 1998. 640 p. DOI: 10.1201/9780203756799
12. *Oliveira D.R. C., Regan P., Melo G.S.* Punching Resistance of RC Slabs with Rectangular Columns // *Magazine of Concrete Research*. 2004. Vol. 56. Issue 3. Pp. 123–138. DOI: 10.1680/mac.56.3.123.36300
13. *Mangalathu S., Shin H., Choi E., Jeon J.* Explainable machine learning models for punching shear strength estimation of flat slabs without transverse reinforcement // *Journal of Building Engineering*. 2021. Vol. 39. P. 102300. DOI: 10.1016/j.job.2021.102300
14. *Truong D., To V., Truong G., Jang H.* Engineering punching shear strength of flat slabs predicted by nature-inspired metaheuristic optimized regression system // *Frontiers of Structural and Civil Engineering*. 2024. Vol. 18. Issue 4. Pp. 551–567. DOI: 10.1007/s11709-024-1091-1
15. *Guandalini S., Burdet O., Muttoni A.* Punching Tests of Slabs with Low Reinforcement Ratios // *ACI Structural Journal*. 2008. Vol. 106. Issue 1. Pp. 87–95. DOI: 10.14359/56287
16. *Reineck K.H., Beutel R., Duda H., Goossens D., Hallgren M., Kuchma D. et al.* Fib Bulletin 12. Punching of structural concrete slabs // *Fib Bulletins*. 2001. DOI: 10.35789/fib.BULL.0012
17. *Dieterle H., Rostasy F.* Tragverhalten quadratischer Einzelfundamente aus Stahlbeton // *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*. 1987. Vol. 387. Pp. 1–91. DOI: 10.2366/3702692
18. *Rizk E.* Punching shear of thick plates with and without shear reinforcement // *ACI Structural Journal*. 2011. Vol. 108. Issue 5. Pp. 581–591. DOI: 10.14359/51683215
19. *Li K.K.L.* Influence of size on punching shear strength of concrete slabs : master's thesis. Montreal : McGill University, 2000. 92 p.
20. *Hegger J., Ricker M., Ulke B., Ziegler M.* Investigations on the punching behaviour of reinforced concrete footings // *Engineering Structures*. 2007. Vol. 29. Issue 9. Pp. 2233–2241. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.11.012
21. *Siburg C., Hegger J.* Experimental investigations on the punching behaviour of reinforced concrete footings with structural dimensions // *Structural Concrete*. 2014. Vol. 15. Issue 3. Pp. 331–339. DOI: 10.1002/suco.201300083
22. *Sistonen E., Lydman M., Huovinen S.* Teräsbetonilaatan lävistyskapasiteetin laskentakaavan geometrinen malli. Talonrakennustekniikan laboratorio, Teknillinen korkeakoulu, Report No. 69, 1997.
23. *Guidotti R.* Poinçonnement Des Planchers-Dalles Avec Colonnes Superposées Fortement Sollicitées : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2010.
24. *Sagaseta J., Muttoni A., Ruiz M.F., Tassinari L.* Non-axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement // *Magazine of Concrete Research*. 2011. Vol. 63. Issue 6. Pp. 441–457. DOI: 10.1680/mac.10.00098
25. *Lips S., Ruiz M.F., Muttoni A.* Experimental Investigation on Punching Strength and Deformation Capacity of Shear-Reinforced Slabs // *ACI Structural Journal*. 2012. Vol. 109. Issue 6. Pp. 889–900. DOI: 10.14359/51684132
26. *Kruger G., Burdet O., Favre R.* Punching strength of R.C. Flat slabs with moment transfer // *International Workshop on Punching Shear — Proceedings*. 2000. Pp. 333–341.
27. *Caldentey A.P., Lavaselli P.P., Corres H., Fernandez F.A.* Influence of stirrup detailing on punching shear strength of flat slabs // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 49. Pp. 855–865. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.12.032

28. *Bompa D., Onet T.P.* Punching shear strength of RC flat slabs at interior connections to columns // Magazine of Concrete Research. 2015. Vol. 68. Issue 1. Pp. 24–42. DOI: 10.1680/macrc.14.00402
29. *Urban T., Goldyn M., Krawczyk L.* The analysis of the effectiveness of different types of punching shear reinforcement not fully anchored // Budownictwo i Architektura. 2013. Vol. 12. Issue 1. Pp. 195–202. DOI: 10.35784/bud-arch.2192
30. *Simões J.T., Bujnak J., Ruiz F.M., Muttoni A.* Punching shear tests on compact footings with uniform soil pressure // Structural Concrete. 2016. Vol. 17. Issue 4. Pp. 603–617. DOI: 10.1002/suco.201500175
31. *Papanikolaou K.V., Tegos I.A., Kappos A.J.* Punching shear testing of reinforced concrete slabs, and design implications // Magazine of Concrete Research. 2005. Vol. 57. Issue 3. Pp. 167–177. DOI: 10.1680/macrc.2005.57.3.167
32. *Ozden S., Ersoy U., Ozturan T.* Punching shear tests of normal- and high-strength concrete flat plates // Canadian Journal of Civil Engineering. 2006. Vol. 33. Issue 11. Pp. 1389–1400. DOI: 10.1139/106-089
33. *Birkle G., Walter H.D.* Influence of Slab Thickness on Punching Shear Strength // ACI Structural Journal. 2008. Vol. 105. Issue 2. Pp. 180–188. DOI: 10.14359/19733
34. *Al-Yousif A.T., Regan P.E.* Punching resistances of RC slabs supported by large and/or elongated columns // The Structural Engineer. 2003. Vol. 81. Issue 5. Pp. 30–34.
35. *Binici B., Bayrak O.* Punching Shear Strengthening of Reinforced Concrete Flat Plates Using Carbon Fiber Reinforced Polymers // Journal of Structural Engineering. 2003. Vol. 129. Issue 9. Pp. 1173–1182. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:9(1173)
36. *Ghannoum C.M.* Effect of high-strength concrete on the performance of slab-column specimens: master's thesis. Montreal : McGill University, 1998.
37. *Sissakis K., Sheikh S.A.* Strengthening concrete slabs for punching shear with carbon fiber-reinforced polymer laminates // ACI Structural Journal. 2007. Vol. 104. Issue 1. Pp. 49–59. DOI: 10.14359/18432
38. *Li X.* Punching Shear Behaviour of Slab-Column Connections : Ph.D. Thesis. Sheffield, 1997.
39. *Esfahani M.R., Kianoush M.R., Moradi A.R.* Punching Shear Strength of Interior Slab-Column Connections Strengthened with Carbon Fiber Reinforced Polymer Sheets // Engineering Structures. 2009. Vol. 31. Issue 7. Pp. 1535–1542. DOI: 10.1016/j.engstruct.2009.02.021
40. *Michel L., Ferrier E., Bigaud D., Agbossou A.* Criteria for punching failure mode in RC slabs reinforced by externally bonded CFRP // Composite Structures. 2007. Vol. 81. Issue 3. Pp. 438–449. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.09.008
41. *Regan P.E., Samadian F.* Shear Reinforcement against punching in reinforced concrete flat slabs // The Structural Engineer. 2001. Vol. 79. Issue 10. Pp. 24–31.
42. *Kim J.Y., Longworth J.M., Wight R.G., Green M.F.* Punching Shear of Two-way Slabs Retrofitted with Prestressed or Non-prestressed CFRP Sheets // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2010. Vol. 29. Issue 8. Pp. 1206–1223. DOI: 10.1177/07316-84409103143
43. *Rizk E., Marzouk H.* Experimental validation of minimum flexural reinforcement for thick high-strength concrete plates // ACI Structural Journal. 2011. Vol. 108. Issue 3. Pp. 332–340. DOI: 10.14359/51682349
44. *Elshafey A.A., Rizk E., Marzouk H., Hadara M.R.* Prediction of punching shear strength of two-way slabs // Engineering Structures. 2011. Vol. 33. Issue 5. Pp. 1742–1753. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.02.013
45. *Smadi M.M., Yasin I.S.* Behavior of high-strength fibrous concrete slab-column connections under gravity and lateral loads // Construction and Building Materials. 2008. Vol. 22. Issue 8. Pp. 1863–1873. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2007.04.023
46. *Faria D.M.V., Lúcio V.J.G., Ramos A.P.* Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding // Engineering Structures. 2011. Vol. 33. Issue 6. Pp. 2025–2043. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.02.039
47. *Cheng M.Y., Parra-Montesinos G.* Evaluation of Steel Fiber Reinforcement for Punching Shear Resistance in Slab-Column Connections — Part I: Monotonically Increased Load // ACI Structural Journal. 2010. Vol. 107. Issue 1. Pp. 101–109. DOI: 10.14359/51663394
48. *Birkle G.* Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout : Ph.D. Thesis. Calgary, 2004.
49. *Etter S., Heinzmann D., Jäger T., Marti P.* Versuche zum Durchstanzverhalten von Stahlbetonplatten. Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, IBK Bericht 324, 2009. DOI: 10.3929/ethz-a-006077853
50. *Hegger J., Häusler F., Ricker M.* Zur maximalen Durchstanztragfähigkeit von Flachdecken // Beton- und Stahlbetonbau. 2007. Vol. 102. Issue 11. Pp. 770–777. DOI: 10.1002/best.200700584
51. *Lips S., Muttoni A., Ruiz F.M.* Experimental Investigation on Punching Strength and Deformation Capacity of Shear-Reinforced Slabs // ACI Structural Journal. 2012. Vol. 109. Issue 6. Pp. 889–900. DOI: 10.14359/51684132
52. *Rizk E., Marzouk H., Hussein A.* Punching Shear of Thick Plates with and without Shear Reinforcement // ACI Structural Journal. 2011. Vol. 108. Issue 5. Pp. 581–591. DOI: 10.14359/51683215
53. *Vollum R.L., Abdel-Fattah T., Eder M., Elghazouli A.Y.* Design of ACI-type punching shear reinforcement to Eurocode 2 // Magazine of Concrete Research.

2009. Vol. 62. Issue 1. Pp. 3–16. DOI: 10.1680/macr.2008.62.1.3

54. Schmidt P., Kueres D., Hegger J. Punching shear behavior of reinforced concrete flat slabs with a varying amount of shear reinforcement // *Structural Concrete*. 2020. Vol. 21. Issue 1. Pp. 235–246. DOI: 10.1002/suco.201900017

55. Siburg C., Ricker M., Hegger J. Punching shear design of footings : critical review of different code provisions // *Structural Concrete*. 2020. Vol. 15. Issue 4. Pp. 497–508. DOI: 10.1002/suco.201300092

56. Starosolski W., Zbigniew P., Jasiński R., Drobiec D. Punching shear test of r/c slabs with double headed studs // *Quality and Reliability in Building Industry*. 1999. Vol. 1. Pp. 81–96.

57. Коровин Н.Н., Голубев А.Ю. Продавливание толстых железобетонных плит // *Бетон и железобетон*. 1989. № 11. С. 20–23.

58. Levenberg K. Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares // *Quarterly of Applied Mathematics*. 1944. Vol. 2. Issue 2. Pp. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666

59. Marquardt D.W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters // *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963. Vol. 11. Issue 2. Pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030

60. Transtrum M.K., Sethna J.P. Improvements to the Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least-squares minimization // *arXiv*. 2012. DOI: 10.48550/arXiv.1201.5885

Поступила в редакцию 18 ноября 2024 г.

Принята в доработанном виде 1 мая 2025 г.

Одобрена для публикации 1 мая 2025 г.

ОБ АВТОРАХ: Александр Михайлович Бударин — главный специалист отдела расчетных обоснований; Институт «Гидропроект»; 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 2; alex.budarin01@gmail.com;

Олег Юрьевич Ушаков — кандидат технических наук, доцент; Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ); 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; Scopus: 57210969288, ResearcherID: B-4747-2016, ORCID: 0000-0002-7514-3108; ushakovoleg@yandex.ru;

Линар Салихзанович Сабитов — доктор технических наук, профессор; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; Scopus: 57079229700, ResearcherID: D-2999-2018, ORCID: 0000-0001-7381-9752; SabitovLS@mgsu.ru;

Левон Рафаэлович Маилян — доктор технических наук, профессор; Донской государственный технический университет (ДГТУ); 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, д. 1; Scopus: 57192662909, ResearcherID: AAO-9095-2020, ORCID: 0000-0003-0162-2699; lrm@aaa.net.ru;

Сергей Сергеевич Сосновских — аспирант кафедры систем автоматизированного проектирования объектов строительства; Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ); 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; sss-10@mail.ru.

Вклад авторов: все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Lips S. Punching of Flat Slabs with Large Amounts of Shear Reinforcement : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2012.

2. Beutel R., Hegger J. The effect of anchorage on the effectiveness of the shear reinforcement in the punching zone. *Cement and Concrete Composites*. 2002; 24(6):539-549. DOI: 10.1016/S0958-9465(01)00070-1

3. Kueres D. Two-parameter kinematic theory for punching shear in reinforced concrete slabs : Ph.D. Thesis. Aachen, 2018.

4. Simones J.T., Ruiz M.F., Muttoni A. Validation of the Critical Shear Crack Theory for punching of slabs without transverse reinforcement by means of a refined mechanical model. *Structural Concrete*. 2018; 19(1):191-216. DOI: 10.1002/suco.201700280

5. Staller M. Analytische und numerische Untersuchungen des Durchstanztragverhaltens punktgestützter Stahlbetonplatten : Ph.D. Thesis. Munich, 2000.

6. Lovorovich J.S., McLean D.I. Punching Shear Behavior of Slabs With Varying Span-Depth Ratios. *ACI Structural Journal*. 1990; 87(5):507-512. DOI: 10.14359/2616

7. Simones J.T. The mechanics of punching in reinforced concrete slabs and footings without shear reinforcement : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2018.

8. Einpaul J. Punching strength of continuous flat slabs : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2016.

9. Bažant P.Z., Cao Z. Size Effect in Punching Shear Failure of Slabs. *ACI Structural Journal*. 1987; 84(1):44-53. DOI: 10.14359/2785

10. Donmez A., Bazant Z.P. Size Effect on Punching Strength of Reinforced Concrete Slabs without and with Shear Reinforcement. *ACI Structural Journal*. 2017; 114(4):875-886. DOI: 10.14359/51689719
11. Bazant Z., Planas J. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. New York, Routledge, 1998; 640. DOI: 10.1201/9780203756799
12. Oliveira D.R. C., Regan P., Melo G.S. Punching Resistance of RC Slabs with Rectangular Columns. *Magazine of Concrete Research*. 2004; 56(3):123-138. DOI: 10.1680/mac.56.3.123.36300
13. Mangalathu S., Shin H., Choi E., Jeon J. Explainable machine learning models for punching shear strength estimation of flat slabs without transverse reinforcement. *Journal of Building Engineering*. 2021; 39:102300. DOI: 10.1016/j.job.2021.102300
14. Truong D., To V., Truong G., Jang H. Engineering punching shear strength of flat slabs predicted by nature-inspired metaheuristic optimized regression system. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*. 2024; 18(4):551-567. DOI: 10.1007/s11709-024-1091-1
15. Guandalini S., Burdet O., Muttoni A. Punching Tests of Slabs with Low Reinforcement Ratios. *ACI Structural Journal*. 2008; 106(1):87-95. DOI: 10.14359/56287
16. Reineck K.H., Beutel R., Duda H., Goossens D., Hallgren M., Kuchma D. et al. Fib Bulletin 12. *Punching of structural concrete slabs*. Fib Bulletins. 2001. DOI: 10.35789/fib.BULL.0012
17. Dieterle H., Rostasy F. Tragverhalten quadratischer Einzelfundamente aus Stahlbeton. *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*. 1987; 387:1-91. DOI: 10.2366/3702692
18. Rizk E. Punching shear of thick plates with and without shear reinforcement. *ACI Structural Journal*. 2011; 108(5):581-591. DOI: 10.14359/51683215
19. Li K.K.L. *Influence of size on punching shear strength of concrete slabs : master's thesis*. Montreal, McGill University, 2000; 92.
20. Hegger J., Ricker M., Ulke B., Ziegler M. Investigations on the punching behaviour of reinforced concrete footings. *Engineering Structures*. 2007; 29(9):2233-2241. DOI: 10.1016/j.engstruct.2006.11.012
21. Siburg C., Hegger J. Experimental investigations on the punching behaviour of reinforced concrete footings with structural dimensions. *Structural Concrete*. 2014; 15(3):331-339. DOI: 10.1002/suco.201300083
22. Sistonen E., Lydman M., Huovinen S. *Teräsbetoni- ja laatan lävistyskapasiteetin laskentakaavan geometrin malli*. Talonrakennustekniikan laboratorio, Teknillinen korkeakoulu, Report No. 69, 1997.
23. Guidotti R. Poinçonnement Des Planchers-Dalles Avec Colonnes Superposées Fortement Sollicitées : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2010.
24. Sagaseta J., Muttoni A., Ruiz M.F., Tassinari L. Non-axis-symmetrical punching shear around internal columns of RC slabs without transverse reinforcement. *Magazine of Concrete Research*. 2011; 63(6):441-457. DOI: 10.1680/mac.10.00098
25. Lips S., Ruiz M.F., Muttoni A. Experimental Investigation on Punching Strength and Deformation Capacity of Shear-Reinforced Slabs. *ACI Structural Journal*. 2012; 109(6):889-900. DOI: 10.14359/51684132
26. Kruger G., Burdet O., Favre R. Punching strength of R.C. Flat slabs with moment transfer. *International Workshop on Punching Shear — Proceedings*. 2000; 333-341.
27. Caldentey A.P., Lavaselli P.P., Corres H., Fernandez F.A. Influence of stirrup detailing on punching shear strength of flat slabs. *Engineering Structures*. 2013; 49:855-865. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.12.032
28. Bompa D., Onet T.P. Punching shear strength of RC flat slabs at interior connections to columns. *Magazine of Concrete Research*. 2015; 68(1):24-42. DOI: 10.1680/mac.14.00402
29. Urban T., Goldyn M., Krawczyk L. The analysis of the effectiveness of different types of punching shear reinforcement not fully anchored. *Budownictwo i Architektura*. 2013; 12(1):195-202. DOI: 10.35784/bud-arch.2192
30. Simões J.T., Bujnak J., Ruiz F.M., Muttoni A. Punching shear tests on compact footings with uniform soil pressure. *Structural Concrete*. 2016; 17(4):603-617. DOI: 10.1002/suco.201500175
31. Papanikolaou K.V., Tegos I.A., Kappos A.J. Punching shear testing of reinforced concrete slabs, and design implications. *Magazine of Concrete Research*. 2005; 57(3):167-177. DOI: 10.1680/mac.2005.57.3.167
32. Ozden S., Ersoy U., Ozturan T. Punching shear tests of normal- and high-strength concrete flat plates. *Canadian Journal of Civil Engineering*. 2006; 33(11):1389-1400. DOI: 10.1139/106-089
33. Birkle G., Walter H.D. Influence of Slab Thickness on Punching Shear Strength. *ACI Structural Journal*. 2008; 105(2):180-188. DOI: 10.14359/19733
34. Al-Yousif A.T., Regan P.E. Punching resistances of RC slabs supported by large and/or elongated column. *The Structural Engineer*. 2003; 81(5):30-34
35. Binici B., Bayrak O. Punching Shear Strengthening of Reinforced Concrete Flat Plates Using Carbon Fiber Reinforced Polymers. *Journal of Structural Engineering*. 2003; 129(9):1173-1182. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2003)129:9(1173)
36. Ghannoum C.M. *Effect of high-strength concrete on the performance of slab-column specimens : master's thesis*. Montreal, McGill University, 1998.
37. Sissakis K., Sheikh S.A. Strengthening concrete slabs for punching shear with carbon fiber-reinforced polymer laminates. *ACI Structural Journal*. 2007; 104(1):49-59. DOI: 10.14359/18432
38. Li X. *Punching Shear Behaviour of Slab-Column Connections : Ph.D. Thesis*. Sheffield, 1997.

39. Esfahani M.R., Kianoush M.R., Moradi A.R. Punching Shear Strength of Interior Slab-Column Connections Strengthened with Carbon Fiber Reinforced Polymer Sheets. *Engineering Structures*. 2009; 31(7):1535-1542. DOI: 10.1016/j.engstruct.2009.02.021
40. Michel L., Ferrier E., Bigaud D., Agbossou A. Criteria for punching failure mode in RC slabs reinforced by externally bonded CFRP. *Composite Structures*. 2007; 81(3):438-449. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.09.008
41. Regan P.E., Samadian F. Shear Reinforcement against punching in reinforced concrete flat slabs. *The Structural Engineer*. 2001. 79(10):24-31.
42. Kim J.Y., Longworth J.M., Wight R.G., Green M.F. Punching Shear of Two-way Slabs Retrofitted with Prestressed or Non-prestressed CFRP Sheets. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2010; 29(8):1206-1223. DOI: 10.1177/0731684409103143
43. Rizk E., Marzouk H. Experimental validation of minimum flexural reinforcement for thick high-strength concrete plates. *ACI Structural Journal*. 2011; 108(3):332-340. DOI: 10.14359/51682349
44. Elshafey A.A., Rizk E., Marzouk H., Haddara M.R. Prediction of punching shear strength of two-way slabs. *Engineering Structures*. 2011; 33(5):1742-1753. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.02.013
45. Smadi M.M., Yasin I.S. Behavior of high-strength fibrous concrete slab-column connections under gravity and lateral loads. *Construction and Building Materials*. 2008; 22(8):1863-1873. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2007.04.023
46. Faria D.M.V., Lúcio V.J.G., Ramos A.P. Strengthening of flat slabs with post-tensioning using anchorages by bonding. *Engineering Structures*. 2011; 33(6):2025-2043. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.02.039
47. Cheng M.Y., Parra-Montesinos G. Evaluation of Steel Fiber Reinforcement for Punching Shear Resistance in Slab-Column Connections — Part I: Monotonically Increased Load. *ACI Structural Journal*. 2010; 107(1):101-109. DOI: 10.14359/51663394
48. Birkle G. Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout : Ph.D. Thesis. Calgary, 2004.
49. Etter S., Heinzmann D., Jäger T., Marti P. *Ver-suche zum Durchstanverhalten von Stahlbetonplatten*. Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, IBK Bericht 324, 2009. DOI: 10.3929/ethz-a-006077853
50. Hegger J., Häusler F., Ricker M. Zur maximalen Durchstantragfähigkeit von Flachdecken. *Beton- und Stahlbetonbau*. 2007; 102(11):770-777. DOI: 10.1002/best.200700584
51. Lips S., Muttoni A., Ruiz F.M. Experimental Investigation on Punching Strength and Deformation Capacity of Shear-Reinforced Slabs. *ACI Structural Journal*. 2012; 109(6):889-900. DOI: 10.14359/51684132
52. Rizk E., Marzouk H., Hussein A. Punching Shear of Thick Plates with and without Shear Reinforcement. *ACI Structural Journal*. 2011; 108(5):581-591. DOI: 10.14359/51683215
53. Vollum R.L., Abdel-Fattah T., Eder M., Elghazouli A.Y. Design of ACI-type punching shear reinforcement to Eurocode 2. *Magazine of Concrete Research*. 2009; 62(1):3-16. DOI: 10.1680/mac.2008.62.1.3
54. Schmidt P., Kueres D., Hegger J. Punching shear behavior of reinforced concrete flat slabs with a varying amount of shear reinforcement. *Structural Concrete*. 2020; 21(1):235-246. DOI: 10.1002/suco.201900017
55. Siburg C., Ricker M., Hegger J. Punching shear design of footings: critical review of different code provisions. *Structural Concrete*. 2020; 15(4):497-508. DOI: 10.1002/suco.201300092
56. Starosolski W., Zbigniew P., Jasiński R., Drobiec D. Punching shear test of r/c slabs with double headed studs. *Quality and Reliability in Building Industry*. 1999; 1:81-96.
57. Korovin N.N., Golubev A.Yu. Punching shear of the thick reinforced concrete slabs. *Concrete and Reinforced Concrete*. 1989; 11:20-23. (rus.).
58. Levenberg K. Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1944; 2(2):164-168. DOI: 10.1090/qam/10666
59. Marquardt D.W. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. 1963; 11(2):431-441. DOI: 10.1137/0111030
60. Transtrum M.K., Sethna J.P. Improvements to the Levenberg-Marquardt algorithm for nonlinear least-squares minimization. *ArXiv*. 2012. DOI: 10.48550/arXiv.1201.5885

Received November 18, 2024.

Adopted in revised form on May 1, 2025.

Approved for publication on May 1, 2025.

BIONOTES: Alexander M. Budarin — chief specialist of the calculation justification department; **Institute Hydro-project**; 2 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; alex.budarin01@gmail.com;

Oleg Yu. Ushakov — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; **Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU)**; 19 Mira st., Yekaterinburg, 620002, Russian Federation; Scopus: 57210969288, ResearcherID: B-4747-2016, ORCID: 0000-0002-7514-3108; ushakovoleg@yandex.ru;

Linar S. Sabitov — Doctor of Technical Sciences, Professor; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Scopus: 57079229700, ResearcherID: D-2999-2018, ORCID: 0000-0001-7381-9752; l.sabitov@bk.ru;

Levon R. Mailyan — Doctor of Technical Sciences, Professor; **Don State Technical University (DSTU)**; 1 Gagarin square, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation; Scopus: 57192662909, ResearcherID: AAO-9095-2020, ORCID: 0000-0003-0162-2699; lrm@aaa.net.ru;

Sergey S. Sosnovskikh — postgraduate student of the Department of Computer-Aided Design Systems for Construction Projects; **Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU)**; 19 Mira st., Yekaterinburg, 620002, Russian Federation; ccc-10@mail.ru.

Contribution of the authors: all authors made equivalent contributions to the preparation of the publication.

The authors declare no conflicts of interests.