

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.042.7

DOI: 10.22227/1997-0935.2025.10.1495-1507

Использование интегро-дифференциальных уравнений для моделирования распространения сейсмических волн через барьер с эффектом памяти

Сергей Гургенович Саиян

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Рассматривается распространение сейсмических волн через барьер с эффектом памяти на основе интегро-дифференциальных уравнений. Классические волновые модели, основанные на упругих уравнениях, зачастую не учитывают вязкоупругие свойства реальных грунтов и сейсмических барьеров, обладающих способностью «запоминать» предшествующие деформации. Для более точного описания явления используется интегро-дифференциальная модель с экспоненциальным ядром памяти, позволяющая моделировать широкий спектр диссипативных эффектов и получать аналитические решения, применимые для задач сейсмической защиты.

Материалы и методы. Модель основана на интегро-дифференциальных уравнениях движения, учитывающих историю деформации и релаксацию материала. С целью получения аналитических решений применяются прямые и обратные преобразования Фурье и Лапласа. Исследованы две формы импульсов — дельта-функция и гауссов импульс.

Результаты. При дельта-импульсе в среде с памятью формируются дополнительные «хвосты» и всплески, а параметры ядра (α и β) влияют на скорость «забывания» и ее интенсивность. Для гауссова импульса при введении эффектов памяти волна плавнее «расплывается», однако также приобретает дополнительные искажения, особенно при больших значениях α и при медленном затухании памяти β . В обоих случаях показано, что, управляя величинами α и β , возможно существенно менять характер взаимодействия, получая либо резкий локальный пик, либо более сглаженное распределение с выраженным энергорассеянием.

Выводы. Проведенное исследование демонстрирует важность учета «эффекта памяти» при моделировании сейсмических барьеров. Интегро-дифференциальные уравнения с экспоненциальным ядром позволяют точнее описывать процессы затухания, рассеяния энергии и трансформации формы сейсмических волн в реальных грунтовых условиях. Полученные аналитические решения служат основой для проектирования более эффективных сейсмических барьеров, способных «настраиваться» под нужный диапазон частот колебаний.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: сейсмические волны, сейсмические барьеры, эффект памяти, интегро-дифференциальные уравнения, вязкоупругость, экспоненциальное ядро памяти, преобразование Лапласа, преобразование Фурье, затухание волны

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 24-49-02002.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Саиян С.Г. Использование интегро-дифференциальных уравнений для моделирования распространения сейсмических волн через барьер с эффектом памяти // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 10. С. 1495–1507. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.10.1495-1507

Автор, ответственный за переписку: Сергей Гургенович Саиян, berformert@gmail.com.

Using Integro-Differential Equations to Model the Propagation of Seismic Waves Through a Barrier with a Memory Effect

Sergey G. Saiyan

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The present paper considers the propagation of seismic waves through a barrier with a memory effect based on integro-differential equations. Conventional wave models, founded upon elastic equations, frequently neglect the viscoelastic characteristics of actual soils and seismic barriers, which possess the capacity to “remember” prior deformations. To

achieve a more accurate description of the phenomenon, an integro-differential model with an exponential memory kernel is employed. This model allows for the modelling of a wide range of dissipative effects and the derivation of analytical solutions applicable to seismic protection problems.

Materials and methods. The model is predicated on integro-differential equations of motion, which take into account the deformation history and material relaxation. Direct and inverse Fourier and Laplace transforms are applied in order to obtain analytical solutions. Two forms of pulses are investigated: the delta function and the Gaussian pulse.

Results. In the context of a delta pulse, supplementary “tails” and bursts are formed within the medium that exhibits memory, with the kernel parameters (α and β) exerting an influence on the rate of “forgetting” and its intensity. In the case of a Gaussian pulse, the introduction of memory effects results in a more gradual blurring of the waveform, accompanied by the acquisition of additional distortions, particularly at high values of α and during slow memory decay β . It has been demonstrated that by manipulating the values of α and β , a substantial alteration in the nature of the interaction can be achieved, resulting in either a sharp local peak or a more uniform distribution, characterized by significant energy dissipation.

Conclusions. This study demonstrates the importance of taking into account the “memory effect” when modelling seismic barriers. Integro-differential equations with an exponential kernel facilitate a more precise description of the processes of attenuation, energy dissipation and transformation of seismic wave shape in real ground conditions. The analytical solutions obtained from this study form a foundation for the design of more efficient seismic barriers, capable of “tuning” to the required range of vibration frequencies.

KEYWORDS: seismic waves, seismic barriers, memory effect, integro-differential equations, viscoelasticity, exponential memory kernel, Laplace transform, Fourier transform, wave attenuation

Acknowledgements. This research was supported by the Russian Science Foundation Grant No. 24-49-02002.

FOR CITATION: Saiyan S.G. Using Integro-Differential Equations to Model the Propagation of Seismic Waves Through a Barrier with a Memory Effect. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(10):1495-1507. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.10.1495-1507 (rus.).

Corresponding author: Sergey G. Saiyan, berformert@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Для моделирования распространения волн при сейсмических воздействиях традиционно применяются классические волновые уравнения (в основном в упругой постановке без учета диссипативных свойств [1–8]). Эти модели позволяют получить представление о распространении волн в идеализированных упругих средах. Однако реальные условия вблизи поверхности Земли далеки от чисто упругих: грунты обладают вязкоупругими свойствами, а инженерные решения по созданию «сейсмических барьеров» нередко обеспечивают искусственно заданное диссипативное поведение материала или слоя.

С целью описания вязкоупругих свойств широко используют интегро-дифференциальные уравнения Больцмана – Вольтерра [9–11], включающие «эффект памяти» материала (зависимость текущих деформаций от предшествующего процесса нагрузки). В большинстве современных исследований развитие получают численные методы решения (конечные разности, конечные элементы, спектральные элементы) [12–18], однако аналитические подходы для моделирования подобных явлений остаются относительно мало изученными.

Сейсмические барьеры — это специальные слои или конструкции, размещаемые в грунте либо вокруг сооружений, чтобы изменять или поглощать энергию сейсмических волн. В простейшем представлении барьер трактуется как материал с отличающимися от окружающей среды физико-механическими характеристиками (например, отличающейся скоростью распространения волны в среде или повышенным затуханием).

В работах [18–23] развивается идея применения интегро-дифференциальных уравнений для описания вязкоупругих эффектов и свойств рассе-

яния энергии в средах с «эффектом памяти». Суть подхода в том, что уравнения движения содержат дополнительные термины свертки с некоторым «ядром памяти», которое может иметь экспоненциальный, степенной или более сложный вид. Например, в экспоненциальном ядре память наиболее ярко проявляется на относительно «средних» промежутках времени, а при длительном воздействии вклад ядра уменьшается.

В реальных условиях вязкоупругость барьера может существенно влиять на рассеяние и затухание сейсмических волн. Так, введение «памяти» в модель приводит к дополнительным механизмам энергорассеяния (гистерезис, дисперсия, задержки во времени). Это особенно актуально при анализе поверхностных волн, которые распространяются в приповерхностных слабых породах и сильно влияют на механическую безопасность зданий и сооружений. В теории волновой динамики подобные модели обладают несколькими важными преимуществами: они позволяют учесть более сложные механизмы диссипации, чем классический коэффициент вязкости, временную дисперсию в широком спектре частот, а также точнее описывать форму волны для импульсных воздействий. Несмотря на сложность получения аналитических решений, они обеспечивают глубокое понимание принципов формирования и распространения волн, помогают выявлять зоны усиленного затухания. Кроме того, такие решения дают возможность выводить простые асимптотические формулы для больших расстояний или больших моментов времени, что важно при расчетах и разработке мер сейсмической защиты масштабных инфраструктурных объектов, а также служат эталонными решениями для верификации программных комплексов (ANSYS, ABAQUS, NASTRAN и др.).

Преимущества интегро-дифференциальных моделей сейсмических барьеров заключаются в том, что возможен точный учет наследственных свойств, а также адекватное описание волнового затухания и рассеяния энергии. При описании реальных барьерных материалов (естественные грунты или искусственно созданные слои) невозможно свести вязкоупругость к простому коэффициенту демпфирования. Интегральный оператор вносит память, позволяя учесть весь предшествующий ход деформаций. Если традиционные упругие модели описывают лишь отражение и преломление волн, то модели с памятью дают возможность также учитывать диссипацию энергии, зависящую от частоты и амплитуды. При этом эффект памяти проявляется лишь при определенных свойствах материала барьера: в предельных случаях практически полностью упругого поведения или, наоборот, мгновенной вязкоупругой релаксации («быстрого забывания»), предыдущие деформации почти не влияют на текущую волну.

С точки зрения инженерии возможность «тонкой настройки» параметров памяти открывает путь к созданию материалов и слоев, эффективно гасящих колебания в широком диапазоне частот. Барьер становится «настраиваемым» элементом системы сейсмической защиты. Несмотря на то, что классические волновые модели для упругой среды хорошо известны и эффективно решаются численно, переход к более сложным интегро-дифференциальным уравнениям с эффектом памяти требует дальнейшей проработки аналитического инструментария, особенно если речь идет о теоретической оценке влияния барьера на сейсмические волны. Методы решения на основе преобразований Фурье и Лапласа позволяют получать замкнутые выражения для амплитудных и фазовых характеристик волн, определять «зоны теней» с ослабленными колебаниями и прогнозировать влияние неоднородностей.

В контексте научного анализа и инжиниринга интегро-дифференциальные модели барьеров с па-

мятью пока не получили столь широкого применения, как классические уравнения линейно-упругой или простейшей вязкоупругой теории. Однако их потенциал, заключающийся в более точном описании механики и динамики волнового процесса, очевиден. В совокупности с современными вычислительными возможностями и аналитическими методами такие модели способны существенно улучшить прогнозную оценку ожидаемых сейсмических воздействий на здания и сооружения.

Таким образом, дальнейшее развитие аналитических подходов, специализированных вычислительных алгоритмов и экспериментальных методов в области интегро-дифференциальных уравнений с ядром памяти позволит расширить научные и инженерные возможности в задаче повышения сейсмостойкости зданий и сооружений. В рамках настоящего исследования разработано и проанализировано замкнутое аналитическое решение, описывающее распространение сейсмических волн через барьер с эффектом памяти для дельта-импульса и гауссова импульса на основе интегро-дифференциальных уравнений, а также преобразований Фурье и Лапласа. В статье приведена подробная постановка, включающая экспоненциальное ядро памяти и теоретические выкладки. Исследовано влияние параметров памяти на динамику решения, а также асимптотики и потенциальные приложения для сейсмических барьеров.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Постановка задачи. Рассмотрим одномерную модель распространения сейсмической волны в упругом полупространстве, модифицированном специальным сейсмическим барьером. Пусть $u(x, t)$ — смещение грунта в точке x в момент времени t . Сейсмический барьер обладает вязкоупругими свойствами «с памятью», приводящими к интегральному члену в уравнении (1). Предположим, что параметры среды постоянны: плотность $\rho > 0$, модуль деформации $E > 0$. Для простоты примем, что внеш-

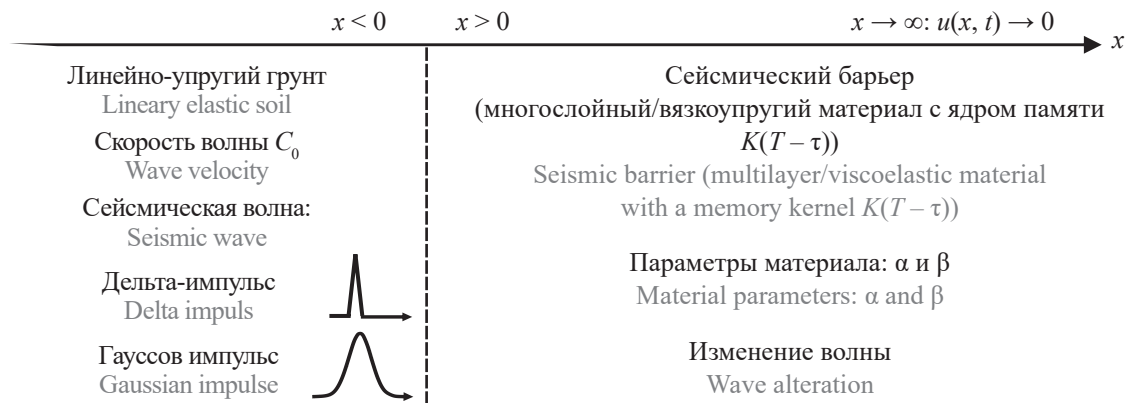


Рис. 1. Модель распространения сейсмической волны в упругом полупространстве, модифицированном специальным сейсмическим барьером с эффектом памяти при действии дельта-импульса и гауссова импульса

Fig. 1. The model of seismic wave propagation in an elastic half-space modified by a special seismic barrier with a memory effect under the action of delta and Gaussian impulses

Вестник МГСУ • ISSN 1997-0935 (Print) ISSN 2304-6600 (Online) • Том 20. Выпуск 10, 2025
Vestnik MGSU • Monthly Journal on Construction and Architecture • Volume 20. Issue 10, 2025

него источника возмущения нет, $S(x, t) = 0$, а все воздействие исходит от начальных условий. Постановка такой задачи показана на рис. 1.

Основные уравнения. Основным разрешаемым уравнением является уравнение колебаний, содержащее интегральный член, описывающий ядро памяти материала, отражающий интегральный вклад всех предыдущих состояний системы. В контексте сейсмического барьера это может быть описанием вязкоупругого или многослойного материала, у которого реакция зависит от предыстории деформаций. Разрешающее уравнение выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] - \int_0^t K(t - \tau) u(x, \tau) d\tau + S(x, t), \quad (1)$$

где ρ — плотность грунта; E — обобщенный модуль деформаций; $K(t - \tau)$ — ядро памяти; $S(x, t)$ — внешняя сейсмическая нагрузка (например, сейсмическая волна, пришедшая от очага землетрясения). Для простоты примем, что внешнего источника возмущения нет, $S(x, t) = 0$, а все воздействие исходит от начальных условий.

Данное интегро-дифференциальное уравнение позволяет учитывать не только мгновенную реакцию грунта и барьера на сейсмическое возмущение, но и накопленный эффект за все предшествующее время. Это важно для прогнозирования затухания и отражения сейсмической энергии с учетом сложной структуры барьера, что в итоге повышает точность оценки динамики вибрационных процессов в зоне действия защитных барьерных конструкций.

Ядро памяти материала. Для ядра памяти материала был рассмотрен экспоненциальный вид [24, 25]:

$$K(t - \tau) = \alpha \cdot \exp(-\beta(t - \tau)), \quad (2)$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — параметры ядра памяти материала. Это ядро памяти означает, что материал «забывает» прошлые деформации экспоненциально быстро с характерным временем $1/\beta$. Параметр α определяет интенсивность памяти. Отметим, что выбранное экспоненциальное ядро памяти основано на классической модели вязкоупругости (уравнение типа Вольтерра), что обосновывает его применение в данной модели [26].

Безразмерные параметры. Для удобства дальнейших теоретических выкладок все физические величины были обезразмерены:

$$t' = \frac{t}{T_0}; x' = \frac{x}{L_0}; u' = \frac{u}{L_0}; \quad (3)$$

$$\alpha' = \alpha T_0^3; \beta' = \beta T_0; k' = k L_0; s' = s T_0,$$

где масштаб времени (T_0) и длины (L_0) определяется так, чтобы скорость звука $c_0 = \frac{L_0}{T_0} = 1$ в безразмерных переменных, таким образом, $L_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} T_0 = c_0 T_0$,

k' — безразмерное волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ — длина волны; s' — безразмерная частота; α' и β' — безразмерные константы материала. При дальнейших выкладках (до момента перехода к размерным величинам) штрихи во всех функциях будут опущены.

Начальные условия. Начальные условия зададим в классической форме:

$$u(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x). \quad (4)$$

Преобразование Лапласа. Обозначим преобразование Лапласа по переменной t , второй производной по времени и интегрального члена [27]:

$$L\{u(x, t)\} = U(x, s) = \int_0^\infty u(x, t) \exp(-st) dt;$$

$$L\{u_{tt}\}(x, s) = s^2 U(x, s) - sf(x) - g(x); \quad (5)$$

$$L\left\{\int_0^t \alpha \cdot \exp(-\beta(t - \tau)) \cdot u(x, \tau) d\tau\right\} =$$

$$= \alpha U(x, s) \frac{1}{s + \beta}.$$

Подставляя в исходное уравнение (1), получим:

$$\rho[s^2 U(x, s) - sf(x) - g(x)] =$$

$$= E \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{s + \beta} U(x, s). \quad (6)$$

Преобразование Фурье. Далее применим преобразование Фурье по пространственной переменной x [28]:

$$\hat{U}(k, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, s) \exp(-ikx) dx. \quad (7)$$

Аналогично для функций $\hat{f}(k)$ и $\hat{g}(k)$. Пространственный дифференциальный оператор второго порядка переходит в вид $E \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} -Ek^2 \hat{U}(k, s)$, где $\hat{U}(k, s)$ — Фурье – Лапласово изображение функции $u(x, t)$.

Трансформированное уравнение. Подставим в трансформированное уравнение (6) с учетом преобразований:

$$\rho[s^2 \hat{U}(k, s) - s\hat{f}(k) - \hat{g}(k)] =$$

$$= -Ek^2 \hat{U}(k, s) - \frac{\alpha}{s + \beta} \hat{U}(k, s). \quad (8)$$

Собрав все члены с $\hat{U}(k, s)$, получим:

$$\hat{U}(k, s) = \frac{\rho[s\hat{f}(k) + \hat{g}(k)]}{\rho s^2 + Ek^2 + \frac{\alpha}{s + \beta}}. \quad (9)$$

Обратные преобразования Лапласа и Фурье. Полученное выражение дает решение в преобразо-

ванном виде. Чтобы вернуть $u(x, t)$, нужно выполнить обратное преобразование Лапласа [29] и Фурье [30]:

$$U(x, s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{U}(k, s) \exp(ikx) dk, \quad (10)$$

затем:

$$u(x, t) = L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \left[\hat{s}f(k) + \hat{g}(k) \right]}{\rho s^2 + Ek^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}} \exp(ikx) dk \right\}. \quad (11)$$

Процедура обратного преобразования в общем случае сложна, но при конкретном выборе начальных условий $f(x)$ и $g(x)$, а также параметров α, β, E, ρ может быть упрощена или сводится к табличным интегральным преобразованиям. Например, для гармонических по пространству начальных возмущений (типа $f(x) = \exp(-x^2)$) или дельта-функциональных условий ($f(x) = \delta(x)$) решение может быть найдено в приближенном виде через интегрирование по контуру и применение известных формул обратных преобразований Фурье и Лапласа.

Изучим знаменатель выражения для $\hat{U}(k, s)$ при единичных константах материала. Для обратного преобразования Лапласа нужно исследовать корни по s . Умножим на $s + \beta$:

$$(s + \beta)(s^2 + k^2) + \alpha = s^3 + \beta s^2 + k^2 s + \beta k^2 + \alpha. \quad (12)$$

Корни этого кубического уравнения по s определяют моды затухания и осцилляций.

Частные случаи и упрощения. Приведем некоторые частные случаи и упрощения:

1. Если $\alpha = 0$, тогда после обратного преобразования Лапласа и Фурье получаем классическое волновое решение (что следует также при подстановке в уравнение).

С памятью наблюдается отступление от классического сценария распространения: волна менее четко распадается на бегущие фронты, проявляя диссипативный характер. Большая α усиливает память: волна сильнее затухает и «размывается».

2. При малых, но ненулевых α , добавляется член $\frac{\alpha}{s+\beta}$, и в разложении по α появляются затухающие поправки. Можно строго показать, что эти поправки приводят к уменьшению амплитуды волн с ростом t .

3. Если β очень велико ($\beta \rightarrow \infty$), то для умеренных s память исчезает сразу, поскольку $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{s+\beta} \approx 0$. Это соответствует быстрому исчезновению памяти (мгновенная релаксация), приближая задачу к упругой. Формально можно разложить при больших β в виде:

$$\frac{\alpha}{s+\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{1+\frac{s}{\beta}} \approx \frac{\alpha}{\beta} \left(1 - \frac{s}{\beta} + \dots \right).$$

4. При $\beta \rightarrow \infty, \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0$.

5. Если α велика и β мала, материал долго «помнит» деформации, что приводит к значительно

более медленному распространению и сильному затуханию волны.

Изучая поведение решения при изменении параметров системы, можно понять, какие режимы доминируют: затухающие, колебательные или квазистатические.

Приведем некоторые частные решения. При начальных условиях $u(x, 0) = f(x) = \exp(-x^2)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x) = 0$. Гауссов импульс удобен для аналитического рассмотрения, поскольку преобразование Фурье гауссовой функции хорошо известно $\hat{f}(k) = \sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{k^2}{4}\right)$ [28]. Тогда при гауссовом импульсе и безразмерных параметрах материала:

$$\hat{U}(k, s) = \frac{s\sqrt{\pi} \cdot \exp\left(-\frac{k^2}{4}\right)}{s^2 + k^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}}.$$

При начальных условиях дельта-функции $f(x) = \delta(x)$ ($\hat{f}(x) = 1$) и $g(x) = 0$ функция примет вид:

$$\hat{U}(k, s) = \frac{s}{s^2 + k^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}}.$$

Дельта-функция упрощает анализ, потому что можно трактовать это как фундаментальное решение (функция Грина) задачи [31]. Детальный анализ особенностей в s -плоскости позволит описать эволюцию единичного импульса и определить, с какой скоростью он затухает и расширяется.

Случай начального дельта-импульса. Проведем обратное преобразование Фурье для функции $\hat{U}(k, s)$, соответствующее начальному дельта-импульсу. Рассмотрим фиксированный s и выполним обратное преобразование Фурье по k . Выполним замену $A(s) = s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}$, где $a = \sqrt{A(s)}$, и применив стандартную пару Фурье¹, получим:

$$F_{k \rightarrow x}^{-1} \left\{ \frac{1}{k^2 + A(s)} \right\} = s \frac{1}{2\sqrt{A(s)}} \exp\left(-|x|\sqrt{A(s)}\right). \quad (13)$$

Таким образом, после обратного преобразования Фурье:

$$U(x, s) = \frac{s}{2\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}}} \exp\left(-|x|\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}}\right). \quad (14)$$

Теперь необходимо осуществить обратное преобразование Лапласа s по t . Прямое аналитическое выражение в элементарных или стандартных специальных функциях без интеграла не получить. Поэтому рассмотрим разложение в ряд по малому

¹ Porscha McRobbie, Eitan Geva (2011). Fourier Transform Pairs // Wolfram Demonstrations Project. URL: demonstrations.wolfram.com/FourierTransformPairs/

параметру α , предполагая α достаточно малым. Такой подход даст нам приближенное аналитическое решение для $u(x, t)$. Для этого рассмотрим подкоренной аргумент и введем малый параметр α и представим $\frac{\alpha}{s+\beta}$ как «малое возмущение», поскольку s^2 — доминирующий член. Разложение экспоненты для малой α , используя $\left(\exp\left(-|x|\frac{\alpha}{2(s+\beta)}\right) \approx 1 - \frac{|x|\alpha}{2(s+\beta)}\right)$ и комбинируя результаты:

$$U(x, s) \approx \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4s(s+\beta)}\right) \exp(-|x|s) \left(1 - \frac{|x|\alpha}{2(s+\beta)}\right). \quad (15)$$

Перемножая и сохраняя члены до первого порядка по α , получим:

$$U(x, s) \approx \frac{1}{2} \exp(-|x|s) - \frac{|x|\alpha}{4(s+\beta)} \exp(-|x|s) - \frac{\alpha}{4s(s+\beta)} \exp(-|x|s). \quad (16)$$

Обратное преобразование Лапласа для восстановления функции $u(x, t)$ производится также по частям:

$$\begin{aligned} L_s^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \exp(-|x|s) \right\} (t) &= \frac{1}{2} \delta(t - |x|); \\ L_s^{-1} \left\{ -\frac{|x|\alpha \exp(-|x|s)}{4(s+\beta)} \right\} (t) &= \\ &= -\frac{|x|\alpha}{4} \exp(-\beta(t - |x|)) H(t - |x|); \\ L_s^{-1} \left\{ -\frac{\alpha}{4s(s+\beta)} \exp(-|x|s) \right\} (t) &= \\ &= -\frac{\alpha}{4\beta} [H(t - |x|) - \exp(-\beta(t - |x|)) H(t - |x|)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда итоговое выражение для $u(x, t)$ примет вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \delta(t - |x|) - \alpha \left[\frac{|x|}{4} \exp(-\beta(t - |x|)) H(t - |x|) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\beta} [1 - \exp(-\beta(t - |x|)) H(t - |x|)] \right] + O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где выражение $t - |x|$ (на самом деле $t' - |x|'$) выражается в размерных параметрах:

$$t' - |x'| = \frac{t}{T_0} - \frac{|x|}{L_0} = \frac{t}{T_0} - \frac{|x|}{c_0 T_0} = \frac{t - \frac{|x|}{c_0}}{T_0}, \text{ где } \frac{|x|}{c_0} \text{ — физическое время, за которое фронт волны, движущийся со скоростью } c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \text{ достигает точки, отстоящей от источника на расстояние } |x|. \text{ В исходных размерных уравнениях именно этот масштаб времени определяет, в какой момент фронт приходит в точку пространства.}$$

Случай начального гауссова импульса. Для функции с гауссовым импульсом представление дробной части возможно через контурный интеграл. Обозначим $M = s^2 + \gamma = s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}$ и $\gamma = \frac{\alpha}{s+\beta}$, тогда интеграл обратного преобразования Фурье примет вид:

$$U(x, s) = \frac{s\sqrt{\pi}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{k^4}{4}\right) \cdot \exp(ikx)}{k^2 + M} dk. \quad (19)$$

Экспоненциальный множитель $\exp\left(-\frac{k^4}{4}\right)$ быстро убывает при больших k , указывает на гладкость обратного преобразования. Основной вклад в интеграл вносит область $|k| \sim 0$.

Решение будет производиться на основе теории вычетов. Функция имеет полюса, обусловленные знаменателем $k^2 + M = 0$, имеющим корни $k_{1,2} = \pm i\sqrt{M} = \pm i\sqrt{s^2 + \gamma}$. Замыкаться контур интегрирования будет в верхней полуплоскости, если $x > 0$, и в нижней полуплоскости, если $x < 0$. Это связано с фактором $\exp(ikx)$, обеспечивающим затухание интеграла на соответствующем дуговом контуре при больших $|k|$.

Рассмотрим для случая, когда $x > 0$. Используем теорему Коши для замкнутого контура. Вычет в точке $k = i\sqrt{M}$:

$$\begin{aligned} \text{Res} &= \lim_{k \rightarrow i\sqrt{M}} (k - i\sqrt{M}) \frac{\exp\left(-\frac{k^4}{4}\right) \cdot \exp(ikx)}{k^2 + M} = \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{M^2}{4}\right) \cdot \exp(-\sqrt{M}x)}{2i\sqrt{M}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Обратное преобразование Фурье для случая, когда $x > 0$ (аналогичные преобразования и для $x < 0$):

$$\begin{aligned} U(x, s) &= \frac{s\sqrt{\pi}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{M}} \exp\left(-\frac{M^2}{4}\right) \exp(-\sqrt{M}x) = \\ &= \frac{s\sqrt{\pi}}{2\sqrt{M}} \exp\left(-\frac{M^2}{4}\right) \exp(-\sqrt{M}x). \end{aligned} \quad (21)$$

При объединении результатов для $x > 0$ и $x < 0$ можно заметить, что $\exp(\sqrt{M}x)$ при $x < 0$ можно переписать как $\exp(-\sqrt{M}|x|)$, а при $x > 0$ аналогично $\exp(-\sqrt{M}x) = \exp(-\sqrt{M}|x|)$. Тогда итоговую формулу для обратного преобразования Фурье (с подстановкой $M = s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}$) возможно представить в единой форме:

$$\begin{aligned} U(x, s) &= \frac{s\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}}} \exp\left(-\frac{\left(s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}\right)^2}{4}\right) \times \\ &\quad \times \exp\left(-\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}} |x|\right). \end{aligned} \quad (22)$$

Обратное преобразование Лапласа определяет-ся как:

$$u(x, t) = L_s^{-1}[U(x, s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{s\sqrt{\pi}}{2\sqrt{M}} \exp\left(-\frac{M^2}{4}\right) \times \exp(-\sqrt{M}|x|) \exp(st) ds, \quad (23)$$

где γ — линия интегрирования в правой полуплоскости комплексной плоскости s .

Функция $M = s^2 + \frac{\alpha}{s+\beta}$ сложна для прямого обращения. Разложим ее по степеням $\frac{\alpha}{s+\beta}$, предполагая, что $\frac{\alpha}{s+\beta}$ мала при больших s , и подставив данное разложение в уравнение (22):

$$U(x, s) \approx \frac{s\sqrt{\pi}}{2\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{\beta}}} \exp\left(-\frac{\left(s^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{4}\right) \exp\left(-\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{\beta}}|x|\right). \quad (24)$$

В приближенном уравнении (24) $\exp\left(-\frac{\left(s^2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2}{4}\right)$ подавляет вклад при больших s , но малый s может быть доминирующим. Основной вклад в $u(x, t)$ дает экспонента $\exp\left(-\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{\beta}}|x|\right)$. При $\sqrt{s^2 + \frac{\alpha}{\beta}} \approx s + \frac{\alpha}{2s}$ получим следующее выражение для обратного преобразования Лапласа:

$$L_s^{-1}\left[\exp(-|x|s) \cdot \exp\left(-\frac{|x|\frac{\alpha}{2\beta}}{s}\right)\right](t), \quad (25)$$

тогда итоговое выражение для $u(x, t)$ имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(|x-t|\frac{\alpha}{2\beta})}{4t} - (x-t)^2 t\right) + O(\alpha^2), \quad (26)$$

где выражение $|x-t|$ (на самом деле $|x'-t'|$) выражается в размерных параметрах $|x'-t'| = |x - c_0 t|$.

Таким образом, получены выражения для безразмерных $u(x, t)$ на основе интегро-дифференциальных моделей распространения сейсмических волн через барьер с эффектом памяти для случая гауссова импульса и дельта-импульса.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Случай начального дельта-импульса. На рис. 2 показана временная эволюция амплитуды сейсмической волны, распространяющейся через барьер с эффектом памяти. Волна задана в виде дельта-импульса в начальный момент времени, и на графике представлены ее формы при нескольких фиксированных временах распространения. Каждый цвет соответствует разному моменту времени ($t = 2; 4; 6$ и 8 с). Параметры материала: $c_0 = 600$ м/с; $\alpha = 1,0$ 1/с³; $\beta = 0,2$ 1/с.

На самых ранних временных промежутках видно формирование острой, почти сингулярной

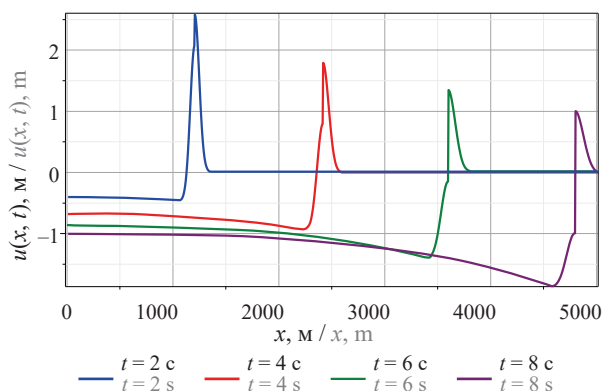


Рис. 2. Распространение сейсмической волны (при начальном дельта-импульсе) через барьер с эффектом памяти при разных моментах времени. Параметры материала: $c_0 = 600$ м/с; $\alpha = 1,0$ 1/с³; $\beta = 0,2$ 1/с

Fig. 2. Propagation of a seismic wave (under an initial delta impulse) through a barrier with a memory effect at different moments in time. Material parameters: $c_0 = 600$ m/s; $\alpha = 1.0$ 1/s³; $\beta = 0.2$ 1/s

вершины волны — это следствие того, что в начальный момент была задана дельта-функция, распространяющаяся с постоянной скоростью c_0 от точки возбуждения. С увеличением времени главный пик смещается вправо, соответствуя движению фронта волны по оси x .

Классическое уравнение волн без ядра памяти позволяет получать относительно простую картину распространения — амплитуда основного фронта со временем ослабевала бы или оставалась постоянной, но не вызвала дополнительных сложных структур. Наличие памяти в модели, заданной интегро-дифференциальными соотношениями, учитывающими «предыдущие состояния» деформации среды, приводит к появлению более сложных форм сигналов: на графике видны дополнительные всплески и затухающие «хвосты» за основным фронтом волны, что вызывает дополнительные пиковые возмущения и неоднородности в волновой форме.

На рис. 3 показано распространение сейсмического дельта-импульса через барьер с эффектом памяти в фиксированный момент времени ($t = 4$ с) для разных наборов параметров ядра памяти α и β . Они определяют, как волна «помнит» свое прошлое состояние и как быстро эта память затухает со временем.

Увеличение α усиливает проявление памяти. Сравним случаи равной β , но разной α (на рис. 3 соответствует синему и красному графикам). При более высокой α (красный график) амплитуда возмущений значительно сильнее: кривая уходит гораздо ниже нуля слева от барьера и при подъеме у барьера формируется более резкий скачок. Иными словами, повышенное значение α усиливает влияние прошлых состояний деформации среды, в результате чего волна приобретает более неоднородный, «рваный» характер.

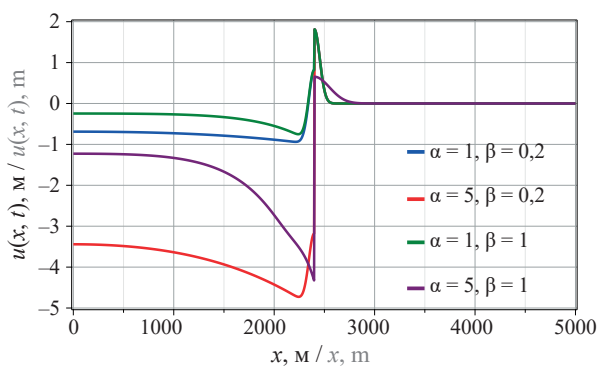


Рис. 3. Распространение сейсмической волны (при начальном дельта-импульсе) через барьер с эффектом памяти в момент времени $t = 4$ с при разных параметрах ядра памяти $K(t - \tau)$. Параметры материала: $c_0 = 600$ м/с

Fig. 3. Propagation of a seismic wave (under an initial delta impulse) through a barrier with a memory effect at time $t = 4$ s for different memory kernel parameters $K(t - \tau)$. Material parameters: $c_0 = 600$ m/s

Параметр β отвечает за скорость затухания «памяти» во времени. Сравним случаи равной α , но разной β (на рис. 3 соответствует синему и зеленому графикам). С увеличением β форма волны становится более локализованной возле барьера: появляется более выраженный пик, за которым следует относительно резкий спад. Иными словами, более высокая β усиливает эффект концентрации возмущения вблизи точки барьера, делая картину распределения волны более контрастной.

Рассмотрим фиолетовую линию ($\alpha = 5$, $\beta = 1$), где оба параметра велики. Здесь наблюдаются сильный пик в области барьера и выраженные отрицательные значения смещения слева. Это указывает на то, что при сильном эффекте памяти (при больших α) и быстрой ее «реализации» или «затухании» (при больших β) волна испытывает мощную локальную деформацию, материал «откликается» на прошлое состояние особенно резко и концентрировано.

Представленный график демонстрирует, что параметры α и β существенно влияют на форму сейсмической волны при прохождении через барьер с памятью. Повышение α приводит к более сильным, неоднородным возмущениям, а увеличение β фокусирует эти возмущения в более узкой области около барьера, создавая резкие скачки амплитуды. Таким образом, регулируя α и β , можно контролировать степень и характер деформаций волны при ее взаимодействии с барьером, учитывая прошлые состояния сред.

Случай начального гауссова импульса. На рис. 4 показан график распространения сейсмической волны, заданной в форме гауссова импульса, через барьер с эффектом памяти. Изображены четыре момента времени (при $t = 0,05$; $0,1$; $0,15$ и $0,2$ с). Параметры материалов заданы таким образом, чтобы скорость распространения волны в рассматриваемой

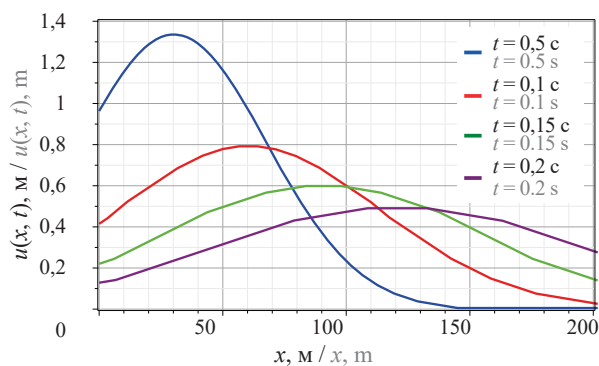


Рис. 4. Распространение сейсмической волны (при начальном гауссовом импульсе) через барьер с эффектом памяти при разных моментах времени. Параметры материала: $c_0 = 600$ м/с; $\alpha = 1,0$ 1/с³; $\beta = 0,1$ 1/с

Fig. 4. Propagation of a seismic wave (under an initial Gaussian impulse) through a barrier with a memory effect at different moments in time. Material parameters: $c_0 = 600$ m/s; $\alpha = 1.0$ 1/s³; $\beta = 0.1$ 1/s

мой среде была $c_0 = 600$ м/с. Параметры ядра памяти $\alpha = 1,0$ 1/с³; $\beta = 0,1$ 1/с.

Вместо жесткой сингулярной вершины, как у дельта-импульса, исходная волна имеет плавный гауссов профиль. Это приводит к более мягкому характеру распространения. На начальных этапах ($t = 0,05$ с) волна довольно сильно проявлена и имеет четко выраженный максимум.

По мере увеличения времени ($t = 0,1$; $0,15$; $0,2$ с) гауссов импульс постепенно смещается вдоль оси x и немного «расплывается» — амплитуда уменьшается, фронт волны становится шире. Это отражает распространение упругой деформации через барьер, причем эффект памяти среды приводит к тому, что волна не просто равномерно расплывается, как это было бы в чисто упругом случае без памяти, а может испытывать более сложные деформации формы.

Примененные параметры ($\alpha = 1,0$, $\beta = 0,1$) дают умеренный эффект памяти. Поскольку $\beta = 0,1$ относительно невелика, затухание памяти идет медленнее, чем при больших β . Это означает, что прошлые состояния среды влияют на текущее распространение более мягко и дольше во времени. В результате волна не приобретает резких всплесков или резких асимметрий, а напротив — сохраняет достаточно гладкую форму, хотя со временем слегка асимметрично искажается.

На рис. 5 приведен график распределения амплитуды сейсмической волны, заданной гауссовым импульсом, в фиксированный момент времени $t = 0,05$ с. Сравняются разные варианты параметров ядра памяти α и β .

Исследовано влияние параметров α и β . При переходе от $\alpha = 0,1$ (зеленая кривая) к $\alpha = 1$ (синяя) и далее к $\alpha = 10$ (красная) видно, что волновой профиль заметно меняется:

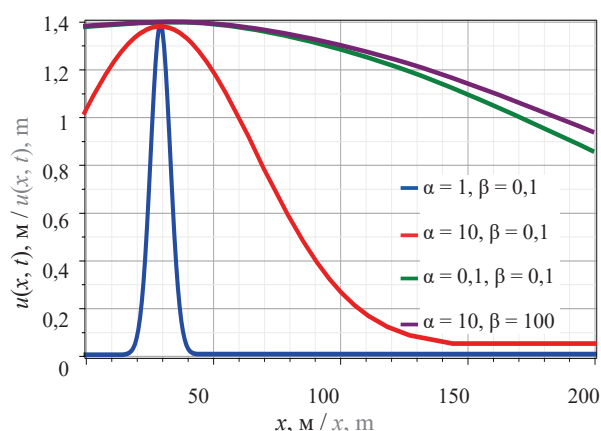


Рис. 5. Распространение сейсмической волны (при начальном гауссовом импульсе) через барьер с эффектом памяти в момент времени $t = 0,05$ с при разных параметрах ядра памяти $K(t - \tau)$. Параметры материала: $c_0 = 600$ м/с

Fig. 5. Propagation of a seismic wave (under an initial Gaussian impulse) through a barrier with a memory effect at time $t = 0.05$ s for different memory kernel parameters $K(t - \tau)$. Material parameters: $c_0 = 600$ m/s

1. Для низкого $\alpha = 0,1$ имеют место меньшие амплитуды и более пологая форма. Это означает, что эффект памяти не очень силен, и волна сохраняет более «простой» характер.

2. Для средних $\alpha = 1$ (синяя кривая) волна становится уже и имеет более выраженный пик. Более сильный эффект памяти создает более концентрированное возмущение.

3. Для высоких $\alpha = 10$ амплитуда и ширина гауссового импульса становятся еще более выраженными. Волна выглядит «раздутой» и в то же время высокой, что показывает значительное влияние прошлых состояний материала, усиливая и деформируя импульс. Таким образом, рост α усиливает отклик среды на предыдущее состояние, что либо концентрирует волновой фронт (при умеренных значениях), либо создает расширенный, но интенсивный профиль (при очень высоких значениях).

При варьировании параметра β (при равных α) наблюдается следующий характер волнового процесса:

1. При $\beta = 0,1$ (красная линия) волна высокая, вытянутая и ярко выраженная. Память среды «растянута» во времени, затухает медленно. Это дает мощный и долговременный эффект от прошлых деформаций.

2. При $\beta = 100$ (фиолетовая линия) память среды затухает гораздо быстрее. Однако благодаря очень большому α амплитуда остается высокой, но профиль становится более плавным по оси x и менее концентрированным у фронта. Быстрый распад памяти при высокой ее интенсивности ($\alpha = 10$) приводит к тому, что волна формируется как почти равномерно смещенное состояние с высокой амплитудой, но без острого пика. Иными словами, высокое β означает быстрое затухание памяти, что сглаживает быстрые

перепады, однако при большом α общая амплитуда деформаций остается на высоком уровне, хотя и в более «спокойной» форме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Проведенное исследование демонстрирует принципиальное значение эффектов памяти материала для процессов распространения сейсмических волн через специализированные защитные барьеры. В отличие от классических волновых моделей в упругих средах без «памяти», рассмотренные интегро-дифференциальные уравнения, включающие экспоненциальные ядра памяти, дают возможность описать более сложное и тонкое поведение волнового поля. Таким образом, представленные в статье модель и соответствующий анализ позволили существенно расширить понимание механизмов взаимодействия сейсмических волн с барьерными слоями, обладающими эффектом памяти.

Полученные в работе аналитические решения и их последующий анализ обеспечивают ряд ключевых результатов.

Влияние памяти на форму фронта волны. Введение интегро-дифференциальных членов, учитывающих предысторию деформаций, приводит к заметному изменению формы волнового импульса при его распространении. Для дельта-импульса начальное «острое» возмущение, типичное для упругой среды, трансформируется в более сложную структуру с дополнительными «хвостами», отражающими накопленный опыт деформаций. Аналогично, гауссов импульс при прохождении через барьер с памятью не просто расширяется и смещается во времени и пространстве, но и приобретает искажения, связанные с взаимодействием с предыдущими состояниями системы.

Параметры ядра памяти α и β непосредственно контролируют интенсивность и длительность памяти материала. При высоких значениях α материал долго «помнит» предшествующие деформации, что приводит к существенным искажениям волнового фронта, усилению затухания или, напротив, к формированию локальных пиковых значений амплитуды. При увеличении β процесс «забывания» ускоряется, но влияние прошлых состояний на текущую волну может стать более концентрированным и резким. Таким образом, варьируя параметры ядра памяти, можно добиться целенаправленного изменения волнового поля — от формирования плавно затухающих распространений до резких, локализованных пиков и неоднородностей.

Изучение двух наиболее распространенных начальных условий — дельта-импульса и гауссова импульса — показало, что память среды по-разному влияет на их эволюцию, что говорит о чувствительности к начальному импульсу. Острые импульсные возмущения, будучи простыми в классической постановке, в среде с памятью ведут себя сложнее,

формируя системы вторичных волн и возмущений. Гладкие импульсы (гауссовы) при наличии памяти не просто «расплываются», как в упругом случае, но и могут приобретать асимметричную форму, а также формировать зоны повышенной концентрации энергии вблизи барьера.

Представленные результаты имеют непосредственное прикладное значение для задач сейсмозащиты зданий и сооружений. Возможность предсказать динамику сейсмической волны, учитывая

память материала барьера, позволяет оптимально проектировать специальные прослойки или структурные решения, снижающие воздействие сейсмических волн на сооружения. В частности, варьируя свойствами барьерных слоев — их составом, пористостью, вязкоупругими характеристиками и временем релаксации, можно создать структуры, эффективно «перераспределяющие» энергию волны, снижающие пиковые нагрузки и сейсмические воздействия на инженерные объекты.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoustical Physics*. 2011. Vol. 57. Issue 3. Pp. 420–426. DOI: 10.1134/S1063771011030109
2. Kuznetsov S.V. Acoustic black hole in a hyperelastic rod // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2023. Vol. 74. Issue 3. DOI: 10.1007/s00033-023-02020-x
3. Bratov V., Murachev A., Kuznetsov S.V. Utilization of a Genetic Algorithm to Identify Optimal Geometric Shapes for a Seismic Protective Barrier // *Mathematics*. 2024. Vol. 12. Issue 3. P. 492. DOI: 10.3390/math12030492
4. Shemali A.A., Javkhlan S., Kuznetsov S. Seismic protection from bulk and surface waves // *AIP Conference Proceedings*. 2023. Vol. 2759. P. 030006. DOI: 10.1063/5.0103993
5. Dudchenko A.V., Dias D., Kuznetsov S.V. Vertical wave barriers for vibration reduction // *Archive of Applied Mechanics*. 2021. Vol. 91. Issue 1. Pp. 257–276. DOI: 10.1007/s00419-020-01768-2
6. Митрошин В.А. Сейсмическая защита зданий и сооружений с применением метаматериалов: текущее состояние и перспективы развития // *Архитектура, строительство, транспорт*. 2024. № 2 (108). С. 67–83. DOI: 10.31660/2782-232X-2024-2-67-83. EDN FRXXXI.
7. Григорьев Ю.М., Гаврильева А.А. Задача распространения поверхностной волны Релея в полупространстве среды Коссера в случае однородных и упруго-стесненных граничных условий // *Математические заметки СВФУ*. 2023. Т. 30. № 4. С. 81–105. DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-81-104. EDN CWGERM.
8. Заславский Ю.М., Заславский В.Ю. Анализ сейсмических колебаний, возбуждаемых движущимся железнодорожным составом // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2021. Т. 14. № 1. С. 91–101. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.8. EDN FYADJZ.
9. Огородников Е.Н., Радченко В.П., Унгарова Л.Г. Математические модели нелинейной вязкоупругости с операторами дробного интегро-дифференцирования // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. 2018. № 2. С. 147–161. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13. EDN XUGGDZ.
10. Bykov D.L., Martynova E.D. Structure-energy analysis of models of nonlinearly viscoelastic materials with several aging and viscosity functions // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46. Issue 1. Pp. 52–61. DOI: 10.3103/S0025654411010080
11. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G., Zhelyazov T., Datcheva M. On the Problem of Nonstationary Waves Propagation in a Linear-viscoelastic Layer // *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*. 2021. Vol. 74. No. 5. Pp. 748–755. DOI: 10.7546/CRABS.2021.05.13
12. Hossain M.E. Numerical investigation of memory-based diffusivity equation: the integro-differential equation // *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2016. Vol. 41. Issue 7. Pp. 2715–2729. DOI: 10.1007/s13369-016-2170-y
13. Rangelov T.V., Dineva P.S., Manolis G.D. Numerical Solution of Integro-Differential Equations Modelling the Dynamic Behavior of a Nano-Cracked Viscoelastic Half-Plane // *Cybernetics and Information Technologies*. 2020. Vol. 20. Issue 6. Pp. 105–115. DOI: 10.2478/cait-2020-0065
14. Emmrich E., Weckner O. Analysis and numerical approximation of an integro-differential equation modeling non-local effects in linear elasticity // *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2007. Vol. 12. Issue 4. Pp. 363–384. DOI: 10.1177/1081286505059748
15. Dehghan M. Solution of a partial integro-differential equation arising from viscoelasticity // *International Journal of Computer Mathematics*. 2006. Vol. 83. Issue 1. Pp. 123–129. DOI: 10.1080/00207160-500069847
16. Neta B., Igwe J.O. Finite differences versus finite elements for solving nonlinear integro-differential equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1985. Vol. 112. Issue 2. Pp. 607–618. DOI: 10.1016/0022-247X(85)90266-5
17. Guo J., Xu D., Qiu W. A finite difference scheme for the nonlinear time-fractional partial integro-differential equation // *Mathematical Methods in the Ap-*

plied Sciences. 2020. Vol. 43. Issue 6. Pp. 3392–3412. DOI: 10.1002/mma.6128

18. Sokolovskyy Y., Levkovych M., Mokrytska O., Kaplunskyy Y. Numerical Simulation and Analysis of Systems with Memory Based on Integro-Differentiation of Fractional Order // 2018 IEEE 13th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT). 2018. Pp. 102–105. DOI: 10.1109/STC-CSIT.2018.8526702

19. Vlasov V.V., Rautian N.A. Well-Posed Solvability and the Representation of Solutions of Integro-Differential Equations Arising in Viscoelasticity // Differential Equations. 2019. Vol. 55. Issue 4. Pp. 561–574. DOI: 10.1134/S0012266119040141

20. Власов В.В., Раутиан Н.А. Исследование интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Известия высших учебных заведений. Математика. 2012. № 6. С. 56–60. EDN OWQBVF.

21. Vlasov V.V., Rautian N.A. Spectral analysis and representation of solutions of integro-differential equations with fractional exponential kernels // Transactions of the Moscow Mathematical Society. 2019. Vol. 80. Pp. 169–188. DOI: 10.1090/mosc/298. EDN CBRRRV.

22. Дурдиев Д.К., Болтаев А.А. Задача определения ядер в двумерной системе уравнений вязкоупругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. 2023. Т. 43. С. 31–47. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.43.31. EDN QENKLT.

23. Bobyleva T., Shamaev A. Problem of damping oscillations of a mechanical system with integral memory // IOP Conference Series : Materials Science and Engineering. 2020. Vol. 869. Issue 2. P. 022011. DOI: 10.1088/1757-899X/869/2/022011

24. Коровайцева Е.А., Пиеничников С.Г., Бажлева Е., Желязов Т. Нестационарные волны в линейно-вязкоупругом цилиндре с жестким включением // Проблемы прочности и пластичности. 2022. Т. 84. № 1. С. 5–14. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-5-14. EDN XQNIFO.

25. Li Y., Yang Z. Exponential Attractor for the Viscoelastic Wave Model with Time-Dependent Memory Kernels // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2021. DOI: 10.1007/s10884-021-10035-z. EDN ENBUOO.

26. Brunner H. Volterra integral equations. Cambridge University Press, 2017. DOI: 10.1017/9781316162491

27. Schiff J.L. The Laplace transform: theory and applications. Springer Science & Business Media, 2013. 236 p.

28. Bracewell R.N. The Fourier Transform and Its Applications. 3rd ed. Boston : McGraw-Hill, 2000. 640 p.

29. Cohen A.M. Inversion formulae and practical results // Numerical Methods and Algorithms. 2007. Vol. 5. Pp. 23–44. DOI: 10.1007/978-0-387-68855-8_2

30. Folland G.B. Fourier Analysis and Its Applications. American Mathematical Soc., 2009. 433 p.

31. Cole K.D., Beck J.V., Haji-Sheikh A., Litkouhi B. Methods for Obtaining Green's Functions // Heat Conduction Using Greens Functions. 2011. Pp. 101–148. DOI: 10.1201/9781439895214-9

Поступила в редакцию 23 января 2025 г.

Принята в доработанном виде 27 апреля 2025 г.

Одобрена для публикации 29 апреля 2025 г.

ОБ АВТОРЕ: **Сергей Гургенович Саиян** — научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов им. А.Б. Золотова (НОЦ КМ им. А.Б. Золотова), преподаватель кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; РИНЦ ID: 987238, Scopus: 57195230884, ORCID: 0000-0003-0694-4865, ResearcherID: AAT-1424-2021; Berformert@gmail.com.

REFERENCES

1. Kuznetsov S.V. Seismic waves and seismic barriers. *Acoustical Physics*. 2011; 57(3):420–426. DOI: 10.1134/S1063771011030109

2. Kuznetsov S.V. Acoustic black hole in a hyperelastic rod. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2023; 74(3). DOI: 10.1007/s00033-023-02020-x

3. Bratov V., Murachev A., Kuznetsov S.V. Utilization of a Genetic Algorithm to Identify Optimal Geo-

metric Shapes for a Seismic Protective Barrier. *Mathematics*. 2024; 12(3):492. DOI: 10.3390/math12030492

4. Shemali A.A., Javkhlan S., Kuznetsov S. Seismic protection from bulk and surface waves. *AIP Conference Proceedings*. 2023; 2759:030006. DOI: 10.1063/5.0103993

5. Dudchenko A.V., Dias D., Kuznetsov S.V. Vertical wave barriers for vibration reduction. *Archive of Ap-*

- plied Mechanics*. 2021; 91(1):257-276. DOI: 10.1007/s00419-020-01768-2
6. Mitroshin V.A. Seismic protection of buildings and structures using metamaterials: current status and development prospects. *Architecture, Construction, Transport*. 2024; 2(108):67-83. DOI: 10.31660/2782-232X-2024-2-67-83. EDN FRXXXI. (rus.).
 7. Grigor'ev Yu.M., Gavrilieva A.A. Propagation problem of a Rayleigh surface wave in the half-space of a Cosserat medium in the case of homogeneous and elastically constrained boundary condition. *Mathematical notes of NEFU*. 2023; 30(4):81-105. DOI: 10.25587/2411-9326-2023-4-81-104. EDN CWGERM. (rus.).
 8. Zaslavsky Yu.M., Zaslavsky V.Yu. Analysis of seismic vibrations excited by a moving railway construction. *Computational Continuum Mechanics*. 2021; 14(1):91-101. DOI: 10.7242/1999-6691/2021.14.1.8. EDN FYADJZ. (rus.).
 9. Ogorodnikov E.N., Radchenko V.P., Ungarova L.G. Mathematical models of nonlinear viscoelasticity with operators of fractional integro-differentiation. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2018; 2:147-161. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.2.13. EDN XUGGDZ. (rus.).
 10. Bykov D.L., Martynova E.D. Structure-energy analysis of models of nonlinearly viscoelastic materials with several aging and viscosity functions. *Mechanics of Solids*. 2011; 46(1):52-61. DOI: 10.3103/S0025654411010080
 11. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G., Zhelyazov T., Datcheva M. On the Problem of Nonstationary Waves Propagation in a Linear-viscoelastic Layer. *Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences*. 2021; 74:5:748-755. DOI: 10.7546/CRABS.2021.05.13
 12. Hossain M.E. Numerical investigation of memory-based diffusivity equation: the integro-differential equation. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2016; 41(7):2715-2729. DOI: 10.1007/s13369-016-2170-y
 13. Rangelov T.V., Dineva P.S., Manolis G.D. Numerical Solution of Integro-Differential Equations Modelling the Dynamic Behavior of a Nano-Cracked Viscoelastic Half-Plane. *Cybernetics and Information Technologies*. 2020; 20(6):105-115. DOI: 10.2478/cait-2020-0065
 14. Emmrich E., Weckner O. Analysis and numerical approximation of an integro-differential equation modeling non-local effects in linear elasticity. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2007; 12(4):363-384. DOI: 10.1177/1081286505059748
 15. Dehghan M. Solution of a partial integro-differential equation arising from viscoelasticity. *International Journal of Computer Mathematics*. 2006; 83(1):123-129. DOI: 10.1080/00207160500069847
 16. Neta B., Igwe J.O. Finite differences versus finite elements for solving nonlinear integro-differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1985; 112(2):607-618. DOI: 10.1016/0022-247X(85)90266-5
 17. Guo J., Xu D., Qiu W. A finite difference scheme for the nonlinear time-fractional partial integro-differential equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2020; 43(6):3392-3412. DOI: 10.1002/mma.6128
 18. Sokolovskyy Y., Levkovych M., Mokrytska O., Kaplunskyy Y. Numerical Simulation and Analysis of Systems with Memory Based on Integro-Differentiation of Fractional Order. *2018 IEEE 13th International Scientific and Technical Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*. 2018; 102-105. DOI: 10.1109/STC-CSIT.2018.8526702
 19. Vlasov V.V., Rautian N.A. Well-Posed Solvability and the Representation of Solutions of Integro-Differential Equations Arising in Viscoelasticity. *Differential Equations*. 2019; 55(4):561-574. DOI: 10.1134/S0012266119040141
 20. Vlasov V.V., Rautian N.A. Integrodifferential equations in viscoelasticity theory. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Matematika*. 2012; 6:56-60. EDN OWQBFV. (rus.).
 21. Vlasov V.V., Rautian N.A. Spectral analysis and representation of solutions of integro-differential equations with fractional exponential kernels. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*. 2019; 80:169-188. DOI: 10.1090/mosc/298. EDN CBRRRV.
 22. Durdiev D.K., Boltaev A.A. The problem of determining kernels in a two-dimensional system of viscoelasticity equations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*. 2023; 43:31-47. DOI: 10.26516/1997-7670.2023.43.31. EDN QENKLT. (rus.).
 23. Bobyleva T., Shamaev A. Problem of damping oscillations of a mechanical system with integral memory. *IOP Conference Series : Materials Science and Engineering*. 2020; 869(2):022011. DOI: 10.1088/1757-899X/869/2/022011
 24. Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G., Bazhlekova E., Zhelyazov T. Non-stationary waves in a linear-viscoelastic cylinder with rigid inclusion. *Problems of Strength and Plasticity*. 2022; 84(1):5-14. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-5-14. EDN XQNIFO. (rus.).
 25. Li Y., Yang Z. Exponential Attractor for the Viscoelastic Wave Model with Time-Dependent Memory Kernels. *Journal of Dynamics and Differential Equations*. 2021. DOI: 10.1007/s10884-021-10035-z. EDN ENBUOO.
 26. Brunner H. *Volterra integral equations*. Cambridge University Press, 2017. DOI: 10.1017/9781316162491
 27. Schiff J.L. *The Laplace transform: theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2013; 236.

28. Bracewell R.N. *The Fourier Transform and Its Applications*. 3rd ed. Boston, McGraw-Hill, 2000; 640.

29. Cohen A.M. Inversion formulae and practical results. *Numerical Methods and Algorithms*. 2007; 5:23-44. DOI: 10.1007/978-0-387-68855-8_2

30. Folland G.B. *Fourier Analysis and Its Applications*. American Mathematical Soc., 2009; 433.

31. Cole K.D., Beck J.V., Haji-Sheikh A., Litkouhi B. Methods for Obtaining Green's Functions. *Heat Conduction Using Greens Functions*. 2011; 101-148. DOI: 10.1201/9781439895214-9

Received January 23, 2025.

Adopted in revised form on April 27, 2025.

Approved for publication on April 29, 2025.

B I O N O T E S: **Sergey G. Saiyan** — researcher at the Scientific and Educational Center for Computer Modeling of Unique Buildings, Structures and Complexes named after A.B. Zolotova, lecturer at the Department of Computer Science and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ID RSCI: 987238, Scopus: 57195230884, ORCID: 0000-0003-0694-4865, ResearcherID: AAT-1424-2021; Berformert@gmail.com.