

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.075.4

DOI: 10.22227/1997-0935.2025.12.1839-1852

Изгибно-крутильная и плоская формы потери устойчивости двутаврового стержня с переменной высотой стенки

Александр Олегович Ильюшенко

Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект»; г. Хабаровск, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Цель исследования — изучение задачи изгибно-крутильной и плоской формы потери устойчивости тонкостенного элемента открытого сечения. Приводится уточнение технической теории В.З. Власова для тонкостенных стержней. Полученные уточненные дифференциальные уравнения описывают условия устойчивости двутаврового стержня с переменной высотой стенки. Представлены замкнутые решения на основе уточняющих дифференциальных уравнений с помощью аналитического метода Бубнова – Галёркина. В статье приводятся сравнительные графики, позволяющие оценить различия между аналитическими решениями и конечно-элементным анализом.

Материалы и методы. Использована техническая теория В.З. Власова и метод Бубнова – Галёркина.

Результаты. На основе сделанных уточнений получено замкнутое решение задачи упругой потери устойчивости стержня с линейно изменяющейся высотой стенки. Предложен аналитический метод расчета изгибно-крутильной и плоской формы потери устойчивости тонкостенного элемента открытого сечения.

Выводы. Продемонстрированная теоретическая работа показывает, что решение задачи плоской формы и изгибно-крутильной потери устойчивости балки-колонны с линейно изменяющейся высотой стенки открытого сечения может быть достигнуто путем уточнения дифференциальных уравнений и представлено в замкнутой форме, аналогичной для балок-колонн постоянного сечения, но с дополнительными поправками в виде формульных коэффициентов.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: плоская форма потери устойчивости, изгибно-крутильная потеря устойчивости, упругая потеря устойчивости, коэффициент градиента момента, редукция, переменное сечение, стальные балки, стальные колонны, тонкостенные стержни, теория секториальных характеристик, дифференциальные уравнения, упругий критический изгибающий момент

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Ильюшенко А.О. Изгибно-крутильная и плоская формы потери устойчивости двутаврового стержня с переменной высотой стенки // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20. Вып. 12. С. 1839–1852. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.12.1839-1852

Автор, ответственный за переписку: Александр Олегович Ильюшенко, revivaltree@gmail.com.

Bending-torsional and flat forms of instability of an I-beam with variable wall height

Alexander O. Ilyushenkov

Territorial Design Institute “Khabarovskpromproekt”; Khabarovsk, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The aim of the study is to investigate the problem of bending-torsion and flat-form loss of stability of a thin-walled open-section element. A refinement of V.Z. Vlasov’s technical theory for thin-walled rods is presented. The refined differential equations obtained describe the stability conditions of an I-beam with variable wall height. Closed solutions based on refined differential equations are presented using the Bubnov–Galerkin analytical method. The paper provides comparative graphs that allow the differences between analytical solutions and finite element analysis to be assessed.

Materials and methods. The technical theory of V.Z. Vlasov and the Bubnov–Galerkin method were used.

Results. Based on the clarifications made, a closed-form solution was obtained for the problem of elastic buckling of a rod with a linearly varying wall height. An analytical method was proposed for calculating the bending-torsional and flat forms of buckling of a thin-walled open-section element.

Conclusions. The theoretical work presented demonstrates that the solution to the problem of the plane shape and bending-torsional instability of a beam-column with a linearly varying wall height of an open section can be achieved by refining the differential equations and presented in a closed form similar to that for beams-columns of constant section, but with additional corrections in the form of formula coefficients.

KEYWORDS: flat form of instability, bending-torsional instability, elastic instability, moment gradient coefficient, reduction, variable cross-section, steel beams, steel columns, thin-walled rods, theory of sectorial characteristics, differential equations, elastic critical bending moment

FOR CITATION: Ilyushenkov A.O. Bending-torsional and flat forms of instability of an I-beam with variable wall height. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2025; 20(12):1839-1852. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.12.1839-1852 (rus.).

Corresponding author: Alexander O. Ilyushenkov, revivaltree@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Похоже, что теория вопроса изгибно-крутильной потери устойчивости тонкостенного открытого стержня переменной жесткости в настоящее время находится в некотором застое. За последние годы мало что было сделано для облегчения расчетов, а также в предоставлении инженеру простого решения, которое можно было бы ввести в существующую теорию изгибно-крутильной потери устойчивости стержня постоянной жесткости. Design Guide 25 по-прежнему является единственным нормативным документом, посвященным проектированию двутавровых элементов с линейно изменяющейся высотой стенки. Его следует рассматривать как наивысшее и необходимое достижение в области проектирования подобного рода конструкций. Этот документ легализует расчеты элементов переменной жесткости и дает возможность строить более качественно, экономически целесообразно и социально устойчиво. Но приводит ли он все необходимые ответы на вопросы? И насколько хорошо мы понимаем поведение и механику таких элементов? Как известно, техническая теория тонкостенных стержней открытого профиля была разработана В.З. Власовым в 50-х гг. прошлого века. С тех пор она неоднократно дополнялась. Автор настоящей статьи не будет вдаваться в историю, но укажет, что один из наибольших вкладов в развитие теории тонкостенных конических элементов внесен Z. Suwinski [1–3]. Он не только расширил техническую теорию В.З. Власова, но и вывел фундаментальные дифференциальные уравнения для конических элементов. Автор данного исследования сделает то же самое здесь, но другим способом, расширив классическую теорию В.З. Власова.

Для начала уточним дифференциальные уравнения. С этой целью пересмотрим некоторые части его теории и кратко напомним, что у нас есть, и что нам нужно уточнить для достижения поставленной цели. Сделанные уточнения и выводы помогут расширить существующие аналитические решения упругого критического изгибающего момента, коэффициента градиента изгибающего момента изгибно-крутильной потери устойчивости симметричных конических элементов. Имеется достаточное количество работ, которые вносят вклад в численный анализ. Однако лишь немногие из них способствуют разработке инженерных методик для разрешения вопроса об изгибно-крутильной потере устойчивости, как и попыткам создать анали-

тические решения в замкнутом виде [4–8]. Похоже, что требуется приложить больше усилий, чтобы сократить разрыв между конечно-элементным анализом и аналитическими решениями.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Уточнение дифференциальных уравнений следует начать с деформаций и прогибов. При деформировании стержня возникают добавочные прогибы в горизонтальной и вертикальной плоскости (рис. 1). Уравнения в самом общем случае для симметричного открытого профиля, описывающие перемещения, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u_s = u - u\varphi; \\ v_s = v + x\varphi, \end{cases} \quad (1)$$

где u и v — трансляционные перемещения по направлению x и y ; y и x — координаты поперечного сечения в плоскости и из плоскости; φ — угол закручивания вокруг оси z .

Система уравнений (1) справедлива только для призматических элементов. Для симметричного двутаврового элемента с линейно изменяющейся высотой стенки по длине, но постоянной шириной полок координата y изменяется согласно линейному закону:

$$y_z = y_1 \left(1 - \left(1 - \frac{h_0}{h_1} \right) \frac{z}{l} \right), \quad (2)$$

где $y_1 = 0,5h_1$; h_0 и h_1 — высота двутавра на левом и правом концах элемента; z — главная продольная ось; l — длина элемента. Если $h_1 = h_0$, $y_z = y_1$, тогда уравнение (2) вернется к виду постоянного сечения.

Подставляя выражение (2) в (1), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_s = u - y_1 \left(1 - (1 - t_1) \xi \right) \varphi; \\ v_s = v + x\varphi, \end{cases} \quad (3)$$

где $t_1 = h_0/h_1$ — безразмерное отношение высоты двутавра по концам стержня переменной жесткости; $\xi = z/l$ — безразмерная длина элемента.

Получив уравнения деформации для конического элемента, следует уточнить интенсивность нагрузки p_x . Не будем приводить полную теорию, а лишь те ее части, которые будут отличаться, либо задействованы для уточнения. Полную теорию можно найти в книгах В.З. Власова [9, 10]. Также вывод дифференциальных уравнений тонкостенного

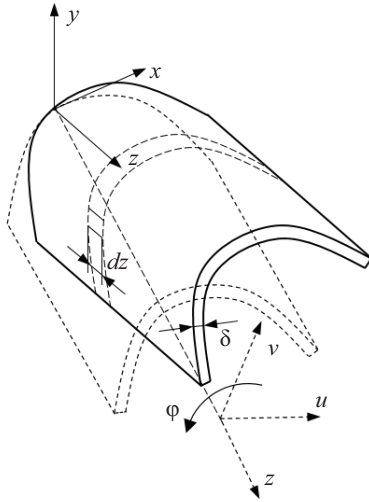


Рис. 1. Тонкостенный открытый профиль

Fig. 1. Thin-walled open profile

призматического элемента можно найти в книгах С.П. Тимошенко и J.M. Gere [11, 12].

Интенсивность нагрузки p_x формулируется через вторую производную u_z :

$$p_x = \sigma \delta u_z''', \quad (4)$$

где σ — нормальные напряжения; δ — толщина оболочки.

Подставляя выражения (3) в (4), получим:

$$p_x = \sigma \delta u'' - \sigma \delta (y_z \varphi)''. \quad (5)$$

По формуле Лейбница производной произведения с учетом переменности координаты y_z в формуле (5) возникает дополнительно слагаемое:

$$(y_z \varphi)'' = (y_z' \varphi + y_z \varphi')' = y_z'' \varphi + 2y_z' \varphi' + y_z \varphi''. \quad (6)$$

Учитывая, что $y_z'' \varphi = 0$, получим уравнение (5), но с новым слагаемым:

$$p_x = \sigma \delta u'' - 2\sigma \delta y_z' \varphi' - \sigma \delta y_z \varphi''. \quad (7)$$

Полученное выше уравнение отличается от призматического наличием члена, содержащего в себе угол конусности элемента β . Так как первая производная y_z :

$$y_z' = -y_1(1 - t_1)/l = -0,5(h_1 - h_0)/l = -0,5\beta, \quad (8)$$

где β — угол конусности элемента (в радианах).

С учетом формулы (8) получим интенсивность нагрузки p_x , учитывая угол конусности β :

$$p_x = \sigma \delta u'' + \sigma \delta \beta \varphi' - \sigma \delta y_z \varphi''. \quad (9)$$

Для получения интенсивности погонной поперечной нагрузки q_x потребуется проинтегрировать интенсивность нагрузки p_x . Интегралы вычисляются по переменной s для всего поперечного сечения кривой L :

$$q_x = u'' \int_L \sigma \delta ds + \beta \int_L \sigma \delta ds - \varphi'' \int_L \sigma \delta y_z ds. \quad (10)$$

Подставляя $\delta ds = dA_z$ в уравнение (10), перейдем к переменной dA_z :

$$q_x = u'' \int_{A_z} \sigma dA_z + \beta \int_{A_z} \sigma dA_z - \varphi'' \int_{A_z} \sigma y_z dA_z. \quad (11)$$

Нормальные напряжения в коническом элементе выражаются следующей трехчленной формулой:

$$\sigma = -\frac{P}{A_z} - \frac{M_y}{I_{y,z}} x + \frac{M_x}{I_{x,z}} y_z, \quad (12)$$

где P — сжимающая сила, действующая вдоль z ; A_z — площадь поперечного сечения на длине элемента в точке z ; M_y и M_x — изгибающие моменты, действующие относительно y и x ; $I_{y,z}$ и $I_{x,z}$ — моменты инерции из плоскости и в плоскости наибольшей жесткости элемента в точке z .

Момент инерции в плоскости наибольшей жесткости в интегральной форме для конического стержня выражается как:

$$I_{x,z} = \int_{A_z} y_z^2 dA_z. \quad (13)$$

Момент инерции из плоскости наибольшей жесткости:

$$I_{y,z} = \int_{A_z} x^2 dA_z. \quad (14)$$

Секториальный момент инерции:

$$C_{w,z} = \int_{A_z} w^2(x, y_z) dA_z = I_{y,z} \frac{h_z^2}{4}, \quad (15)$$

где $w(x, y_z)$ — секториальная площадь или функция кручения Сен-Венана.

В связи с тем, что все геометрические характеристики поперечного сечения меняются по длине элемента, потребуется ввести функции, удовлетворяющие условию изменения высоты поперечного сечения двухтаврового элемента по длине элемента. С этой целью возможно применить линейные и квадратичные биномы. Для уравнений (13)–(15) следует рассмотреть квадратичную функцию следующего вида:

$$I_{i,z} = I_{i,1} \left(1 - \left(1 - \sqrt{\frac{I_{i,0}}{I_{i,1}}} \right) \frac{z}{l} \right)^2 = I_{i,1} (1 - b_i \xi)^2, \quad (16)$$

где $I_{i,1}$ и $I_{i,0}$ — геометрические характеристики поперечного сечения элемента переменной жесткости на опорах; $b_i = 1 - t_i''$ — коэффициент переменности; t_i — безразмерный геометрический параметр элемента переменной жесткости.

Прежде чем продолжить, добавим несколько примечаний. Момент инерции $I_{y,z}$ практически не меняется по длине элемента. По причине малого влияния изменения высоты двутавра на результат его можно смело оставить как постоянную величину I_y . А поскольку постоянная сечения $C_{w,z}$ зависит

от I_y , ее можно выразить в формуле (16) через $t_1 = h_0/h_1$:

$$C_{w,z} = C_{w,1}(1 - (1 - t_1)\xi)^2. \quad (17)$$

Полярный радиус инерции также можно сформулировать в форме квадратичного двучлена:

$$r_z^2 = \frac{1}{P} \int_{A_z} \sigma x^2 dA_z + \frac{1}{P} \int_{A_z} \sigma y_z^2 dA_z; \quad (18)$$

$$r_z^2 = r_1^2(1 - (1 - t_4)\xi)^2, \quad (19)$$

где $t_4 = r_0/r_1$ — безразмерный параметр кручения.

Постоянная кручения Сен-Венана, возникающая вследствие чистого кручения, линейно изменяется по длине и определяется как сумма моментов инерции пластин, из которых состоит поперечное сечение элемента:

$$J = \frac{1}{3} \int_0^L \delta^3 ds; \quad (20)$$

$$J_z = J_1(1 - (1 - t_2)\xi), \quad (21)$$

где $t_2 = \sqrt{J_0/J_1}$ — безразмерный параметр чистого кручения.

Подставляя нормальные напряжения σ в выражение (11), получим:

$$q_x = -Pu'' + P\beta\phi' - M_x\phi''. \quad (22)$$

Как видно из формулы (22), возникает дополнительный член при осевой сжимающей силе, связанный опять с углом конусности. Это дает первое представление о характере взаимосвязей в элементе с конусностью, подверженном действию осевой силы и изгибающего момента. Иногда из-за незначительного влияния конусности не удается увидеть разницы между призматической и непризматической формулировками. Но, когда влияние конусности становится достаточным, эти изменения проявляют себя.

Последнее уточнение следует внести в уравнение приращения крутящего момента m_z относительно

переменной s . Выражение для приращения крутящего момента включает интенсивность нагрузки p_y и p_x :

$$dm_z = [p_y x - p_x y_z] ds, \quad (23)$$

где $p_y = \sigma \delta v'' + \sigma \delta x \phi''$ — интенсивность нагрузки относительно оси y и записывается в неизменном виде как для призматического стержня.

Подставим выражение (9), нормальные напряжения σ (12) и $\delta ds = dA_z$ в уравнение приращения крутящего момента (23) и проинтегрируем относительно dA_z :

$$m_z = -M_x u'' - M_y v'' + M_x \beta \phi' - Pr_z^2 \phi''. \quad (24)$$

Теперь, когда все уточнения сделаны, остается подставить в систему дифференциальных неоднородных уравнений равновесия тонкостенного элемента открытого профиля. Получим уточненную систему дифференциальных уравнений, которая справедлива для стержня, показанного на рис. 2:

$$\begin{cases} EI_y u^{IV} + Pu'' + M_x \phi'' + P\beta \phi' = 0; \\ EI_{x,z} v^{IV} + Pv'' + M_y \phi'' = 0; \\ EC_{w,z} \phi^{IV} - GJ_z \phi'' + M_x u'' + M_y v'' + Pr_z^2 \phi'' + \\ + q_x^0 e_x \phi + q_y^0 e_{y,z} \phi + M_x \beta \phi' = 0, \end{cases} \quad (25)$$

где E — модуль упругости; G — модуль сдвига; e_x — эксцентриситет, перпендикулярный оси x ; $e_{y,z}$ — эксцентриситет, перпендикулярный оси y .

Решение задачи упругой потери устойчивости конического элемента включает в себя не только обычно рассматриваемые переменные, но и новые члены, обусловленные углом конусности β . Дополнительный изгибающий момент M_x , возникающий при первой производной угла закручивания, является прямым доказательством того, что коэффициент градиента момента C_b , используемый для двояко-симметричных призматических стержней, не может быть использован для конических элементов. Мы не можем принять значения, аналогичные рекомендованным в Design Guide 25. Применение такого решения даже к конической балке-колонне с малым

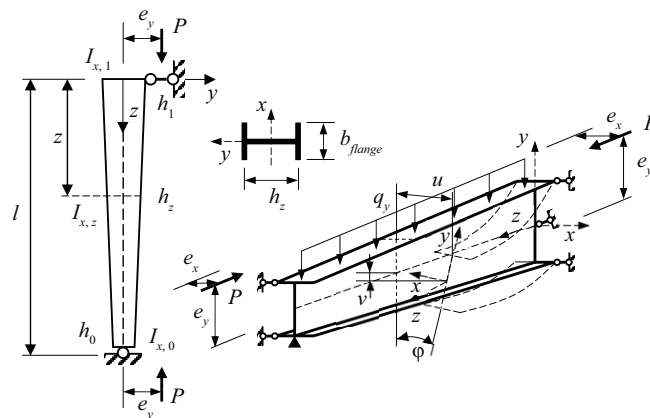


Рис. 2. Симметричный двутавровый стержень с линейно изменяющейся высотой стенки

Fig. 2. Symmetrical I-beam with linearly varying wall height

углом конусности может оказаться небезопасным. Поведение таких элементов при продольном изгибе с кручением будет иметь двойное выражение. Поскольку становится ясно, что любой конический элемент при изгибе испытывает различные состояния изгиба с кручением. Это зависит от того, с какой стороны балки-колонны изменяется изгибающий момент. Из этого также следует, что сжатый конический элемент, нагруженный только осевой силой, ничем не отличается от призматического элемента (кроме переменного момента инерции в плоскости наибольшей жесткости по длине). Похоже, что мы имеем дело с чем-то, что еще не было описано. Поскольку это явление зависит от угла конусности, его необходимо вначале разрешить при рассмотрении потери устойчивости балки.

Запишем граничные условия для изгибаемой балки с шарнирным опиранием в случае изгибно-крутильной потери устойчивости. Осевая сила $P=0$, изгибающий момент из плоскости $M_y=0$ и эксцентриситет нагрузки $e_x=0$. Для балки, которая может свободно поворачиваться и не стеснена в деформации $\varphi=\varphi''=0$, при $z=0=l$ описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} EI_y u'' + M_x \varphi = 0; \\ EI_{x,z} v^{IV} = 0; \\ EC_{w,z} \varphi^{IV} - GJ_z \varphi'' + M_x u'' + q_y^0 e_{y,z} \varphi + \\ + M_x \beta \varphi' = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Подстановка первого уравнения системы в третье дает дифференциальное уравнение четвертого порядка изгибно-крутильной формы потери устойчивости шарнирно-опертой балки, нагруженной поперечными силами Q, q, M_x с учетом влияния угла конусности β :

$$EC_{w,z} \varphi^{IV} - GJ_z \varphi'' - \frac{M_x^2}{EI_y} \varphi + q_y^0 e_{y,z} \varphi + M_x \beta \varphi' = 0. \quad (27)$$

Существует несколько способов решить такое дифференциальное уравнение. Но мы будем использовать аналитический метод Бубнова — Галёркина. В самом общем случае применяется следующее приближенное решение:

$$y = \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(z), \quad (28)$$

где A_i — некоторые неизвестные постоянные коэффициенты; $\varphi_i(z)$ — функция, удовлетворяющая граничным условиям.

Подставляя формулу (28) в (27), получим:

$$\begin{aligned} L_{\omega,i} &= EC_{w,z} \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i^{IV}(z) + \\ &+ GJ_z \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i''(z) - \frac{M_x^2}{EI_y} \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(z) + \\ &+ q_y^0 e_{y,z} \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i(z) + M_x \beta \sum_{i=1}^n A_i \varphi_i'(z) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Метод Бубнова — Галёркина заключается в том, чтобы каждая из отдельных функций аппроксимации оставалась ортогональной. Ортогональность не будет нарушена в том случае, если функцию умножить на любую пробную функцию $\varphi_k(z)$ и составить интеграл по всей длине стержня. Поэтому если умножить выражение (29) на функцию $\varphi_k(z)$ и проинтегрировать по всей длине балки, то должен получиться ноль:

$$\int_0^l L_{\omega,i} \varphi_k(z) dz = 0. \quad (30)$$

Равенство справедливо при любом $k = 1, 2, \dots, n$. В канонической форме:

$$c_{k1} A_1 + c_{k2} A_2 + c_{k3} A_3 + \dots + c_{kn} A_n = 0, \quad (31)$$

где $c_{ki} = \int_0^l L_{\omega,i} \varphi_k(z) dz$.

Если решение дифференциального уравнения представляется рядом, включающим только первое слагаемое, тогда следует очевидное:

$$c_{11} A_1 = 0. \quad (32)$$

В самом общем случае, когда принимается несколько функций, уравнения получаются однородными. В итоге возникает система из n -го числа алгебраических уравнений устойчивости при неизвестных коэффициентах:

$$\begin{cases} c_{11} A_1 + c_{12} B_1 + c_{13} C_1 + \dots + c_{1n} N_1 = 0; \\ \dots \\ c_{n1} A_1 + c_{n2} B_1 + c_{n3} C_1 + \dots + c_{nm} N_1 = 0, \end{cases} \quad (33)$$

где A_1, B_1, C_1 и N_1 — неизвестные постоянные коэффициенты, которые удобно решать путем приравнивания определителя к нулю:

$$D = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nm} \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Для шарнирно-опертого стержня при свободной возможности закручиваться (без стеснения деформации) за базисные функции обычно принимают ряд синуса:

$$\varphi_i(z) = A_1 \sin \frac{\pi z}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi z}{l} \dots + A_i \sin \left(\frac{i\pi z}{l} \right). \quad (35)$$

Дифференциальные уравнения также содержат производные первого, второго и четвертого порядков:

$$\theta' = A_1 \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi z}{l} + A_2 \frac{2\pi}{l} \cos \frac{2\pi z}{l} \dots \quad (36)$$

$$\theta'' = -A_1 \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} - A_2 \frac{4\pi^2}{l^2} \sin \frac{2\pi z}{l} \dots \quad (37)$$

$$\theta^{IV} = A_1 \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi z}{l} + A_2 \frac{16\pi^4}{l^4} \sin \frac{2\pi z}{l} \dots \quad (38)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Изгибно-крутильная потеря устойчивости балки

Безразмерный параметр длины балки $\xi = z/l$, $0 \leq \xi \leq 1$. Первая и вторая производные от ξ :

$$\xi' = \frac{d\xi}{dz} = \frac{1}{l}; \tag{39}$$

$$\xi'' = \frac{d^2\xi}{dz^2} = 0. \tag{40}$$

Безразмерный изгибающий момент m_b :

$$m_b = \frac{M_x}{M_{b,max}}, \tag{41}$$

где M_x — функция или закон изменения изгибающего момента по длине балки, который зависит от типа поперечной нагрузки или комбинации внешних нагрузок; $M_{b,max}$ — максимальный изгибающий момент от действия внешних нагрузок.

Первая производная m_b по переменной dz даст поперечную силу:

$$\frac{dm_b}{dz} = \frac{dM_x}{dz} \frac{1}{M_{b,max}} = \frac{Q_y}{M_{b,max}}. \tag{42}$$

Первая производная безразмерной величины изгибающего момента m_b по переменной $d\xi$:

$$\frac{dm_b}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{m'_b}{l}. \tag{43}$$

Вторая производная безразмерного параметра изгибающего момента m_b от переменной dz даст равномерно распределенную нагрузку:

$$\frac{d^2m_b}{dz^2} = \frac{d^2M_x}{dz^2} \frac{1}{M_{b,max}} = -\frac{q_y}{M_{b,max}}. \tag{44}$$

Вторая производная m_b с учетом уравнения (43):

$$\frac{d^2m_b}{d\xi^2} = \frac{m''_b}{l^2}. \tag{45}$$

Приравнявая выражения (44) и (45), получим:

$$q_y = -\frac{M_{b,max}}{l^2} m''_b. \tag{46}$$

Подставляя безразмерные параметры и переменные в уравнение (30), получим интегральное равенство изгибно-крутильной устойчивости балки переменной жесткости в безразмерных переменных:

$$\int_0^1 \left(EC_{w,z} \frac{\pi^4}{l^4} \sin^2(\pi\xi) + GJ_z \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2(\pi\xi) - \frac{M_{cr}^2}{EI_y} m_b^2 \sin^2(\pi\xi) + M_{cr} \frac{e_{y,z}}{l^2} m_b'' \sin^2(\pi\xi) + M_{cr} m_b \beta \frac{\pi}{l} \cos(\pi\xi) \sin(\pi\xi) \right) d\xi = 0. \tag{47}$$

Рассмотрим балку, подверженную действию неравных моментов, приложенных на концах стержня, как это показано на рис. 3. Следовательно, эксцентриситет нагрузки $e_{y,z} = 0$. Закон изменения изгибающего момента:

$$m_b = (\xi(1+k) - 1), \tag{48}$$

где $k = M_B/M_A$.

Следует также помнить, что геометрические свойства балки $C_{w,z}$ и J_z ранее были получены как квадратичные и линейные функции. Поэтому, учитывая упомянутые выше уравнения (17), (21) и (48), получаем:

$$EC_{w,1} \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^1 (1 - (1-t_1)\xi)^2 \sin^2(\pi\xi) d\xi + GJ_1 \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^1 (1 - (1-t_2)\xi) \sin^2(\pi\xi) d\xi + \frac{M_{cr}^2}{EI_y} \int_0^1 (\xi(1+k) - 1)^2 \sin^2(\pi\xi) d\xi + M_{cr} \beta \frac{\pi}{l} \int_0^1 (\xi(1+k) - 1) \cos(\pi\xi) \sin(\pi\xi) d\xi = 0. \tag{49}$$

Чтобы решить такие интегралы вначале необходимо понизить степень функции $\sin^2(\pi\xi) = 0,5(1 - \cos(2\pi\xi))$, затем применить формулу Ньютона — Лейбница. Интегрируя, получаем замкнутое реше-

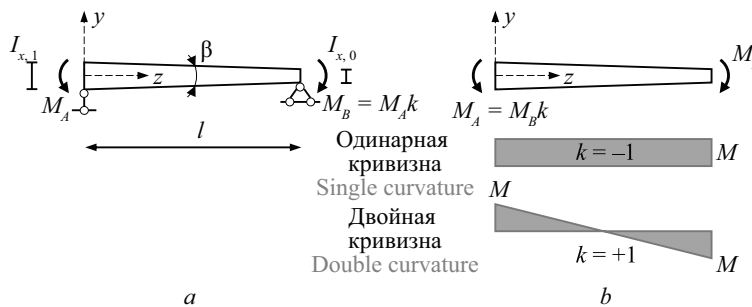


Рис. 3. Балка переменной жесткости, подверженная действию неравных конечных изгибающих моментов

Fig. 3. Beam of variable stiffness subjected to unequal end bending moments

ние, которое содержит полиномиальные функции вместе с конической частью изгибающего момента:

$$EC_{w,1} \frac{\pi^4}{l^4} a_{10} + GJ_1 \frac{\pi^2}{l^2} a_{20} - \frac{M_{cr}^2}{EI_y} a_{30} - 2M_{cr} \beta \frac{1}{l} a_{31} = 0, \quad (50)$$

где $a_{10} = 0,283t_1^2 + 0,434t_1 + 0,283$ — редуционный коэффициент при секториальной жесткости; $a_{20} = 0,5(t_2 + 1)$ — редуционный коэффициент при жесткости при закручивании; $a_{30} = 0,283k^2 - 0,434k + 0,283$ и $a_{31} = 0,25(k + 1)$ — коэффициенты влияния градиента изгибающего момента; $t_1 = h_0/h_1$ и $t_2 = I_{t,0}/I_{t,1}$ — переменные балки.

Уменьшение кручения на самом деле не так велико, как уменьшение секториальной жесткости. a_{20} обычно составляет около 0,8–0,9 для симметричных двухавровых конических элементов. Редуционный коэффициент при секториальной жесткости является наиболее важным в задаче изгибно-крутильной потери устойчивости. Даже для малого угла конусности эффект достаточно силен, чтобы вызвать значительную корреляцию в упругом критическом моменте. Неудивительно, что он зависит от соотношения высот балки. Даже обычный с точки зрения практики угол $\beta = 3^\circ$ может вызвать уменьшение M_{cr} примерно на 15%. Это существенно большее уменьшение, чем можно представить. И его рост будет непропорционально больше для углов, близких к $\beta = 10^\circ$. Он составляет примерно 70–80% от призматического решения M_{cr} . Будет уместно напомнить здесь статью В.А. Voley о точности теории Эйлера – Бернулли для балок переменного сечения [13]. А также его цитату, включенную в руководство по проектированию Design Guide 25 [14, 15]: «Обнаружено, что нормальные напряжения, рассчитанные с использованием теории Эйлера — Бернулли, имеют точность в пределах нескольких процентов, пока угол конусности был меньше 15° ». Возможно, это слишком оптимистичное предложение.

После некоторых преобразований получаем уравнение упругого критического момента $M_{cr,\beta}$ для двухавровой балки переменной жесткости с шарнирным опиранием свободной поворачиваться и деформироваться в плоскости:

$$M_{cr,\beta} = -\beta \frac{EI_y}{l} \frac{a_{31}}{a_{30}} + \sqrt{\left(\beta \frac{EI_y}{l} \frac{a_{31}}{a_{30}}\right)^2 + \sqrt{+ \frac{1}{a_{30}} \frac{\pi^2}{l^2} GJ_1 EI_y \left(\frac{\pi^2 EC_{w,1}}{l^2 GJ_1} a_{10} + a_{20}\right)}}. \quad (51)$$

Из приведенного выше уравнения можно наблюдать, как угол конусности β влияет на упругий критический момент. И, прежде чем обсудить уравнение более подробно, необходимо выполнить до-

полнительные преобразования, чтобы получить более стандартное выражение для возникшего нового члена, содержащего угол β .

Большинство норм проектирования предлагают следующую форму записи уравнения критического момента при продольном изгибе с кручением:

$$M_{cr} = C_b M_{0cr}, \quad (52)$$

где C_b — коэффициент градиента момента, который обычно учитывает дополнительное сопротивление продольному изгибу с кручением, если приложенная нагрузка отличается от чистого изгиба; M_{0cr} — упругий критический момент при действии одинаковых концевых изгибающих моментов.

В сокращенной форме записи коэффициент влияния градиента изгибающего момента:

$$C_b = \sqrt{\frac{1}{a_{30}}} = \sqrt{\frac{1}{0,283k^2 - 0,434k + 0,283}}. \quad (53)$$

Дополнительный изгибающий момент, возникающий из-за угла наклона поясов:

$$M_\beta = \beta \frac{EI_y}{l}. \quad (54)$$

Дополнительный коэффициент влияния градиента изгибающего момента:

$$C_\beta = \frac{a_{31}}{\sqrt{a_{30}}}. \quad (55)$$

Нормативный изгибно-крутильный параметр (или характеристика) балки:

$$W^2 = \frac{\pi^2 EC_{w,1}}{l^2 GJ_1}. \quad (56)$$

Критический изгибающий момент при чистом изгибе (с дополнительным нижним индексом 0):

$$M_{0cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{GJ_1 EI_y} \sqrt{W^2 a_{10} + a_{20}}. \quad (57)$$

Подставляя уравнения (53)–(57) в (51), выражение сократится до следующего:

$$M_{cr,\beta} = \sqrt{M_\beta^2 C_\beta^2 C_b^2 + C_b^2 M_{0cr}^2} - M_\beta C_\beta C_b. \quad (58)$$

Упростим уравнение (58). Выносим часть $C_b M_{0cr}$ из-под корня:

$$M_{cr,\beta} = C_b M_{0cr} \sqrt{1 + \frac{M_\beta^2 C_\beta^2}{M_{0cr}^2}} - M_\beta C_\beta C_b. \quad (59)$$

Выражение под корнем в уравнении (59) можно разложить в степенной ряд или просто пренебречь им ввиду его малого влияния и принять в виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots = \\ &= \sqrt{1 + \frac{b}{a^2}} \approx 1 + \frac{b}{2a^2} = 1 + \frac{M_\beta^2 C_\beta^2}{2M_{0cr}^2} \approx 1. \end{aligned} \quad (60)$$

Если это так, тогда:

$$M_{cr,\beta} = C_b M_{0cr} - M_\beta C_b C_\beta = C_b M_{0cr} \left(1 - \frac{M_\beta C_\beta}{M_{0cr}} \right). \quad (61)$$

Таким образом, можно установить, что упругий критический изгибающий момент $M_{cr,\beta}$ конической балки вычисляется с помощью эквивалентной аналогии, которая заключается в определении редуцированных коэффициентов a_{10} и a_{20} . Для определения коэффициента градиента момента с учетом угла конусности необходимо применить дополнительный поправочный коэффициент C_β , учитывающий изменение угла наклона поясов балки. Если угол наклона равен нулю, тогда уравнение (61) принимает обычный вид:

$$M_{cr} = C_b M_{0cr} = C_b \frac{\pi}{l} \sqrt{GJ_1 EI_y} \sqrt{W^2 + 1}. \quad (62)$$

Важно отметить, что в уравнении (50) присутствует зеркальность. Она скрыта и не может быть легко обнаружена. Изменение изгибающего момента, согласно уравнению (41), представляет собой линейную функцию, но только при условии изменения изгибающего момента с правой стороны балки (рис. 3, а). Если изгибающий момент изменяется с левой стороны балки (рис. 3, б), то имеем другой закон изменения изгибающего момента:

$$m_b = (k - \xi(1 + k)), \quad (63)$$

где $k = M_A/M_B$.

Для призматического балочного элемента с шарнирным закреплением по концам выбор между уравнениями (48) и (63) не имеет никакого значения. Интегрируя, получаем одинаковый результат. Но для конического балочного элемента данная особенность крайне важна. Путь, по которому следует упругий критический момент $M_{cr,\beta}$, совпадает только с чистым изгибом $k = -1$ и точкой двойной кривизны при $k = +1$. Это также относится к коэффициенту градиента момента C_b . Вот почему коэффициент C_b имеет

двойное выражение или двойное значение. Он зависит от того, с какой стороны балки происходит изменение изгибающего момента (его варьирование). Чтобы продемонстрировать это, можно построить график (рис. 4, а), который показывает коэффициенты C_b , полученные из конечно-элементного анализа (в программах ABAQUS и LIRA-SAPR) при $\beta = 0,05$ рад (или $\beta = 2,86^\circ$). Для сравнения, насколько точно уравнение (51), сопоставляем его с результатами МКЭ. Возможно построить и другой график, показанный на рис. 4, б, на котором видно, что аналитическое решение дает приемлемые оценки по сравнению с МКЭ. Погрешность не превышает 8 %. Следует также учитывать, что погрешность для балок с углом β , близким к 10° , будет больше, особенно в области двойной кривизны. Для ликвидации погрешности необходимо добавить дополнительные члены ряда синуса в методе Бубнова — Галёркина. Это будет сделано далее.

Но прежде обратим внимание на рис. 5 и обсудим выбор аппроксимирующих функций. Не совсем понятно, почему функция $\sin(\pi\xi)$ всегда рассматривается как вариант для анализа потери устойчивости элементов с конической стенкой. Р. Nelson и Т.М. Murray [15] обратили на это внимание. Они исследовали ту же задачу, но с применением функции:

$$\varphi_1(z) = A_1 \xi \sin(\pi\xi). \quad (64)$$

Что является довольно странным выбором, потому что такая функция не удовлетворяет граничным условиям шарнирно-опертой балки. Функция $\xi \sin(\pi\xi)$ может создавать асимметрию в прогибе, но она также создает ограничение для свободного поворота одного из концов балки (рис. 5). Это привело их к неправильным концепциям и неадекватному значению C_b при потере устойчивости балки в области двойной кривизны. Но они были абсолютно правы относительно двойного выражения для C_b и указали на то, что некорректно использовать функцию $\sin(\pi\xi)$. Вот в чем проблема. Уравнение (35) является симметричной функцией. Оно в основном бесполезно для определения прогибов в конических элементах. Этот тип

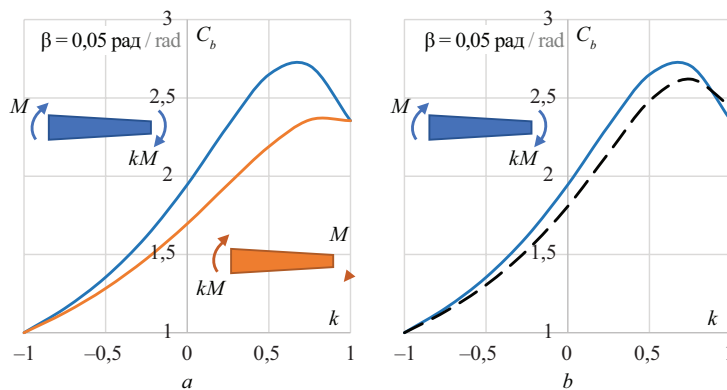


Рис. 4. Коэффициент градиента момента C_b при угле конусности балки $\beta = 0,05$ рад

Fig. 4. Moment gradient factors C_b with taper angle $\beta = 0.05$ rad

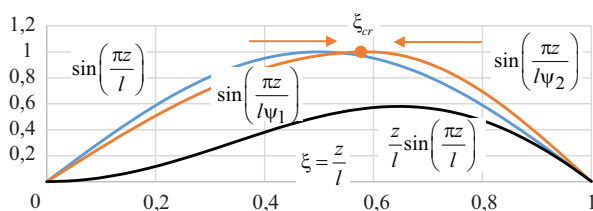


Рис. 5. График сравнения функций

Fig. 5. Function comparison chart

функции не может уловить весь асимметричный феномен конических элементов, который оказывает влияние на практически все составляющие уравнения упругого критического момента, особенно на коэффициент градиента момента C_b . Когда применяем $\sin(\pi\xi)$, имеем максимальный прогиб в середине балки $\xi_{\max} = 0,5$. Но для конической балки максимальный прогиб должен быть где-то после величины $\xi_{\max} = 0,5$ и ближе к концу балки с наименьшей высотой поперечного сечения. Поэтому можно предположить, что коэффициент асимметрии $\psi_1 \geq 1$ (рис. 5, 6) поможет найти такую точку. Если это так, то можно преобразовать функцию синуса следующим образом:

$$y(\xi) = f_0 \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\xi}{\psi_1/2}\right); & 0 \leq \xi < \frac{\psi_1}{2}; \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-\xi}{1-\psi_1/2}\right); & 1 \geq \xi \geq \frac{\psi_1}{2}, \end{cases} \quad (65)$$

где ξ — безразмерная длина $0 \leq \xi \leq 1$; f_0 — амплитуда; ψ_1 — асимметричная функция, которая зависит от β .

В алгебраической форме записи:

$$y(\xi) = f_0 \left[\sin\left(\frac{\pi\xi}{\psi_1}\right) \Big|_0^{0,5\psi_1} + \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-\xi}{1-\psi_1/2}\right) \Big|_{0,5\psi_1}^1 \right]. \quad (66)$$

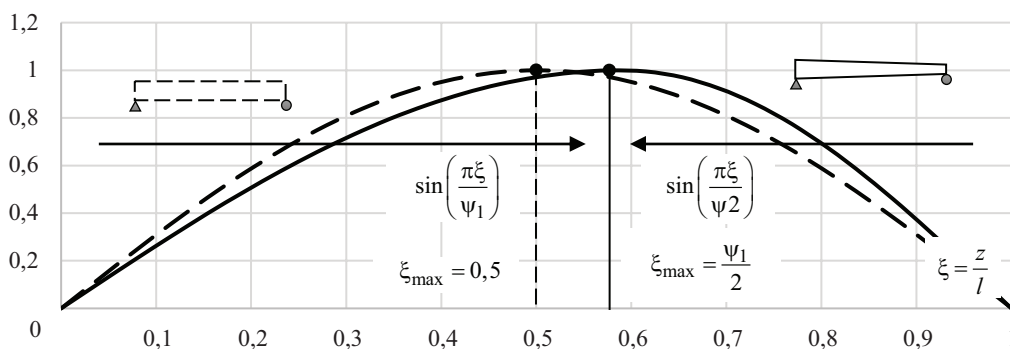


Рис. 6. Прогиб призматического и конического элемента

Fig. 6. Deflection of prismatic and conical elements

Чтобы убедиться в точности предположения, можно проверить это, подставив любые значения ψ_1 непосредственно в представленное интегральное равенство:

$$\int_0^1 \sin(\pi\xi) d\xi = \int_0^{\frac{\psi_1}{2}} \sin\left(\frac{\pi\xi}{\psi_1}\right) d\xi + \int_{\frac{\psi_1}{2}}^1 \sin\left(\pi \frac{1-\xi}{2-\psi_1}\right) d\xi. \quad (67)$$

Ответ всегда остается равным $0,637$ или $2/\pi$. Также можно заменить тригонометрическую функцию полиномом. Данный вопрос уже неоднократно поднимался, например, Marques и соавт. [4], Bai и соавт. [16], Chen и соавт. [17]. К примеру, начальная кривизна шарнирно-опертого конического стержня вместо половины волны синуса может быть аппроксимирована полиномом третьей степени:

$$y(\xi) = f_0(12(1-\psi_1)\xi - (19(1-\psi_1) + 4)\xi^2 + (7(1-\psi_1) + 4)\xi^3). \quad (68)$$

Как уже упоминалось ранее, для уточнения решения упругого критического момента необходимо ввести дополнительные члены ряда синуса. Это позволит уточнить коэффициенты редукции и градиента изгибающего момента и уменьшить невязку. Однако возникающая система линейных алгебраических уравнений не дает возможность показать решение в замкнутой форме. Поэтому на основе численного анализа были получены следующие аппроксимационные уточнения в уравнении упругого критического момента (61), которые представлены ниже.

Коэффициент редукции при секториальной жесткости a_{10} скорректируется до следующего:

$$a_{10}^2 = (0,4 + 0,6t_1)^2 = 0,36t_1^2 + 0,48t_1 + 0,16. \quad (69)$$

Как видим, редукция оказывается больше, чем прежде.

Но коэффициент редукции при чистом кручении a_{20} остается таким же. И для упрощения воз-

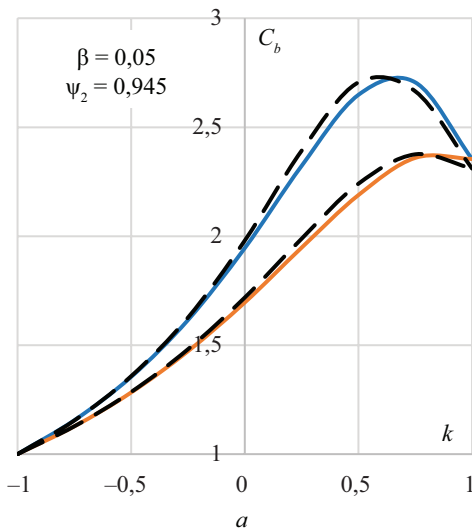
можно даже принять единственное постоянное значение $a_{20} = 0,8$ в качестве нижней границы решений.

Вместо комплексного выражения, включающего произведение $M_\beta C_\beta$, коэффициент градиента момента C_b был скорректирован до единой формы записи. Используя асимметричную функцию синуса, полученную в уравнении (65), можно снова проинтегрировать уравнение (49). Это приводит к менее оптимизированному и прозрачному выражению. Однако после некоторой работы путем подбора получаем модифицированное выражение C_b , которое теперь состоит из k и нового коэффициента ψ_2 , зависящего от угла конусности:

$$C_b = \sqrt{\frac{1}{a_{30}^*}} = \begin{cases} C_{b,0} \\ C_{b,1} \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{\psi_2 \left(\left(\frac{1}{\psi_2} - 0,7 \right) k^2 - 0,43k + 0,27 \right)}} \\ \sqrt{\frac{1}{\psi_2 \left(0,27k^2 - 0,43k + \left(\frac{1}{\psi_2} - 0,7 \right) \right)}} \end{cases}, \quad (70)$$

где $\psi_2 = 1 - 1,1\beta$ — функция от угла конусности, рад, что, по существу, представляет собой простую линейную аппроксимацию, показывающую достаточно достоверные значения.

Теперь уравнение (70) имеет двойное выражение в явном виде. Опять, основываясь на рис. 4, а, если изгибающий момент изменяется при меньшей высоте балки, следует использовать $C_{b,0}$, в противном случае $C_{b,1}$.



Если $\psi_2 = 1$, тогда получим более точное уравнение коэффициента C_b , чем по уравнению (53) для балки постоянной жесткости:

$$C_b = \sqrt{\frac{1}{0,3k^2 - 0,43k + 0,27}}. \quad (71)$$

Между двумя формулами нет большой разницы, но уравнение (53) математически более естественно, пусть даже с погрешностью 4–5 %. Однако уравнение (71) не имеет никакой погрешности. Но оно конфликтует с выражением (70), поскольку числовые коэффициенты в формуле (70) несимметричны и это может сбивать с толку. Ведь $C_{b,1}$ — это теоретическая кривая, которая не имеет практического значения в рамных системах, лишь в статически определимых.

Итак, окончательное аналитическое решение для упругого критического момента конической балки будет записано следующим образом:

$$M_{cr,\beta} = C_b M_{0cr} = \sqrt{\frac{1}{a_{30}^*}} \cdot \frac{\pi}{l} \sqrt{GI_{t,1} EI_y} \sqrt{W^2 a_1^2 + a_{20}}. \quad (72)$$

На рис. 7, а представлены результаты, полученные с помощью уточненной формулы и методом конечных элементов. Теперь погрешность по сравнению с МКЭ не превышает 2 %. На рис. 7, б показан график зависимости величины C_b от угла конусности $\psi_2(\beta)$ в сравнении с уравнением (5.4-1) из руководства по проектированию Design Guide 25:

$$C_b = 1,75 + 1,05k - 0,3k^2 \leq 2,3. \quad (73)$$

Из графиков можно понять, насколько сложен коэффициент градиента момента C_b и в особенности в об-

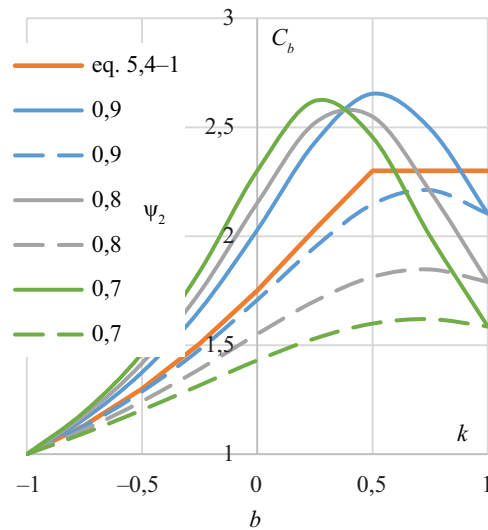


Рис. 7. Сравнительные графики коэффициента градиента момента C_b

Fig. 7. Moment gradient factors C_b comparison

ласти значений, когда балка теряет устойчивость по двум полуволнам. Большая разница между кривыми. Это делает коэффициент C_b более непредсказуемым и требует ограничений в зависимости угла конусности. Применение уравнения (73) несколько небезопасно, когда угол конусности β составляет 3 градуса или более. Это прямое свидетельство возможных отказов из-за изгибно-крутильной потери устойчивости. В теории имеем довольно оптимистичные результаты, но в реальности у нас нет никаких резервов в несущей способности. Возможно, что это наиболее остро ощущается, когда рама находится под высокой квазидинамической горизонтальной нагрузкой, такой как ветер. Феномен требует более тщательного изучения.

Изгибно-крутильная потеря устойчивости колонны

Перейдем к рассмотрению упругой изгибно-крутильной потери устойчивости симметричной двухтавровой колонны с линейно изменяющейся стенкой. Колонна нагружена осевой сжимающей силой P и изгибающим моментом в плоскости наибольшей жесткости $M_x = P e_y$, как это показано на рис. 8.

Граничные условия для колонны при изгибно-крутильной потере устойчивости остаются аналогичными условиям балочного случая. Изгибающий момент из плоскости $M_y = 0$, а эксцентриситет силы $e_x = 0$. Колонна не стеснена в деформации конечных сечений. Это приводит к следующей системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} EI_y u^{IV} + Pu'' + M_x \phi'' + P\beta \phi' = 0; \\ EC_{w,z} u^{IV} - GJ_z u'' + M_x u'' + Pr_z^2 \phi'' + M_x \beta \phi' = 0. \end{cases} \quad (74)$$

Как и при рассмотрении вопроса плоской формы устойчивости балочного элемента необходимо выбрать две аппроксимационные функции: одну для поворота ϕ , другую для перемещений u . Исходя из граничных условий, вновь можно принять функцию синуса. Не будем вводить здесь асимметричный коэффициент, как прежде, только обычную функцию синуса. Не нужно вносить никаких дополнительных изменений в решение для колон-

ны, потому что изгибно-крутильная потеря устойчивости колонны включает в себя балочное решение. И поскольку уточнения уже были выполнены, можно подставить уравнение (74) в уравнение (30) и проинтегрировать его. Получим алгебраическую систему из двух уравнений с неизвестными коэффициентами A_1 и B_1 :

$$\begin{cases} A_1 EI_y \frac{\pi^4}{l^2} - A_1 P \frac{\pi^2}{l^2} - B_1 M_x \frac{\pi^2}{l^2} a_{32} = 0; \\ B_1 C_{w,z} \frac{\pi^4}{l^2} a_{10} + B_1 GJ_z \frac{\pi^2}{l^2} a_{20} - A_1 M_x \frac{\pi^2}{l^2} a_{32} - \\ - B_1 Pr_1^2 \frac{\pi^2}{l^2} a_{40} - B_1 M_x 2\beta \frac{1}{l} a_{31} = 0, \end{cases} \quad (75)$$

где $a_{32} = 0,5(k-1)$ — коэффициент градиента момента, схожий с балочным решением; $a_{40} = 0,283t_4^2 + 0,434t_4 + 0,283$ — коэффициент редукции полярного радиуса инерции; $t_4 = r_o/r_1$ — отношение полярного радиуса инерции на концах стержня.

Из первого уравнения системы (75) можно установить, что:

$$A_1 = B_1 \frac{M_x a_{32}}{1 - P/P_y} \frac{1}{EI_y}. \quad (76)$$

Подставляя выражение (76) во второе уравнение системы (75), получим:

$$\begin{aligned} GJ_1 \frac{\pi^2}{l^2} (W^2 a_{10} + a_{20}) - \frac{M_x^2 a_{32}^2}{1 - P/P_y} \frac{1}{EI_y} - \\ - Pr_1^2 a_{40} - M_x 2\beta l a_{31} = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Из уравнения (77) следует выделить изгибно-крутильную силу колонны переменной жесткости. Также можно сразу подставить уточненное значение коэффициента редукции a_1 , полученное из балочного решения:

$$P_{ez,1} = \frac{GJ_1 (W^2 a_1^2 + a_{20})}{r_1^2 a_{40}}. \quad (78)$$

После некоторых дополнительных преобразований получаем известное изгибно-крутильное ус-

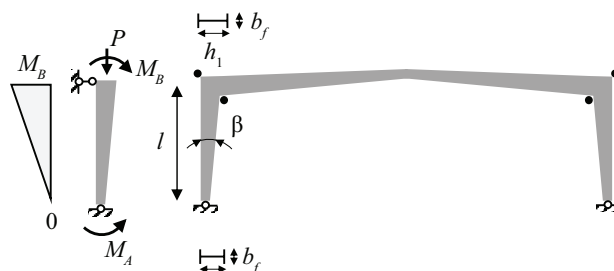


Рис. 8. Рама с элементами переменной жесткости

Fig. 8. Frame with variable stiffness elements

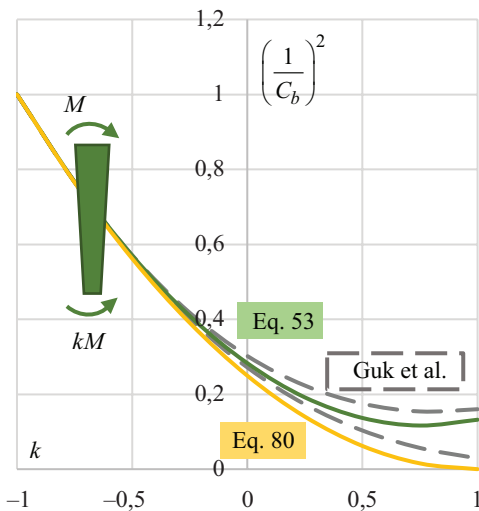


Рис. 9. Сравнительный график значений коэффициента градиента изгибающего момента C_b

Fig. 9. Moment gradient factors C_b comparison

ловие для колонны, но с эффектом, возникающим из-за наклона поясов:

$$\frac{M_x^2}{M_{0cr}^2 C_b^2} = \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \left(1 - \frac{P}{P_{ez1}}(1 + \vartheta)\right), \quad (79)$$

где M_{0cr} — упругий критический момент, определяемый из уравнения (72); C_b — коэффициент градиента изгибающего момента; P_y — упругая сила Эйлера из плоскости наибольшей жесткости; ϑ — дополнительный крутящий коэффициент, зависящий от угла конусности β .

Для случая колонны коэффициент C_b :

$$C_b = \sqrt{\frac{1}{a_{32}^2}} = \sqrt{\frac{1}{0,25k^2 - 0,5k + 0,25}}. \quad (80)$$

Это очень близко к выражению для балки. Можно сравнить уравнения (53) и (80) с численными результатами, которые были получены численно Guk и соавт. в работах [18–20]:

$$\frac{1}{C_b} = \left(\frac{1-k}{2}\right) + \left(\frac{1+k}{2}\right)^3 \left(0,4 - 0,23 \frac{P}{P_{ey}}\right). \quad (81)$$

Коэффициент градиента момента C_b по выражению (81) зависит от соотношения осевой сжимающей силы и упругой силы Эйлера из плоскости наибольшей жесткости. Возможно построить нижнюю и верхнюю границы C_b , положив, что $P/P_{ey} = 0$ и $P/P_{ey} = 1$. Рис. 9 показывает, что текущий (получен-

ный в статье) подход более точен для уравнения (81) в случае одинарной кривизны. Обычно моментная рама переменной жесткости закреплена шарнирно в базе колонны. Тогда имеем $k = 0$, $a_{32}^2 = 0,25$, $a_{30} = 0,283$ и $0,272 \leq (1/C_b)^2 \leq 0,303$, заданные уравнением (81). Уравнение (80) образует нижнюю границу результатов, а уравнение (53) образует средние значения C_b . Собственные значения из конечно-элементного анализа показывают очень хорошее согласие с уравнением (80).

Дополнительный коэффициент потери устойчивости при кручении самый сложный, так как включает в себя множество факторов и переменных:

$$\vartheta = 2\beta \frac{e_y l}{\pi^2} \frac{a_{31}}{r_1^2 a_{40}}. \quad (82)$$

Поскольку изгибающий момент изменяется линейно, то $0 \leq a_{31} \leq 0,5$. В случае чистого изгиба $k = -1$, $\vartheta = 0$. Редукция полярного радиуса инерции a_{40} обычно составляет порядка 0,6–0,8 в большинстве случаев для симметричных двутавров. Таким образом, нижняя граница изгибно-крутильного решения может быть представлена в виде более простого выражения:

$$\vartheta = 0,15\beta \frac{e_y l}{r_1^2}, \quad (83)$$

где β — угол наклона поясов; e_y — эксцентриситет силы; l — высота колонны; r_1 — полярный радиус инерции при наибольшей высоте колонны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенной теоретической работы можно сделать вывод, что методы расчета и решения задачи изгибно-крутильной потери устойчивости двутавровых тонкостенных балок-колонн с линейно-изменяющейся высотой стенки могут быть получены путем уточнения дифференциальных уравнений и представления в замкнутой форме, аналогичной для постоянного поперечного сечения, но с дополнительными поправками в форме коэффициентов. Необходимо отметить, что существующие методы не дают ответов на эти вопросы, а дают лишь поверхностное представление. В данной статье предпринята попытка показать совокупную сложность явления элементов переменной жесткости, и что существующие нормы и практика проектирования не обеспечивают достаточной степени уверенности. Как следствие, это может привести к принятию ненадежных решений.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Cywinski Z. Skrecanie Pretow Cienkosciennych Typu Dwuteownika o Dwukierunkowej Zmiennosci Przekroju // Engineering Transactions. 1968. Vol. 16. Issue 1. Pp. 21–32.

2. Cywinski Z. Skrecanie Pretow Cienkosciennych Typu Dwuteownika o Zmiennej Wysokosci Srodnika // Engineering Transactions. 1968. Vol. 2. Issue 13. Pp. 269–280.

3. Cywinski Z. Statyka i Dynamika Skrecanego Cienkosciennego Dwuteownika o Zmiennym, Bisymetrycznym Przekroju Poprzecznym // *Engineering Transactions*. 1969. Vol. 17. Issue 2. Pp. 185–217.

4. Marques L., Da Silva L.S., Rebelo C. Rayleigh-Ritz procedure for determination of the critical load of tapered columns // *Steel and Composite Structures*. 2014. Vol. 16. Issue 1. Pp. 45–58. DOI: 10.12989/scs.2014.16.1.045

5. Benyamina A.B., Meftah S.A., Mohri F., Daya E.M. Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-Beams // *Engineering Structures*. 2013. Vol. 56. Pp. 1207–1219. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.06.036

6. Andrade A., Camotim D., Dinis P.B. Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA // *Computers & Structures*. 2007. Vol. 85. Issue 17–18. Pp. 1343–1359. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.08.079

7. Andrade A., Camotim D. Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications // *Journal of Engineering Mechanics*. 2005. Vol. 131. Issue 6. Pp. 586–597. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:6(586)

8. Kim Y.D., White D.W. Practical buckling solutions for web-tapered members // *Proceedings of the annual stability conference of the structural stability research council : reports on current research activities*. 2007. Pp. 259–278.

9. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М. : Физматгиз, 1959. 574 с.

10. Vlasov V.Z. Thin-walled elastic beams. Washington D.C., National Science Foundation, 1960. 493 p.

11. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability. 2nd Ed. New York : McGraw-Hill, 1961. 560 p.

12. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М. : Гостехиздат, 1955. 567 с.

13. Boley B.A. On the accuracy of the Bernoulli-Euler theory for beams of variable section // *Journal of Applied Mechanics*. 1963. Vol. 30. Issue 3. Pp. 373–378. DOI: 10.1115/1.3636564

14. Kaehler R.C., White D.W., Kim Y.D. Frame design using nonprismatic members. 1st Ed. Design Guide 25. Chicago : AISC, 2011. 214 p.

15. Nelson P., Murray T.M. Development of simplified design methodology for tapered Beams. Rigid Frame Studies Report, Star Manufacturing Co, Oklahoma City. 1979. 136 p.

16. Bai R., Liu S.W., Liu Y.P., Chan S.L. Direct analysis of tapered-I-section columns by one-element-per-member models with the appropriate geometric imperfections // *Engineering Structures*. 2019. Vol. 183. Pp. 907–921. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.01.021

17. Chen W.F., Liu Y.P., Du Z.L., Bai R., Chan S.L. A consistent tapered beam-column element allowing for different variations and initial imperfections // *Structures*. 2021. Vol. 33. Pp. 3443–3460. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.06.069

18. Bradford M.A. Lateral stability of tapered beam-columns with elastic restrains // UNICIV Report No. R-243. University of New South Wales, Australia, 1987. 26 p.

19. Bradford M.A. Stability of tapered I-beams // UNICIV Report No. R-240, University of New South Wales, Australia, 1987. 22 p.

20. Cuk P.E., Trahair N.S., Bradford M.A. Inelastic lateral buckling of steel beam-columns. Structural Engineering Report No. 131. The University of Alberta, Canada, 1985. 16 p.

Поступила в редакцию 26 сентября 2025 г.

Принята в доработанном виде 1 октября 2025 г.

Одобрена для публикации 9 ноября 2025 г.

ОБ АВТОРЕ: Александр Олегович Ильюшенко — инженер промышленного и гражданского строительства; Территориальный проектный институт «Хабаровскпромпроект»; 680000, г. Хабаровск, ул. Уссурийский бульвар, д. 2; revivaltree@gmail.com.

REFERENCES

1. Cywinski Z. Skrecanie Pretow Cienkosciennych Typu Dwuteownika o Dwukierunkowej Zmienosci Przekroju. *Engineering Transactions*. 1968; 16(1): 21-32.

2. Cywinski Z. Skrecanie Pretow Cienkosciennych Typu Dwuteownika o Zmiennej Wysokosci Srodnika. *Engineering Transactions*. 1968; 2(13):269-280.

3. Cywinski Z. Statyka i Dynamika Skrecanego Cienkosciennego Dwuteownika o Zmiennym, Bisymetrycznym Przekroju Poprzecznym. *Engineering Transactions*. 1969; 17(2):185-217.

4. Marques L., Da Silva L.S., Rebelo C. Rayleigh-Ritz procedure for determination of the critical load

of tapered columns. *Steel and Composite Structures*. 2014; 16(1):45-58. DOI: 10.12989/scs.2014.16.1.045

5. Benyamina A.B., Meftah S.A., Mohri F., Daya E.M. Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-Beams. *Engineering Structures*. 2013; 56:1207-1219. DOI: 10.1016/j.engstruct.2013.06.036

6. Andrade A., Camotim D., Dinis P.B. Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA. *Computers & Structures*. 2007; 85(17-18):1343-1359. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.08.079

7. Andrade A., Camotim D. Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications. *Journal of Engineering Mechanics*. 2005; 131(6):586-597. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:6(586)
8. Kim Y.D., White D.W. Practical buckling solutions for web-tapered members. *Proceedings of the annual stability conference of the structural stability research council: reports on current research activities*. 2007; 259-278.
9. Vlasov V.Z. *Thin-walled elastic rods*. Moscow, Fizmatgiz, 1959; 574. (rus.).
10. Vlasov V.Z. *Thin-walled elastic beams*. Washington D.C., National Science Foundation, 1960; 493.
11. Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability*. 2nd Ed., New York, McGraw-Hill, 1961; 560.
12. Timoshenko S.P. *Stability of elastic systems*. Moscow, Gostekhizdat, 1955; 567. (rus.).
13. Boley B.A. On the accuracy of the Bernoulli-Euler theory for beams of variable section. *Journal of Applied Mechanics*. 1963; 30(3):373-378. DOI: 10.1115/1.3636564
14. Kaehler R.C., White D.W., Kim Y.D. Frame design using nonprismatic members. 1st Ed. *Design Guide 25*. Chicago, AISC, 2011; 214.
15. Nelson P., Murray T.M. *Development of simplified design methodology for tapered Beams*. Rigid Frame Studies Report, Star Manufacturing Co, Oklahoma City. 1979; 136.
16. Bai R., Liu S.W., Liu Y.P., Chan S.L. Direct analysis of tapered-I-section columns by one-element-per-member models with the appropriate geometric imperfections. *Engineering Structures*. 2019; 183:907-921. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.01.021
17. Chen W.F., Liu Y.P., Du Z.L., Bai R., Chan S.L. A consistent tapered beam-column element allowing for different variations and initial imperfections. *Structures*. 2021; 33:3443-3460. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.06.069
18. Bradford M.A. Lateral stability of tapered beam-columns with elastic restrains. *UNICIV REPORT NO. R-243*. University of New South Wales, Australia, 1987; 26.
19. Bradford M.A. Stability of tapered I-beams. *UNICIV Report No. R-240*. University of New South Wales, Australia, 1987; 22.
20. Cuk P.E., Trahair N.S., Bradford M.A. Inelastic lateral buckling of steel beam-columns. *Structural Engineering Report No. 131*. The University of Alberta, Canada, 1985; 16.

Received September 26, 2025.

Adopted in revised form on October 1, 2025.

Approved for publication on November 9, 2025.

BIONOTES: Alexander O. Ilyushenkov — civil and industrial engineer; Territorial Design Institute “Khabarovsk-promproekt”; 2 Ussuriysky Boulevard, Khabarovsk, 680000, Russian Federation; revivaltree@gmail.com.