

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.04

DOI: 10.22227/1997-0935.2025.11.1679-1690

Обобщенные гиперупругие потенциалы для одномерных задач из бимодульных материалов

Сергей Владимирович Кузнецов, Сергей Андреевич Калиновский

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет
(НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Большое количество природных и искусственных материалов проявляют различные механические свойства при сжатии и растяжении. Такие материалы называют бимодульными. Материалы, имеющие один и тот же модуль упругости при сжатии и растяжении при испытаниях, в процессе их работы в строительных конструкциях проявляют свойства бимодульных.

Материалы и методы. Исследование связано с построением семейства однопараметрических гладких бесконечно дифференцируемых гиперупругих потенциалов для несжимаемых бимодульных материалов при одномерном движении; выводом разрешающих уравнений замкнутой формы, включая уравнение движения, уравнение совместности Адамара и уравнение энергетического баланса; выполнением динамического анализа распространения гармонических колебаний в полубесконечном стержне. Разрабатываемый метод основан на комбинированном механико-термодинамическом подходе в сочетании с энергосберегающей явной численной схемой Лакса – Вендроффа.

Результаты. Построено семейство однопараметрических бесконечно дифференцируемых гиперупругих потенциалов для трехмерных бесконечно малых задач о бимодульных изотропных материалах, дающее набор однородных приближений к прерывистому ступенчатому модулю упругости, принятому в исходной одномерной бимодульной постановке. Введенные зависимости позволяют либо получить аналитические решения, либо вывести явные разрешающие уравнения для ряда статических и динамических задач. Доказана теорема о сходимости к разрывному модулю для бимодульных материалов.

Выводы. Фронты ударных волн, которые появляются в одномерных стержнях, изготовленных из нелинейных материалов, моделируемых семейством гладких гиперупругих потенциалов, демонстрируют, что их образование не вызвано разрывом в соотношении напряжение – деформация, соответствующем бимодульным материалам. Фронты ударных волн возникают в материалах, моделируемых рассмотренными гладкими гиперупругими потенциалами как в случае бимодульного материала, так и любого другого гиперупругого материала. Распространение фронтов ударных волн приводит к рассеянию механической энергии, что подразумевает уменьшение амплитуд с расстоянием.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бимодульные материалы, гиперупругие потенциалы, фронты ударных волн, нелинейные материалы, гиперупругие материалы, уравнение совместности Адамара, уравнение энергетического баланса, волновая динамика, вибрационные воздействия, деформационные модели

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кузнецов С.В., Калиновский С.А. Обобщенные гиперупругие потенциалы для одномерных задач из бимодульных материалов // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 11. С. 1679–1690. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.11.1679-1690

Автор, ответственный за переписку: Сергей Андреевич Калиновский, KalinovskiiSA@mgsu.ru.

Smooth hyperelastic potentials for 1d problems of bimodular materials

Sergey V. Kuznecov, Sergey A. Kalinovsky

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);
Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. A large number of natural and artificial materials exhibit various mechanical properties under compression and tension. Such materials are called bimodular. It can also be noted that materials having the same modulus of elasticity under compression and tension during testing exhibit bimodular properties during their operation in building structures.

Materials and methods. The research described in the paper is related to the construction of a family of one-parameter smooth infinitely differentiable hyperelastic potentials for incompressible bimodular materials in one-dimensional motion; the derivation of closed-form solving equations, including the equation of motion, the Hadamard compatibility equation and the energy balance equation; performing a dynamic analysis of the propagation of harmonic vibrations in a semi-infinite rod. The developed method is based on a combined mechanical and thermodynamic approach combined with an energy-saving explicit numerical Lax – Wendroff scheme.

Results. A family of one-parameter infinitely differentiable hyperelastic potentials for three-dimensional infinitesimal problems on bimodular isotropic materials is constructed, which gives a set of homogeneous approximations to the discontinuous

stepwise modulus of elasticity adopted in the initial one-dimensional bimodular formulation. The introduced dependencies make it possible either to obtain analytical solutions or to derive explicit solving equations for a number of static and dynamic problems. The theorem of convergence to a discontinuous module for bimodular materials is proved.

Conclusions. Shock wave fronts that appear in one-dimensional rods made of nonlinear materials modeled by a family of smooth hyperelastic potentials clearly demonstrate that their formation is not caused by a discontinuity in the stress-strain ratio corresponding to bimodular materials. Shock wave fronts occur in materials modeled by the considered smooth hyperelastic potentials both in the case of bimodular material and any other hyperelastic material. The propagation of shock wave fronts leads to the dissipation of mechanical energy, which implies a decrease in amplitudes with distance.

KEYWORDS: bimodular materials, hyperelastic potentials, shock wave fronts, nonlinear materials, hyperelastic materials, Hadamard compatibility equation, energy balance equation, wave dynamics, vibration effects, deformation models

FOR CITATION: Kuznecov S.V., Kalinovsky S.A. Smooth hyperelastic potentials for 1d problems of bimodular materials. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(11):1679-1690. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.11.1679-1690 (rus.).

Corresponding author: Sergey A. Kalinovsky, KalinovskiiSA@mgsu.ru.

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Краткий обзор

Большое количество природных и искусственных материалов проявляют различные механические свойства при сжатии и растяжении, например, утрамбованный грунт [1, 2], керамика [3], металлические сплавы [4], композиты [5–7] и биологические ткани [8]. Если материал имеет два разных модуля упругости при растяжении и сжатии, то такой материал называется бимодульным. Бимодульные свойства также проявляют тела, ослабленные трещинами [9, 10]. Для большинства гранулированных материалов и геоматериалов модуль упругости при сжатии выше, чем при растяжении, $E_- > E_+$ [11, 12]. В таком случае модуль упругости бимодульного материала становится таким, как показано на рис. 1.

1.1.1. Статическая задача

1.1.2. Задача на вибрационные воздействия

Исследованы свободные и вынужденные колебания дискретных систем масс, содержащих бимодульные пружины [13–19], и в упругих пластинах и оболочках [20–25]. Что касается систем с дискретной массой, основанных на модифицированной модели Кельвина с двухмодульной пружиной (рис. 2, а), то было обнаружено, что в зависимости от жесткости, массы и упругости пружины свободные колебания могут сопровождаться колебаниями с удвоением периода (рис. 2, b); хаотическим поведением; появлением странных аттракторов Пуанкаре [17, 18, 26].

1.1.3. Волновая динамика

Работы по распространению акустических волн в бимодульных средах выявили несколько ин-

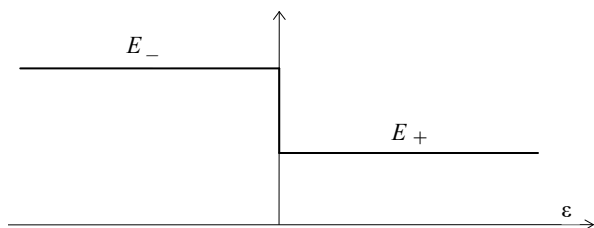


Рис. 1. Изменение модуля упругости, характерное для бимодульного материала

Fig. 1. Elastic modulus variation for a typical bimodular material

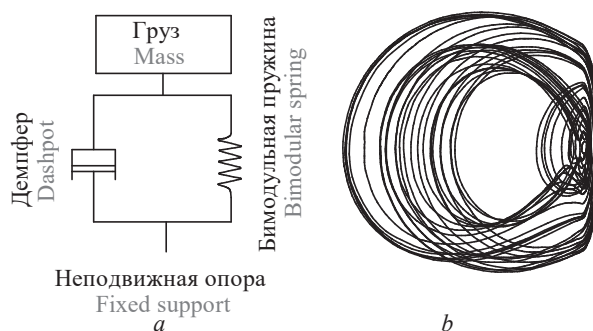


Рис. 2. Модифицированная модель Кельвина с бимодульной пружиной (а); типичный фазовый вид свободных колебаний в хаотическом режиме при низкой вязкости (b)

Fig. 2. Modified Kelvin model with bimodular spring (a); typical phase portrait for free oscillations in a chaotic regime at low viscosity (b)

тересных явлений, которые ранее не наблюдались в линейно-упругих средах (рис. 3). В частности, гармонические волны в бимодулярных стержнях проявляют: различие скоростей распространения импульсов с положительной и отрицательной деформацией; появление фронтов ударных волн, когда более быстро движущиеся импульсы обгоняют более медленно движущиеся; уменьшение амплитуды волн с увеличением расстояния от источника; формирование и распространение фронтов ударных волн при нагреве генератора [27–31]. Появление фронтов ударных волн и последующее затухание механической энергии объясняется резким изменением модуля упругости [27, 30, 32].

1.2. Постановка задачи

Настоящее исследование связано с построением семейства однопараметрических гладких бесконечно дифференцируемых гиперупругих потенциалов для несжимаемых бимодульных материалов при одномерном движении (рис. 4); выводом разрешающих уравнений замкнутой формы, включая уравнение движения, уравнение совместности Адамара и уравнение энергетического баланса; выполнением динамического анализа распространения гармонических колебаний в полубесконечном стержне. Разрабатываемый метод основан на комбинированном

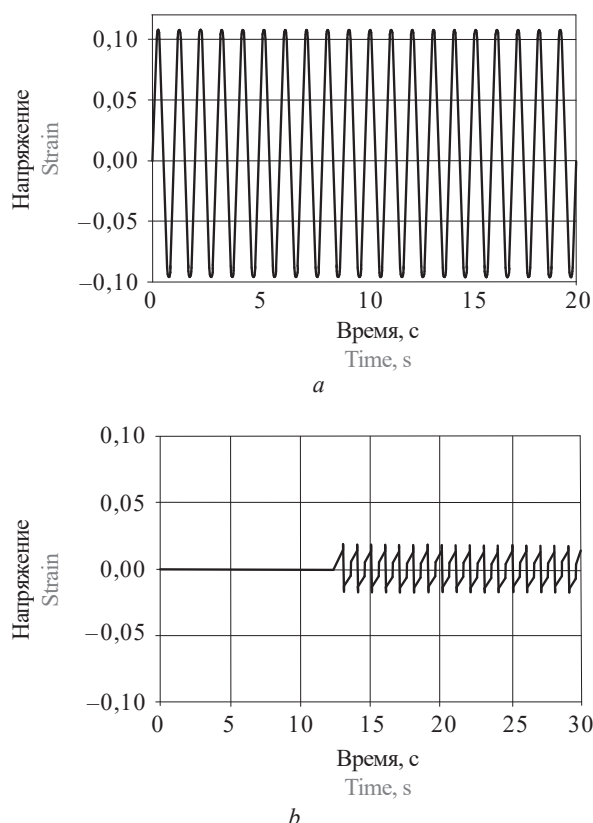


Рис. 3. Изменение смещения в полубесконечном бимодульном стержне [27]: *a* — профиль волны на краю стержня; *b* — профиль волны на расстоянии от края стержня

Fig. 3. Displacement variation in a semi-infinite bimodular rod, after [27]: *a* — wave profile at the rod edge; *b* — wave profile at a distance from the rod edge

механико-термодинамическом подходе в сочетании с энергосберегающей явной численной схемой Лакса – Вендроффа.

Существуют принципиальные преимущества рассмотренных гиперупругих потенциалов, которые обеспечивают: плавное изменение модуля упругости

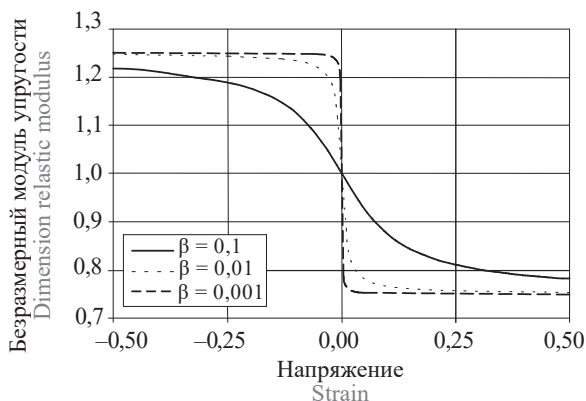


Рис. 4. Семейство гиперупругих потенциалов, обеспечивающих дифференцируемое приближение к модулю упругости бимодулярной среды (см. разделы 2 и 3)

Fig. 4. A family of hyperelastic potentials ensuring differentiable approximations to the elastic modulus of a bimodular medium (see sections 2 and 3)

в зависимости от деформации, как показано на рис. 4, по сравнению с разрывным модулем, в частности, более адекватное описание связанного гранулированного материала как при статических, так и при динамических нагрузках [33–35]; возможность получения аналитических выражений для всех разрешающих уравнений, относящихся к задачам распространения волн; наблюдение за формированием и распространением фронтов ударных волн в средах, определяемых построенным семейством гиперупругих потенциалов. Таким образом, по-видимому, впервые были обнаружены движущиеся фронты ударных волн при распространении колебательных волн в нелинейных одномерных средах, подчиняющихся плавной зависимости модулей упругости от деформации. Следует также подчеркнуть, что введенные гиперупругие потенциалы обеспечивают лучшее соответствие наблюдаемым соотношениям напряжение – деформация для связанных гранулированных материалов, чем бимодульная модель с резким изменением модулей упругости (рис. 1) [36, 37].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

2. Основные зависимости

2.1. Гиперупругие потенциалы

Рассмотрим бесконечно малую деформацию и зависимость модуля упругости от деформации, определяемую следующими соотношениями, которые вводятся, по-видимому, впервые:

$$E(\epsilon) = E_0 \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon}{\beta} \right) \right), \quad (2.1)$$

где $E_0 > 0$ — начальный касательный модуль при ϵ_0 ; α и β — безразмерные постоянные, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, они обеспечивают положительность $E(\epsilon)$.

При фиксированных значениях E_0 , α и изменяющемся β уравнение дает однопараметрическое семейство модулей упругости, показанное на рис. 4. Рассматриваемый модуль упругости $E(\epsilon)$ при $\beta \rightarrow 0$ соответствует разрывному случаю, приведенному на рис. 1.

Интегральное выражение, определяющее зависимость напряжения от деформации:

$$\sigma(\epsilon) = E_0 \left(1 - \frac{2\alpha\epsilon}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon}{\beta} \right) + \frac{\alpha\beta}{\pi} \ln \left(1 + \frac{\epsilon^2}{\beta^2} \right) \right). \quad (2.2)$$

Путем интегрирования выражения (2.2) получаем упругий потенциал:

$$W(\epsilon) = \int \sigma(\epsilon) d\epsilon = \frac{E_0}{2} \left(\epsilon^2 - \frac{2\alpha(\beta^2 - \epsilon^2)}{\pi} + \frac{2\alpha\beta\epsilon}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{\epsilon}{\beta} \right) + \frac{2\alpha\beta\epsilon}{\pi} \ln \left(1 + \frac{\epsilon^2}{\beta^2} \right) \right). \quad (2.3)$$

При конкретных значениях E_0 и α получаем иско- мое однопараметрическое семейство бесконечно дифференцируемых гиперупругих потенциалов.

2.2. Уравнение движения

Одномерное уравнение движения, записанное в терминах поля напряжений и перемещений, может быть записано в виде [38]:

$$\partial_x \sigma(x, t) = \rho \partial_{tt} u(x, t), \quad (2.4)$$

где ρ — плотность материала, не зависящая от ε из- за предполагаемой несжимаемости; $u(x, t)$ — поле смещений, связанное с деформацией согласно ли- нейному уравнению Коши:

$$\varepsilon(x, t) = \partial_x \sigma(x, t). \quad (2.5)$$

Подставляя полученное выражение (2.5) в урав- нение движения и принимая во внимание уравнение (2.1):

$$\partial_x \sigma(\varepsilon) = (\partial_\varepsilon(\sigma))(\partial_{xx}^2 u(x, t)); \quad (2.6)$$

далее:

$$c_0^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi} \arctg \left(\frac{\partial_x u(x, t)}{\beta} \right) \right) (\partial_{xx}^2 u(x, t)) = 0, \quad (2.7)$$

где c_0 — так называемая стержневая скорость [28, 39–42], определенная при $\varepsilon \rightarrow \pm 0$:

$$c_0 = \sqrt{\frac{E_0}{\rho}}. \quad (2.8)$$

Полученное уравнение (2.7) — это иско- мое нелинейное гиперболическое уравнение движения в форме поля перемещений.

2.3. Граничные и начальные условия

Рассмотрим полубесконечный стержень с на- грузкой в виде сосредоточенной силы, приложенной к левому концу ($x = 0$), и условиями затухания Зом- мерфельда, приложенными к бесконечно удаленно- му правому краю [43, 44]:

$$\sigma(x, t)|_{x=0} = f(t); \quad u(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = \sigma(x, t)|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.9)$$

где $f(t)$ — приложенная силовая нагрузка. Началь- ные условия соответствуют состоянию покоя:

$$u(x, t)|_{t=0} = \partial_t u(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (2.10)$$

2.4. Условие совместимости по Адамару

Если возникает разрыв, связанный с формиро- ванием и распространением фронта ударной волны, следует сформулировать условия совместимости по Адамару [45]:

$$[\partial_t u(x, t)] = -c_{\text{удар}} [\partial_x u(x, t)], \quad (2.11)$$

где квадратные скобки обозначают скачок, вызван- ный пространственным разрывом, а $c_{\text{удар}}$ — скорость распространения фронта ударной волны. Заметим,

что, согласно уравнению, знак скачка скорости рас- пространения зависит от знаков соответствующих скачков скорости частиц $[\partial_t u(x, t)]$ и деформации $[\partial_x u(x, t)]$ [46].

2.5. Энергетический баланс

Известно [45], что формирование и распро- странение фронтов ударных волн сопровождается затуханием механической энергии и одновременно выделением тепла. Уравнение энергетического ба- ланса можно записать в виде [45]:

$$F(t) = E_k(t) + E_s(t) + Q(t), \quad (2.12)$$

где $F(t)$ — работа внешних сил:

$$F(t) = f(t) \partial_t u(0, t); \quad (2.13)$$

$E_k(t)$ и $E_s(t)$ — кинетическая энергия и энергия де- формации соответственно [43]:

$$E_k(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty (\partial_t u(x, t))^2 dx; \quad (2.14)$$

$Q(t)$ — тепловая энергия, определяемая путем инте- грирования удельной тепловой энергии $q(x, t)$:

$$Q(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty q(x, t) dx. \quad (2.15)$$

2.6. Явная формулировка условия Куранта – Фридрихса – Леви

Численный метод Лакса – Вендроффа [47] ис- пользуется для решения уравнений (2.7)–(2.12). Принимая во внимание условную сходимость обычных явных численных схем [48], на прираще- ние времени накладывается условие Куранта – Фри- дрихса – Леви:

$$\Delta t < \Delta t_{CFL} \equiv \frac{\Delta x}{\max c(\varepsilon)}, \quad (2.16)$$

где Δt и Δx — временные и пространственные приращения соответственно; Δt_{CFL} — временное приращение Куранта – Фридрихса – Леви; $c(\varepsilon)$ — стержневая скорость, определяемая следующим выражением:

$$c(\varepsilon) = c_0 \sqrt{1 - \frac{2\alpha}{\pi} \arctg \left(\frac{\varepsilon}{\beta} \right)}, \quad (2.17)$$

которое вытекает из уравнения (2.1).

Также известно, что явные численные схемы второго порядка подвержены появлению нефизиче- ских колебаний из-за ошибок округления. Эти ко- лебания могут быть значительно уменьшены, если частота нагрузки удовлетворяет следующей эмпи- рической оценке [49, 50]:

$$\omega < \frac{1}{\eta \Delta t_{CFL}}, \quad (2.18)$$

где $\eta \geq 20$.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

3.1. Предварительные данные
Ввод безразмерных переменных:

$$E^*(\varepsilon) = \frac{E(\varepsilon)}{E_0}; \quad \sigma^*(\varepsilon) = \frac{\sigma(\varepsilon)}{E_0}; \quad c^*(\varepsilon) = \frac{c(\varepsilon)}{c_0}. \quad (3.1)$$

В дальнейшем при безразмерных переменных звездочки будут опущены. Если принять:

$$\alpha = 0,25, \quad (3.2)$$

и изменяя β в интервале $\beta \in (10^{-3}; 10^{-1})$, рассмотрим зависимости напряжения и скорости вращения стержня от деформации (рис. 5).

Графики на рис. 4 и 5 показывают, что при достаточно малом значении параметра β , скажем $\beta = 0,001$, касательный модуль гиперупругого материала приблизительно равен бимодульному модулю, показанному на рис. 1, с относительной погрешностью δ :

$$\delta = \frac{\max_{\varepsilon > 0} |E_{\text{бим}} - E_{\text{гип}}|}{\max E_{\text{бим}}} \Big|_{\beta=0,001} \approx 5 \cdot 10^{-4}, \quad (3.3)$$

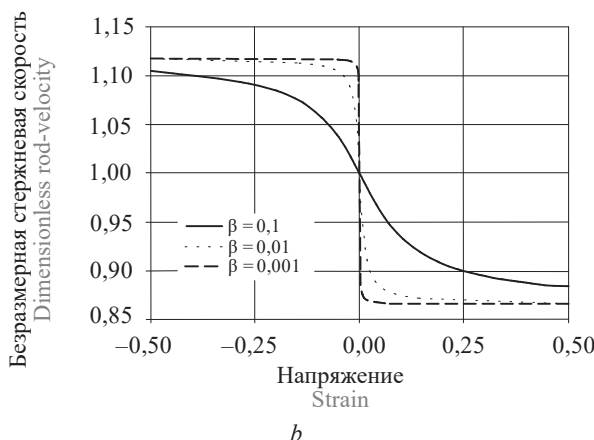
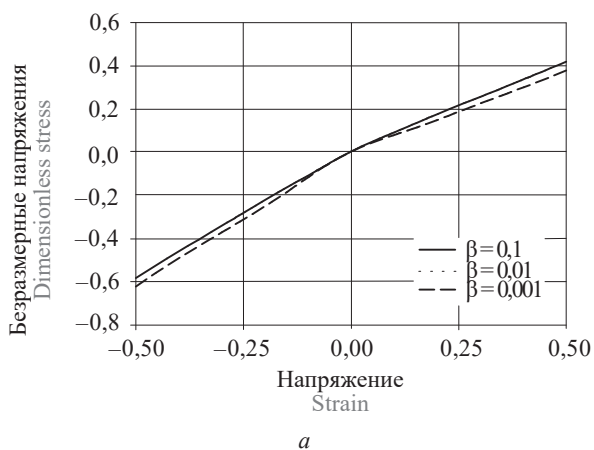


Рис. 5. Зависимость напряжения от деформации (a); зависимость стержневой скорости от деформации (b)
Fig. 5. Stress vs. strain (a); rod velocity vs. strain (b)

где $E_{\text{бим}}$ и $E_{\text{гип}}$ — соответствующие модули упругости.

3.2. Распространение волн

Рассмотрим теперь распространение изначально гармонической волны для двух предельных значений $\beta = 0,1$ и $\beta = 0,001$.

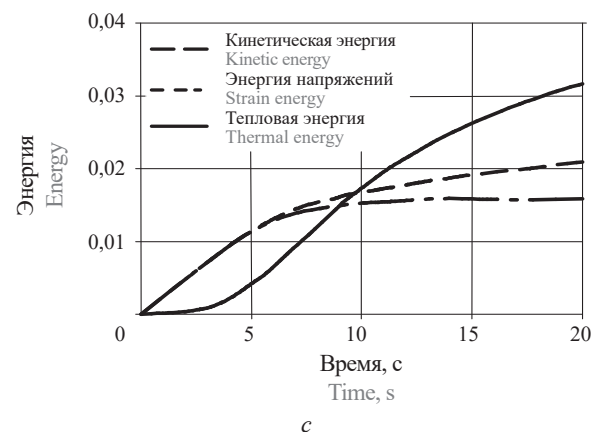
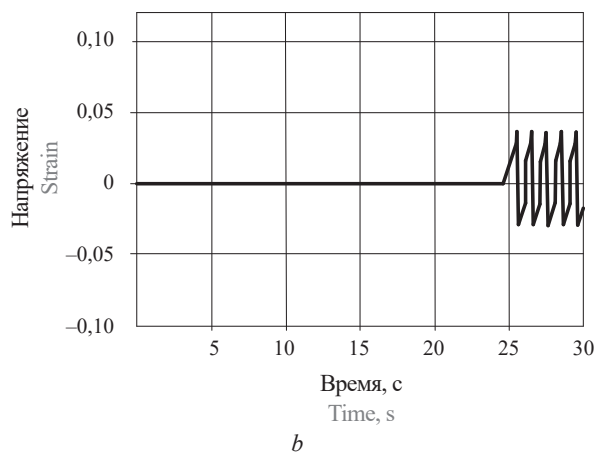
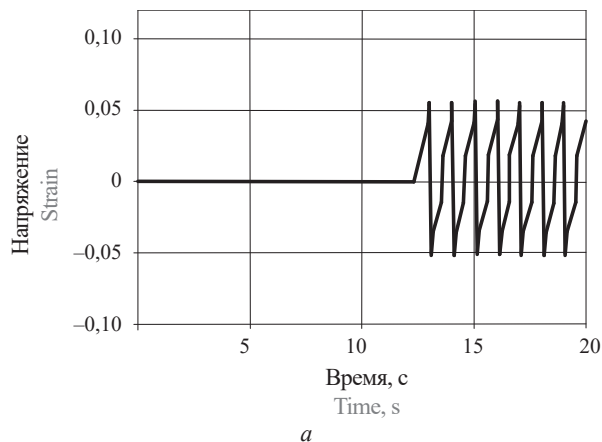


Рис. 6. Зависимость изменения деформации от времени: в точке 1 (a); в точке 2 (b); зависимость изменения энергии от времени (c); угловая частота гармонических колебаний $\omega = 1$ рад/с; координаты точек наблюдения определяются согласно уравнению (3.4)

Fig. 6. Strain variation vs. time, at point 1 (a); strain variation vs. time, at point 2 (b); energy variation vs. time (c); harmonic loading, $\omega = 1$ rad/s; coordinates of points of observation are specified in Eq. (3.4)

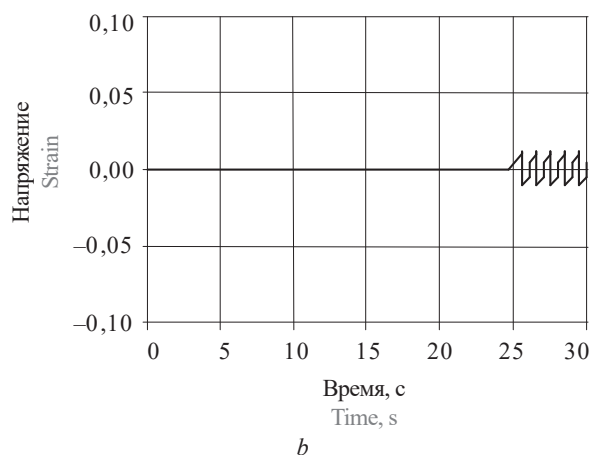
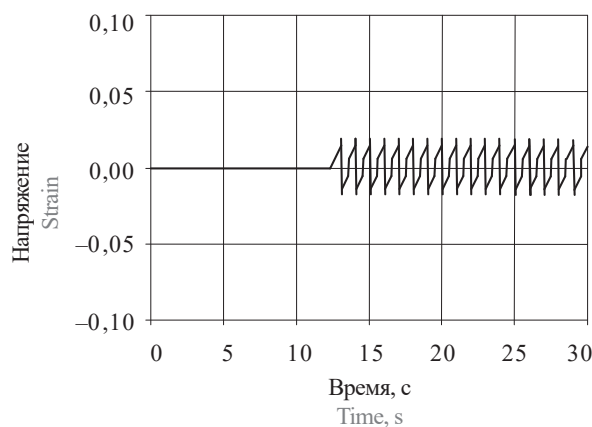


Рис. 7. Зависимость изменения деформации от времени: в точке 1 (а); в точке 2 при угловой частоте гармонических колебаний $\omega = 1$ рад/с (b); координаты точек наблюдения в соответствии с уравнением (3.4)

Fig. 7. Strain variation vs. time, at point 1 (a); strain variation vs. time, at point 2 harmonic loading, $\omega = 1$

3.2.1. В случае, если $\beta = 0,1$

Этот случай соответствует плавному изменению модуля упругости (рис. 4). Графики на рис. 6 показывают осциллограммы для двух точек, расположенных на определенных расстояниях l_k от левого конца стержня:

$$l_k = c_0 t_k; k = 1,2; t_1 = 10 \frac{2\pi}{\omega}; t_2 = 20 \frac{2\pi}{\omega}, \quad (3.4)$$

где скорость c_0 определяется уравнением (2.8); ω — круговая частота гармонической нагрузки.

Деформация в начальной точке при $x = 0$ показана на рис. 3. Вертикальные линии на рис. 6, а, b соответствуют фронтам ударных волн, которые появляются, когда более быстрые движущиеся части волновых цепей обгоняют более медленные движущиеся части [45, 51–54]. Уменьшение величины деформации сопровождается потерей механической энергии и в то же время выделением тепловой энергии (рис. 6, с). Таким образом, по-видимому, вперые фронты ударных волн и потеря механической энергии наблюдаются в гиперупругой системе без

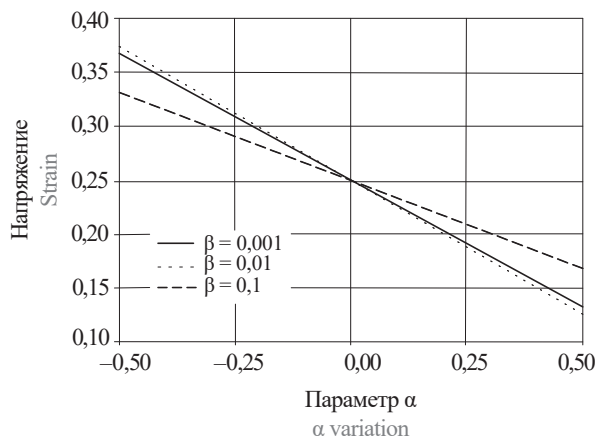


Рис. 8. Зависимость изменения напряжения от параметра α при различных значениях β и при $E_0 = 1, \epsilon = 0,25$, в соответствии с уравнением (2.2)

Fig. 8. Stress variation versus α variation at different β and at $E_0 = 1, \epsilon = 0.25$, according to Eq. (2.2)

внутреннего трения и вязкости, подчиняющейся плавному (и бесконечно дифференцируемому) гиперупругому потенциалу.

3.2.2. В случае, если $\beta = 0,001$

Как указывалось ранее, этот случай обеспечивает C^∞ — приближение к соответствующей бимодульной среде с небольшой погрешностью, задаваемой уравнением (3.3). Волновой профиль для рассматриваемого случая визуально почти точно соответствует профилю для бимодульной среды (рис. 3), найденному в работах [27, 30]. Графики изменения деформации в зависимости от времени для рассматриваемого случая представлены на рис. 7.

Сравнение графиков на рис. 7 и соответствующих графиков на рис. 6 показывает разницу в амплитудах — при $\beta = 0,001$ амплитуды меньше, чем при $\beta = 0,1$. Однако фронты ударной волны и затухание волны все еще присутствуют при $\beta = 0,1$, когда модуль упругости плавно изменяется. Изменение энергии для рассматриваемого случая аналогично случаю $\beta = 0,1$. Другое замечание касается состояния статической нагрузки и изменения напряжения, определяемого уравнением, из-за изменения параметра α . На рис. 8 продемонстрировано, что при $\beta \leq 0,01$ графики сливаются, стремясь к соответствующему графику для прерывистого случая.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Построено семейство однопараметрических гладких и бесконечно дифференцируемых гиперупругих потенциалов, зависящих от переменного параметра β и двух настраиваемых «физических» параметров E_0, α . Эти потенциалы подходят для анализа одномерных задач статики и динамики бимодульных материалов. При $\beta \rightarrow 0$ введенные потенциалы обеспечивают равномерное приближение соответствующих модулей упругости к разрывному модулю бимодульного материала. Например, апо-

стериорная оценка показала, что при достаточно малом $\beta = 0,001$ равномерная погрешность δ не превышает $5 \cdot 10^{-4}$.

И, что может быть еще более важным, эти возможности лучше подходят для моделирования реальных когезионных гранулированных материалов, чем бимодульная модель с резким изменением модуля упругости (рис. 1). В связи с этим (см. экспериментальные работы [36, 37]) бимодульная модель, используемая для неоднородных материалов, подвергалась критике ввиду физически неоправданного скачка модулей упругости [55].

Еще одно замечание касается интересного явления, связанного с образованием и распространением фронтов ударных волн в сверхупругих средах с бесконечно дифференцируемыми потенциалами (рис. 6, 7). Следует отметить, что ранее это явление связывали со скачком модуля упругости [27, 30], в то время как С. Truesdell [56] показал принципи-

альную возможность формирования фронтов ударных волн при распространении акустических волн в твердых средах, определяемых любым гиперупругим потенциалом [45]. Таким образом, наблюдаемые фронты ударных волн, которые появляются в одномерных стержнях, изготовленных из нелинейных материалов, моделируемых семейством гладких гиперупругих потенциалов, демонстрируют, что их образование не вызвано разрывом в соотношении напряжение – деформация, соответствующем бимодульным материалам (рис. 1). Фронты ударных волн возникают в материалах, моделируемых рассмотренными гладкими гиперупругими потенциалами (рис. 4) как в случае бимодульного материала, так и любого другого гиперупругого материала. Распространение фронтов ударных волн приводит к рассеянию механической энергии, что подразумевает уменьшение амплитуд с расстоянием (для сравнения рис. 3, 6).

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Misseri G., Rovero L.* Rammed earth as bi-modulus material: Experimental and analytical investigations through Euler-Bernoulli and Timoshenko beam models // *International Journal of Masonry Research and Innovation*. 2022. Vol. 7. Issue 5. P. 482. DOI: 10.1504/ijmri.2022.125359
2. *Ковтanjоу Л.В., Панченко Г.Л., Попова Е.О.* К моделированию больших деформаций разномодульных упругих сред // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2023. № 1 (55). С. 5–12. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.001. EDN DZJIJP.
3. *Caporale A., Parisi F., Asprone D., Luciano R., Prota A.* Critical surfaces for adobe masonry: Micromechanical approach // *Composites Part B: Engineering*. 2014. Vol. 56. Pp. 790–796. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.08.087
4. *Guo Y., Wen S.R., Sun J.Y., He X.T.* Theoretical study on thermal stresses of metal bars with different moduli in tension and compression // *Metals*. 2022. Vol. 12. Issue 2. P. 347. DOI: 10.3390/met12020347
5. *Qiu Y., Shen W., Yan R., Li X., Ye Z., Li M. et al.* An improved numerical method for calculating mechanical properties of bi-modulus sandwich composite structures // *Ocean Engineering*. 2022. Vol. 250. P. 110998. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.110998
6. *Адамов А.А.* Методические проблемы экспериментального обоснования и верификации определяющих уравнений разномодульной теории упругости // *Прикладная механика и техническая физика*. 2020. Т. 61. № 6 (364). С. 82–90. DOI: 10.15372/PMTF20200611. EDN HLBYZF.
7. *Кривчун Н.А., Уманская О.Л.* Изгиб составной пластины из разномодульных материалов. Краевые условия // *Современные наукоемкие технологии*. 2020. № 6–1. С. 56–60. DOI: 10.17513/snt.38071. EDN PVOOJE.
8. *Rosakis P., Notbohm J., Ravichandran G.* A model for compression-weakening materials and the elastic fields due to contractile cells // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015. Vol. 85. Pp. 16–32. DOI: 10.1016/j.jmps.2015.08.013
9. *Назаров В.Е., Кияшко С.Б., Радостин А.В.* Самоподобные волны в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией // *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11. № 2. С. 209–218. EDN UBLNYP.
10. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* О разрушении при сжатии // *Физическая мезомеханика*. 2018. Т. 21. № 3. С. 86–102. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-13009. EDN XRGSG.
11. *Patel S., Martin C.D.* Application of flattened Brazilian test to investigate rocks under confined extension // *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2018. Vol. 51. Issue 12. Pp. 3719–3736. DOI: 10.1007/s00603-018-1559-1
12. *Пахомов Б.М.* Вариант модели изотропного разномодульного материала // *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение*. 2017. № 6 (117). С. 35–48. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48. EDN ZVZBQL.
13. *Jiang K., Qi C., Zhu S., Jin T.* Study of the frequency response of the block–rock mass with bimodulus characteristics // *IOP Conference Series: Earth and En-*

vironmental Science. 2020. Vol. 570. Issue 5. P. 052006. DOI: 10.1088/1755-1315/570/5/052006

14. *Mahfouz I.A., Badrakhan F.* Chaotic behaviour of some piecewise-linear systems. Part I: systems with set-up spring or with unsymmetric elasticity // Journal of Sound and Vibration. 1990. Vol. 143. Issue 2. Pp. 255–288. DOI: 10.1016/0022-460x(90)90954-x

15. *Ostrovsky A.* Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity // The Journal of the Acoustical Society of America. 1991. Vol. 90. Issue 6. Pp. 3332–3337. DOI: 10.1121/1.401444

16. *Ostrovsky L.A., Starobinets I.M.* Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodular oscillator // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 1995. Vol. 5. Issue 3. Pp. 496–500. DOI: 10.1063/1.166121

17. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator // Journal of Sound and Vibration. 1983. Vol. 90. Issue 1. Pp. 129–155. DOI: 10.1016/0022-460x(83)90407-8

18. *Shulman J.N.* Chaos in piecewise-linear systems // Physical Review A. 1983. Vol. 28. Issue 1. Pp. 477–479. DOI: 10.1103/physreva.28.477

19. *Zhou N., Liu K.* A tunable high-static–low-dynamic stiffness vibration isolator // Journal of Sound and Vibration. 2010. Vol. 329. Issue 9. Pp. 1254–1273. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.11.001

20. *Bert C.W., Kumar M.* Vibration of cylindrical shells of bimodulus composite materials // Journal of Sound and Vibration. 1982. Vol. 81. Issue 1. Pp. 107–121. DOI: 10.1016/0022-460x(82)90180-8

21. *Bert C.W., Reddy J.N., Chao W.C., Reddy V.S.* Vibration of thick rectangular plates of bimodulus composite material // Journal of Applied Mechanics. 1981. Vol. 48. Issue 2. Pp. 371–376. DOI: 10.1115/1.3157625

22. *Du L., Li F., Liu Q.* A study on determination of application limits of bimodulus calculation using spherical stress tensor method // Journal of Reinforced Plastics and Composites. 2017. Vol. 36. Issue 7. Pp. 479–490. DOI: 10.1177/0731684416684210

23. *Khan A.H., Patel B.P.* Nonlinear forced vibration response of bimodular laminated composite plates // Composite Structures. 2014. Vol. 108. Pp. 524–537. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.054

24. *Khan K., Patel B.P., Nath Y.* Free and forced vibration characteristics of bimodular composite laminated circular cylindrical shells // Composite Structures. 2015. Vol. 126. Pp. 386–397. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.02.022

25. *Lucchesi M., Pagni A.* Longitudinal oscillations of bimodular rods // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2005. Vol. 5. Issue 1. Pp. 37–54. DOI: 10.1142/S0219455405001490

26. *Moon F.C.* Chaotic Vibrations. John Wiley & Sons, 1987. 309 p.

27. *Gavrilov S.N., Herman G.C.* Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subject-

ed to a harmonic loading // Journal of Sound and Vibration. 2012. Vol. 331. Issue 20. Pp. 4464–4480. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022

28. *Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V.* Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes // Archive of Applied Mechanics. 2018. Vol. 88. Issue 8. Pp. 1385–1394. DOI: 10.1007/s00419-018-1377-7

29. *Krylov V.V.* Acoustic black holes for flexural waves: a smart approach to vibration damping // Procedia Engineering. 2017. Vol. 199. Pp. 56–61. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.150

30. *Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V.* Wave propagation in continuous bimodular media // Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2022. Vol. 29. Issue 21. Pp. 3147–3162. DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725

31. *Trujillo L., Peniche F., Sigalotti L.D.G.* Derivation of a Schrödinger-like equation for elastic waves in granular media // Granular Matter. 2010. Vol. 12. Issue 4. Pp. 417–436. DOI: 10.1007/s10035-010-0190-y

32. *Дудко О.В., Лантева А.А., Рагозина В.Е.* Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2019. № 4. С. 37–47. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04. EDN PCRUTF.

33. *Grazzini R., Misseri G., Rovero L.* A bimodulus material model for bending test on NHL3.5 lime mortar // Materials. 2023. Vol. 16. Issue 2. P. 486. DOI: 10.3390/ma16020486

34. *Sun J., Zhu H., Qin S., Yang D., He X.* A review on the research of mechanical problems with different moduli in tension and compression // Journal of Mechanical Science and Technology. 2010. Vol. 24. Issue 9. Pp. 1845–1854. DOI: 10.1007/s12206-010-0601-3

35. *Zhang X., Garijo L., Ruiz G., Ortega J.* Loading-rate effect on the fracture response of natural hydraulic and aerial-lime mortars // Journal of Materials in Civil Engineering. 2020. Vol. 32. Issue 9. DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0003358

36. *Hemmerle A., Schröter M., Goehring L.* A cohesive granular material with tunable elasticity // Scientific Reports. 2016. Vol. 6. Issue 1. DOI: 10.1038/srep35650

37. *Makse H.A., Gland N., Johnson D., Schwartz L.* Granular packings: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics // Physical Review E. 2004. Vol. 70. Issue 6. DOI: 10.1103/physreve.70.061302

38. *Royer D., Dieulesaint E.* Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation. Springer, 1996. 374 p.

39. *Zemanek J.* An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder // The Journal of the Acoustical Society

of America. 1972. Vol. 51. Issue 1B. Pp. 265–283. DOI: 10.1121/1.1912838

40. Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V. The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading // *Archive of Applied Mechanics*. 2016. Vol. 86. Issue 12. Pp. 2021–2031. DOI: 10.1007/s00419-016-1169-x

41. Goldstein R.V., Kuznetsov S.V. Long-wave Asymptotics of Lamb waves // *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52. Issue 6. Pp. 700–707. DOI: 10.3103/s0025654417060097

42. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates // *Acoustical Physics*. 2014. Vol. 60. Issue 2. Pp. 200–207. DOI: 10.1134/s106377101402002x

43. Cacciafesta F., D’Ancona P., Lucà R. A limiting absorption principle for the Helmholtz equation with variable coefficients // *Journal of Spectral Theory*. 2018. Vol. 8. Issue 4. Pp. 1349–1392. DOI: 10.4171/jst/229

44. Макаров О.И., Шанин А.В., Корольков А.И. Интеграл Зоммерфельда в задачах моделирования дифракции акустических волн с помощью треугольной сетки // *Акустический журнал*. 2023. Т. 69. № 2. С. 129–145. DOI: 10.31857/S0320791923600105. EDN IULQGZ.

45. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg. 2004. 602 p. DOI: 10.1007/978-3-662-10388-3

46. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2019. Vol. 70. Issue 3. DOI: 10.1007/s00033-019-1132-0

47. Lax P.D. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM, Philadelphia, 1973. DOI: 10.1137/1.9781611970562

48. Костиков Ю.А., Романенков А.М. Гибридная схема для численного решения нелинейного

уравнения Эйлера // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. 2021. № 2. С. 80–86. EDN BCJXPC.

49. Cellier F.E., Kofman E. *Continuous System Simulation*. Springer Science & Business Media, Berlin, 2006.

50. Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen’kovich S.Ya. Finite element models in Lamb’s problem // *Mechanics of Solids*. 2011. Vol. 46. Issue 6. Pp. 952–959. DOI: 10.3103/s002565441106015x

51. Kuznetsov S.V. “Forbidden” planes for Rayleigh waves // *Quarterly of Applied Mathematics*. 2002. Vol. 60. Issue 1. Pp. 87–97. DOI: 10.1090/qam/1878260

52. Kuznetsov S.V. Subsonic Lamb waves in anisotropic plates // *Quarterly of Applied Mathematics*. 2002. Vol. 60. Issue 3. Pp. 577–587. DOI: 10.1090/qam/1914442

53. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains // *Computers and Geotechnics*. 2019. Vol. 109. Pp. 69–81. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.01.019

54. Быков В.Г. Формирование режимов скольжения в разломах и медленные деформационные волны // *Физическая мезомеханика*. 2019. Т. 22. № 4. С. 39–46. DOI: 10.24411/1683-805X-2019-14004. EDN OHCQWY.

55. Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source // *Acoustical Physics*. 2015. Vol. 61. Issue 3. Pp. 356–367. DOI: 10.1134/s1063771015030112

56. Truesdell C. General and exact theory of waves in finite elastic strain // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1961. Vol. 8. Issue 1. Pp. 263–296. DOI: 10.1007/bf00277444

Поступила в редакцию 10 июня 2025 г.

Принята в доработанном виде 1 июля 2025 г.

Одобрена для публикации 8 октября 2025 г.

ОБ АВТОРАХ: Сергей Владимирович Кузнецов — доктор физико-математических наук, профессор, и. о. заведующего кафедрой строительной и теоретической механики; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; Scopus: 7202573564, ResearcherID: H-9448-2013, ORCID: 0000-0001-9426-0791; KuznetsovSV@mgsu.ru;

Сергей Андреевич Калиновский — кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры строительной и теоретической механики; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; РИНЦ ID: 670367, Scopus: 57202802927, ResearcherID: AAR-1204-2021, ORCID: 0000-0001-6780-5215; KuznetsovSV@mgsu.ru.

Вклад авторов:

Кузнецов С.В. — научное руководство, концепция исследования, развитие методологии, написание исходного текста, итоговые выводы.

Калиновский С.А. — обработка материала, доработка текста, оформление статьи.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Misseri G., Rovero L. Rammed earth as bi-modulus material: Experimental and analytical investigations through Euler-Bernoulli and Timoshenko beam models. *International Journal of Masonry Research and Innovation*. 2022; 7(5):482. DOI: 10.1504/ijmri.2022.125359
2. Kovtanyuk L.V., Panchenko G.L., Popova E.O. On modeling of large strains of multimodulus elastic media. *Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State*. 2023; 1(55):5-12. DOI: 10.37972/chgpu.2023.55.1.001. EDN DZJJP. (rus.).
3. Caporale A., Parisi F., Asprone D., Luciano R., Prota A. Critical surfaces for adobe masonry: Micromechanical approach. *Composites Part B: Engineering*. 2014; 56:790-796. DOI: 10.1016/j.compositesb.2013.08.087
4. Guo Y., Wen S.R., Sun J.Y., He X.T. Theoretical study on thermal stresses of metal bars with different moduli in tension and compression. *Metals*. 2022; 12(2):347. DOI: 10.3390/met12020347
5. Qiu Y., Shen W., Yan R., Li X., Ye Z., Li M. et al. An improved numerical method for calculating mechanical properties of bi-modulus sandwich composite structures. *Ocean Engineering*. 2022; 250:110998. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.110998
6. Adamov A.A. Methodological problems in experimental studies and verification of the governing equations of the theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2020; 61(6):(364):82-90. DOI: 10.15372/PMTF20200611. EDN HLBYZF. (rus.).
7. Krivchun N.A., Umanskaya O.L. Bending a composite plate made of multi-modulus materials. Boundary condition. *Modern High Technologies*. 2020; 6-1:56-60. DOI: 10.17513/snt.38071. EDN PVOOJE. (rus.).
8. Rosakis P., Notbohm J., Ravichandran G. A model for compression-weakening materials and the elastic fields due to contractile cells. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2015; 85:16-32. DOI: 10.1016/j.jmps.2015.08.013
9. Nazarov V.E., Kiyashko S.B., Radostin A.V. Self-similar waves in media with bimodular elastic nonlinearity and relaxation. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2015; 11(2):209-218. EDN UBLNYP. (rus.).
10. Goldstein R.V., Osipenko N.M. About compression fracture. *Physical Mesomechanics*. 2018; 21(3):86-102. DOI: 10.24411/1683-805X-2018-13009. EDN XRGSGL. (rus.).
11. Patel S., Martin C.D. Application of flattened Brazilian test to investigate rocks under confined extension. *Rock Mechanics and Rock Engineering*. 2018; 51(12):3719-3736. DOI: 10.1007/s00603-018-1559-1
12. Pakhomov B.M. Alternative model of isotropic material with different modulus. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering*. 2017; 6(117):35-48. DOI: 10.18698/0236-3941-2017-6-35-48. EDN ZVZBQL. (rus.).
13. Jiang K., Qi C., Zhu S., Jin T. Study of the frequency response of the block-rock mass with bimodulus characteristics. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2020; 570(5):052006. DOI: 10.1088/1755-1315/570/5/052006
14. Mahfouz I.A., Badrakhn F. Chaotic behaviour of some piecewise-linear systems. Part I: systems with set-up spring or with unsymmetric elasticity. *Journal of Sound and Vibration*. 1990; 143(2):255-288. DOI: 10.1016/0022-460x(90)90954-x
15. Ostrovsky A. Wave processes in media with strong acoustic nonlinearity. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1991; 90(6):3332-3337. DOI: 10.1121/1.401444
16. Ostrovsky L.A., Starobinets I.M. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodular oscillator. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 1995; 5(3):496-500. DOI: 10.1063/1.166121
17. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forced piecewise linear oscillator. *Journal of Sound and Vibration*. 1983; 90(1):129-155. DOI: 10.1016/0022-460x(83)90407-8
18. Shulman J.N. Chaos in piecewise-linear systems. *Physical Review A*. 1983; 28(1):477-479. DOI: 10.1103/physreva.28.477
19. Zhou N., Liu K. A tunable high-static-low-dynamic stiffness vibration isolator. *Journal of Sound and Vibration*. 2010; 329(9):1254-1273. DOI: 10.1016/j.jsv.2009.11.001
20. Bert C.W., Kumar M. Vibration of cylindrical shells of bimodulus composite materials. *Journal of Sound and Vibration*. 1982; 81(1):107-121. DOI: 10.1016/0022-460x(82)90180-8
21. Bert C.W., Reddy J.N., Chao W.C., Reddy V.S. Vibration of thick rectangular plates of bimodulus composite material. *Journal of Applied Mechanics*. 1981; 48(2):371-376. DOI: 10.1115/1.3157625
22. Du L., Li F., Liu Q. A study on determination of application limits of bimodulus calculation using spherical stress tensor method. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. 2017; 36(7):479-490. DOI: 10.1177/0731684416684210
23. Khan A.H., Patel B.P. Nonlinear forced vibration response of bimodular laminated composite plates. *Composite Structures*. 2014; 108:524-537. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.09.054
24. Khan K., Patel B.P., Nath Y. Free and forced vibration characteristics of bimodular composite laminated circular cylindrical shells. *Composite Structures*. 2015; 126:386-397. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.02.022

25. Lucchesi M., Pagni A. Longitudinal oscillations of bimodular rods. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. 2005; 5(1):37-54. DOI: 10.1142/S0219455405001490
26. Moon F.C. *Chaotic Vibrations*. John Wiley & Sons, 1987; 309.
27. Gavrilov S.N., Herman G.C. Wave propagation in a semi-infinite heteromodular elastic bar subjected to a harmonic loading. *Journal of Sound and Vibration*. 2012; 331(20):4464-4480. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.05.022
28. Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. Pochhammer–Chree waves: polarization of the axially symmetric modes. *Archive of Applied Mechanics*. 2018; 88(8):1385-1394. DOI: 10.1007/s00419-018-1377-7
29. Krylov V.V. Acoustic black holes for flexural waves: a smart approach to vibration damping. *Procedia Engineering*. 2017; 199:56-61. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.09.150
30. Kuznetsova M., Khudyakov M., Sadovskii V. Wave propagation in continuous bimodular media. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022; 29(21):3147-3162. DOI: 10.1080/15376494.2021.1889725
31. Trujillo L., Peniche F., Sigalotti L.D.G. Derivation of a Schrödinger-like equation for elastic waves in granular media. *Granular Matter*. 2010; 12(4):417-436. DOI: 10.1007/s10035-010-0190-y
32. Dudko O.V., Lapteva A.A., Ragozina V.E. Nonstationary 1D dynamics problems for heteromodular elasticity with piecewise-linear approximation of boundary conditions. *PNRPU Mechanics Bulletin*. 2019; 4:37-47. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.4.04. EDN PCRUTF. (rus.).
33. Grazzini R., Misseri G., Rovero L. A bimodulus material model for bending test on NHL3.5 lime mortar. *Materials*. 2023; 16(2):486. DOI: 10.3390/ma16020486
34. Sun J., Zhu H., Qin S., Yang D., He X. A review on the research of mechanical problems with different moduli in tension and compression. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2010; 24(9):1845-1854. DOI: 10.1007/s12206-010-0601-3
35. Zhang X., Garijo L., Ruiz G., Ortega J. Loading-rate effect on the fracture response of natural hydraulic and aerial-lime mortars. *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2020; 32(9). DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0003358
36. Hemmerle A., Schröter M., Goehring L. A cohesive granular material with tunable elasticity. *Scientific Reports*. 2016; 6(1). DOI: 10.1038/srep35650
37. Makse H.A., Gland N., Johnson D., Schwartz L. Granular packings: Nonlinear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics. *Physical Review E*. 2004; 70(6). DOI: 10.1103/physreve.70.061302
38. Royer D., Dieulesaint E. *Elastic Waves in Solids I: Free and Guided Propagation*. Springer, 1996; 374.
39. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1972; 51(1B):265-283. DOI: 10.1121/1.1912838
40. Goldstein R.V., Dudchenko A.V., Kuznetsov S.V. The modified Cam-Clay (MCC) model: cyclic kinematic deviatoric loading. *Archive of Applied Mechanics*. 2016; 86(12):2021-2031. DOI: 10.1007/s00419-016-1169-x
41. Goldstein R.V., Kuznetsov S.V. Long-wave Asymptotics of Lamb waves. *Mechanics of Solids*. 2017; 52(6):700-707. DOI: 10.3103/s0025654417060097
42. Djeran-Maigre I., Kuznetsov S.V. Velocities, dispersion, and energy of SH-waves in anisotropic laminated plates. *Acoustical Physics*. 2014; 60(2):200-207. DOI: 10.1134/s106377101402002x
43. Cacciafesta F., D’Ancona P., Lucà R. A limiting absorption principle for the Helmholtz equation with variable coefficients. *Journal of Spectral Theory*. 2018; 8(4):1349-1392. DOI: 10.4171/jst/229
44. Makarov O.I., Shanin A.V., Korolkov A.I. The Sommerfeld integral in problems of modeling acoustic wave diffraction using a triangular grid. *Acoustical Physics*. 2023; 69(2):129-145. DOI: 10.31857/S0320791923600105. EDN IULQGZ. (rus.).
45. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2004; 602. DOI: 10.1007/978-3-662-10388-3
46. Kuznetsov S.V. Abnormal dispersion of flexural Lamb waves in functionally graded plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2019; 70(3). DOI: 10.1007/s00033-019-1132-0
47. Lax P.D. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*. SIAM, Philadelphia, 1973. DOI: 10.1137/1.9781611970562
48. Kostikov Yu.A., Romanenkov A.M. Hybrid scheme for the numerical solution of a nonlinear Euler’s equation. *Differential Equations and Control Processes*. 2021; 2:80-86. EDN BCJXPC. (rus.).
49. Cellier F.E., Kofman E. *Continuous System Simulation*. Springer Science & Business Media, Berlin, 2006.
50. Kravtsov A.V., Kuznetsov S.V., Sekerzh-Zen’kovich S.Ya. Finite element models in Lamb’s problem. *Mechanics of Solids*. 2011; 46(6):952-959. DOI: 10.3103/s002565441106015x
51. Kuznetsov S.V. “Forbidden” planes for Rayleigh waves. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2002; 60(1):87-97. DOI: 10.1090/qam/1878260
52. Kuznetsov S.V. Subsonic Lamb waves in anisotropic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*. 2002; 60(3):577-587. DOI: 10.1090/qam/1914442
53. Li S., Brun M., Djeran-Maigre I., Kuznetsov S. Hybrid asynchronous absorbing layers based on Kosloff damping for seismic wave propagation in unbounded domains. *Computers and Geotechnics*. 2019; 109:69-81. DOI: 10.1016/j.compgeo.2019.01.019

54. Bykov V.G. Development of sliding regimes in faults and slow strain waves. *Physical Mesomechanics*. 2019; 22(4):39-46. DOI: 10.24411/1683-805X-2019-14004. EDN OHCQWY.(rus.).
55. Kuznetsov S.V., Terentjeva E.O. Planar internal Lamb problem: Waves in the epicentral zone of a vertical power source. *Acoustical Physics*. 2015; 61(3):356-367. DOI: 10.1134/s1063771015030112
56. Truesdell C. General and exact theory of waves in finite elastic strain. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1961; 8(1):263-296. DOI: 10.1007/bf00277444

Received June 10, 2025.

Adopted in revised form on July 1, 2025.

Approved for publication on October 8, 2025.

B I O N O T E S: **Sergey V. Kuznecov** — Doctor of Physico-Mathematical Sciences, Professor, Acting Head of the Department of Structural and Theoretical Mechanics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; Scopus: 7202573564, ResearcherID: H-9448-2013, ORCID: 0000-0001-9426-0791; KuznetsovSV@mgsu.ru;

Sergey A. Kalinovsky — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ID RSCI: 670367, Scopus: 57202802927, ResearcherID: AAR-1204-2021, ORCID: 0000-0001-6780-5215; KalinovskiiSA@mgsu.ru.

Contribution of the authors:

Sergey V. Kuznecov — scientific guidance, research concept, development of methodology, writing the source text, final conclusions.

Sergey A. Kalinovsky — processing of the material, revision of the text, design of the article.

The authors declare that there is no conflict of interest.