

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.046.2

DOI: 10.22227/1997-0935.2023.10.1545-1555

Метод вероятностного анализа надежности элементов конструкций на основе граничных функций распределения

Сергей Александрович Соловьев, Анастасия Андреевна Соловьева

Вологодский государственный университет (ВоГУ); г. Вологда, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Исследование направлено на развитие методов оценки и анализа надежности элементов строительных конструкций в практических задачах, когда статистическая информация о случайных величинах может быть неполной или ограниченной. В таких случаях затруднительно выявить конкретный вид точной функции распределения случайной величины или дать точную оценку параметру распределения, так как возникает необходимость учесть эпистемологическую неопределенность, помимо алеаторной.

Материалы и методы. Для эффективного моделирования двух видов неопределенностей предлагается использовать граничные функции распределения случайной величины, которые формируют р-блок (probability box). Р-блоки позволяют учесть как неопределенность, вызванную естественной (природной) изменчивостью случайных параметров, так и неопределенность, вызванную недостатком знаний о случайной величине (количество контрольных образцов, точность измерительных приборов и т.д.).

Результаты. Предложен новый вид р-блока, построенный на неравенстве Дворецкого – Кифера – Вулфовица и неравенстве П.Л. Чебышёва, что позволяет сформировать две граничные функции распределения по данным выборочной совокупности. На численном примере показан подход к арифметическим операциям с р-блоками, которые дают возможность привести сложные математические модели к более простым и оценить вероятность безотказной работы в интервальной форме. Разница между аналитическим и численным решением по примеру составила 0,9 %.

Выводы. Граничные функции распределения позволяют более осторожно и достоверно подойти к анализу надежности строительных конструкций. Результат оценки надежности с использованием р-блоков представлен в интервальной форме. Если интервал получается слишком широким и неинформативным, то необходимо повысить количество или качество статистической информации или увеличить сечения элементов строительных конструкций для достижения нижней границы интервала требуемого уровня надежности.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: надежность, вероятностное проектирование, р-блоки, вероятность отказа, критерий Колмогорова – Смирнова, неопределенность, безопасность

Благодарности. Авторы выражают благодарность рецензентам, редакционной коллегии и сотрудникам редакции за обсуждение и подготовку к публикации настоящей работы. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-79-01035 (URL: <https://rscf.ru/project/23-79-01035/>).

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Соловьев С.А., Соловьева А.А. Метод вероятностного анализа надежности элементов конструкций на основе граничных функций распределения // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. Вып. 10. С. 1545–1555. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.10.1545-1555

Автор, ответственный за переписку: Сергей Александрович Соловьев, solovevsa@vogu35.ru.

Method of structural reliability analysis based on boundary distribution functions

Sergey A. Solovev, Anastasia A. Soloveva

Vologda State University (VSU); Vologda, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. The research is aimed at the development of methods for assessing and analyzing the structural reliability of elements of building structures in practical tasks when statistical data about random variables may be incomplete or limited. In such cases, it is difficult to identify the specific type of the exact cumulative distribution function of a random variable or to give an accurate estimate of the distribution parameter, because there is a need to take into account epistemic uncertainty in addition to aleatory uncertainty.

Materials and methods. For effective modelling of two types of uncertainties, it is proposed to use boundary distribution functions of a random variable that form a p-box (probability box). P-boxes take into account both types of uncertainty: caused by natural variability of random parameters and uncertainty caused by lack of knowledge about the random variable (number of control samples, accuracy of measuring instruments, etc.).

Results. The paper proposes a new type of p-box based on the Dvoretzky – Kiefer – Wolfowitz inequality and Chebyshev's inequality, which form two boundary distribution functions based on the sample population data. The numerical example shows the approach to arithmetic operations with p-boxes, which make it possible to bring complex mathematical models to simpler ones and estimate the failure probability in an interval form. The difference between the analytical and numerical solution for the example is 0.9 %.

Conclusions. Boundary distribution functions form a more cautious and reliable approach to the structural reliability analysis. The result of reliability assessment using p-boxes is presented in an interval form. If the interval turns out to be too wide and uninformative, then it is necessary to increase the quantity or quality of statistical data or to increase the cross-sections of structural elements to achieve the lower limit of the interval of the required reliability level.

KEYWORDS: reliability, probabilistic design, p-boxes, failure probability, Kolmogorov – Smirnov criterion, uncertainty, safety

Acknowledgements. The authors express their gratitude to the reviewers, editorial board and editorial staff for discussing and preparing this paper for publication. The research was funded by Russian Science Foundation (RSF) No. 23-79-01035 (URL: <https://rscf.ru/en/project/23-79-01035/>).

FOR CITATION: Solovlev S.A., Soloveva A.A. Method of structural reliability analysis based on boundary distribution functions. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2023; 18(10):1545-1555. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.10.1545-1555 (rus.).

Corresponding author: Sergey A. Solovlev, solovevsa@vogu35.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Надежность строительного объекта — это его способность выполнять требуемые функции в течение расчетного срока эксплуатации. В настоящее время в РФ ключевым условием надежности строительных объектов служит выполнение требований (критериев) для всех учитываемых предельных состояний при действии наиболее неблагоприятных сочетаний расчетных нагрузок в течение расчетного срока службы. Такой подход — основа метода предельных состояний. Доктор технических наук, профессор О.В. Мкртычев [1] констатирует, что «Метод предельных состояний позволяет обеспечить необходимый уровень надежности зданий и сооружений, что подтверждается опытом проектирования, строительства и эксплуатации. Однако данный метод имеет ряд недостатков, например, невозможно сказать, какой уровень надежности в количественном измерении формируется в результате применения норм проектирования, одинаков ли этот уровень надежности для зданий и сооружений различных конструктивных схем и выполненных из различных материалов».

Развитием метода предельных состояний, который иначе называется полувероятностный подход, является полный вероятностный расчет на заданный индекс надежности или вероятность отказа. Как отмечено в фундаментальной работе по концепции обеспечения безопасности строительных конструкций [2]: «Опыт показал, что аналогичные конструкции, работающие в аналогичных условиях, не обязательно полностью или частично выходят из строя в одном и том же “возрасте”. Фактически, невозможно точно оценить действительный срок службы конструкции (т.е. как долго она будет работать без отказов); лучшее, что можно сделать — это оценить вероятность достижения или превышения определенного срока службы без отказов. Таким образом, надежность может быть выражена в ве-

роятностных терминах, включая как конструктивную безопасность, так и эксплуатационную пригодность».

Теория надежности строительных конструкций активно развивается в последнее десятилетие, главным образом за рубежом [3–5]. Разработаны различные методы определения индекса надежности и вероятности безотказной работы с использованием новых методов оптимизации и программирования: кригинг, полиномиальный хаос, байесовские сети, генетические алгоритмы и др. Одна из актуальных проблем, с которой сталкиваются исследователи и инженеры в практических задачах анализа надежности, — эффективное моделирование алеаторной и эпистемологической неопределенностей.

Вероятностные методы или методы теории нечетких множеств требуют наличия функции распределения вероятностей или функции принадлежности для количественной оценки надежности. Авторы публикации [6] пишут: «Архимед говорил: “Дайте мне точку опоры, и я переверну землю”. В отличие от этого утверждения, аналитик, основывающий свои расчеты на вероятностных методах или нечетких множествах, по сути, произносит: “Дайте мне плотность распределения вероятностей или функцию принадлежности величин, и я оценю безопасность конструкции”».

Алеаторная неопределенность (aleatory uncertainty) и эпистемологическая неопределенность (epistemic uncertainty). Алеаторная неопределенность возникает вследствие объективной стохастической природы явлений, например снеговая нагрузка, неоднородность физико-механических свойств материалов и др. Эпистемологическая неопределенность появляется из-за недостатка статистической информации или неточности математических моделей, описывающих явление: событие, свойство и т.д. Классические методы анализа надежности элементов строительных конструкций, построенные на базе теории вероятностей и мате-

математической статистики, моделируют в основном лишь алеаторную неопределенность. «Теория вероятностей рассматривается как наиболее эффективный инструмент для описания случайной неопределенности при оценке надежности конструкций. За последние десятилетия было разработано множество методов оценки надежности, основанных на теории вероятностей. Хотя эти вероятностные методы целесообразны при количественной оценке и прогнозировании неопределенности, когда на сооружение в основном влияет алеаторная неопределенность, они плохо работают в сценариях, связанных с большой эпистемологической неопределенностью. Например, распределение входных параметров может быть получено неточно из-за недостаточности выборочных данных» [7]. Таким образом, для достоверной оценки надежности строительных конструкций необходим учет как алеаторной, так и эпистемологической неопределенности данных.

Одним из эффективных инструментов для учета обоих типов неопределенностей являются р-блоки (p-boxes, probability boxes) [8–10]. Р-блок представляет собой две граничные функции распределения вероятностей случайной величины, формирующие область, внутри которой находится действительная, но наперед неизвестная функция распределения вероятностей.

В настоящей статье предлагается рассмотреть метод анализа надежности элементов строительных конструкций с использованием граничных функций распределения вероятностей. Представленный подход позволит более осторожно и достоверно подойти к оценке вероятности безотказной работы элементов строительных конструкций.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В практических задачах анализа надежности зачастую возникает проблема неполной статисти-

ческой информации о контролируемых параметрах. В этом случае, например, для рассматриваемой случайной величины могут быть подобраны различные функции распределения, которые приведут к различным результатам расчета надежности, что вносит субъективность в процесс анализа надежности строительных конструкций. Одним из решений этой проблемы служит применение эмпирической информации для моделирования возможной области действительной функции распределения. Существуют различные способы построения данной области в зависимости от вида исходной статистической информации.

В труде [11] представлено неравенство, получившее название неравенство Дворецкого – Кифера – Вулфовица или неравенство ДКВ, которое отражает, насколько близка эмпирическая функция распределения вероятностей $F_n(x)$ к функции распределения $F(x)$, из которой получены эмпирические выборки:

$$\Pr\left(\sup_{x \in R} |F_n(x) - F(x)| > \varepsilon\right) \leq C \cdot e^{-2n\varepsilon^2}, \quad (1)$$

где n — количество испытаний/измерений в выборочной совокупности данных; ε — любое положительное число; C — неопределенный множитель-константа.

Математическое доказательство, что константа $C = 2$ приведено в работе [12].

На основе неравенства ДКВ (1) могут быть получены границы действительного распределения вероятностей в виде:

$$F_n(x) - \varepsilon \leq F(x) \leq F_n(x) + \varepsilon, \quad (2)$$

где $\varepsilon = \sqrt{\ln 2/\alpha/2n}$, α — доверительная вероятность.

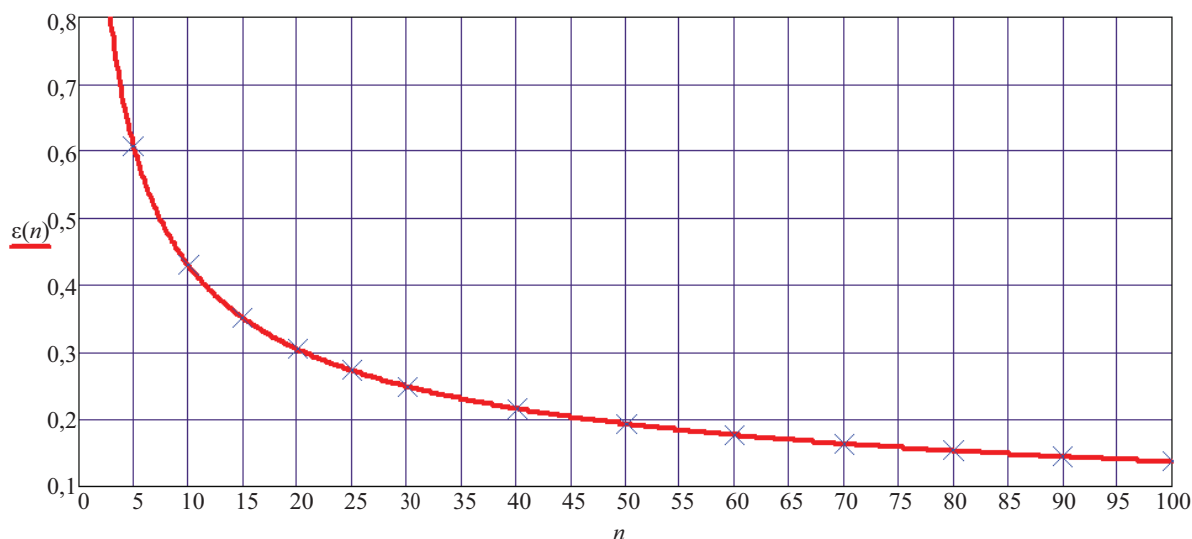


Рис. 1. Зависимость параметра ε от числа испытаний/измерений n

Fig. 1. Dependence of the ε on the number of tests/measurements n

На основе неравенства (1) можно утверждать, что действительная функция распределения вероятностей $F(x)$ будет находиться в указанном интервале с вероятностью $1 - \alpha$.

На рис. 1 представлена зависимость $\varepsilon(n) = \sqrt{\ln 2/\alpha/2n}$, маркерами отмечены значения статистики Колмогорова – Смирнова [13]. Как видно из рис. 1, зависимость $\varepsilon(n)$ по неравенству Дворецкого – Кифера – Вулфовица полностью совпадает со статистикой Колмогорова – Смирнова, которая традиционно представляется в табличной форме.

Граничные функции распределения вероятностей на основе неравенства ДКВ (2) или статистики Колмогорова – Смирнова можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \underline{F}(x) &= \max(F_n(x) - \varepsilon, 0); \\ \overline{F}(x) &= \min(F_n(x) + \varepsilon, 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Внутри границ (3) будет находиться действительная, но неизвестная наперед, функция распределения вероятностей случайной величины. Границы (3) также называются р-блоком.

Преимуществом использования р-блоков как моделей случайных величин является отсутствие необходимости в получении полной статистической информации о случайной величине. В исследовании [14] отмечается, что в практических задачах анализа риска любую случайную величины можно ограничить некоторым интервалом. Все моменты любого ограниченного распределения конечны и, значит, существуют в математическом смысле. Следовательно, для таких статистических данных можно принять оценку (точную или интервальную) математического ожидания и среднеквадратического отклонения. Этой информации может быть достаточно для построения модели случайной величины в виде р-блока. Более того, при высоком значении нижней границы интервала вероятности безотказной работы будет отсутствовать необходимость уточнять законы распределения случайной величины и значения параметров этих законов.

Так, при наличии статистических данных о случайной величине в виде ее математического ожидания и среднеквадратического отклонения можно построить р-блок на основе неравенств П.Л. Чебышёва [15]:

$$\underline{F}_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < m_x + S_x; \\ 1 - \frac{S_x^2}{(x - m_x)^2}, & \text{если } x \geq m_x + S_x; \end{cases} \quad (4)$$

$$\overline{F}_x(x) = \begin{cases} \frac{S_x^2}{(x - m_x)^2}, & \text{если } x < m_x - S_x; \\ 1, & \text{если } x \geq m_x - S_x, \end{cases} \quad (5)$$

где m_x — математическое ожидание случайной величины X ; S_x — среднеквадратическое отклонение случайной величины X .

В работе [15] предложены уточненные граничные функции распределения (уточнение производится за счет указания интервала изменчивости случайной величины) с аналитическим видом:

$$\overline{F}_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \frac{x \leq m_x + S_x^2}{m_x - \bar{x}}; \\ \frac{1 - [b(1+a) - c - b^2]}{a}, & \text{если } \frac{m_x + S_x^2}{m_x - \bar{x}} < x < \frac{m_x + S_x^2}{(m_x - \underline{x})}; \\ \frac{1}{[1 + S_x^2 / (x - m_x)^2]}, & \text{если } \frac{m_x + S_x^2}{m_x - \underline{x}} < x < \bar{x}; \\ 1, & \text{если } x \geq \bar{x}; \end{cases} \quad (6)$$

$$\underline{F}_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq \underline{x}; \\ \frac{1}{[1 + (x - m_x)^2 / S_x^2]}, & \text{если } \underline{x} < x < \frac{m_x + S_x^2}{m_x - \bar{x}}; \\ \frac{1 - (b^2 - ab + c)}{1 - a}, & \text{если } \frac{m_x + S_x^2}{m_x - \bar{x}} < x < \frac{m_x + S_x^2}{m_x - \underline{x}}; \\ 1, & \text{если } x \geq \frac{m_x + S_x^2}{m_x - \underline{x}}, \end{cases} \quad (7)$$

где $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$; параметры функций (6), (7) вычисляются следующим образом: $a = (x - \underline{x}) / (\bar{x} - \underline{x})$,

$b = (m_x - \underline{x}) / (\bar{x} - \underline{x})$ и $c = S_x^2 / (\bar{x} - \underline{x})^2$.

Предложена новая конструкция р-блока, хвосты которого описываются выражениями (6), (7), а средняя часть «удаляется» за счет использования свойства медианы генеральной совокупности, которое заключается в том, что медиана является 50-м перцентилем совокупности статистических данных [16].

Табл. 1. Данные испытаний по определению предела текучести стали, МПа

Table 1. Test data for determining the yield strength of steel, MPa

332	336	315	325	327
328	319	330	319	326
331	326	320	327	328

Табл. 2. Статистические характеристики выборки по табл. 1
Table 2. Statistical parameters of the sample by the Table 1

Параметр Parameter	Значение, МПа Value, MPa
Выборочное среднее значение Sample mean	325,93
Выборочное стандартное (среднеквадратическое) отклонение Sample standard deviation	5,62
Доверительный интервал для математического ожидания Confidence interval for mathematical expectation	[322,84; 329,03]
Доверительный интервал для стандартного отклонения Confidence interval for standard deviation	[4,19; 8,87]
Выборочная оценка медианы Sample median	327
Доверительный интервал для медианы Confidence interval for median	[320; 330]

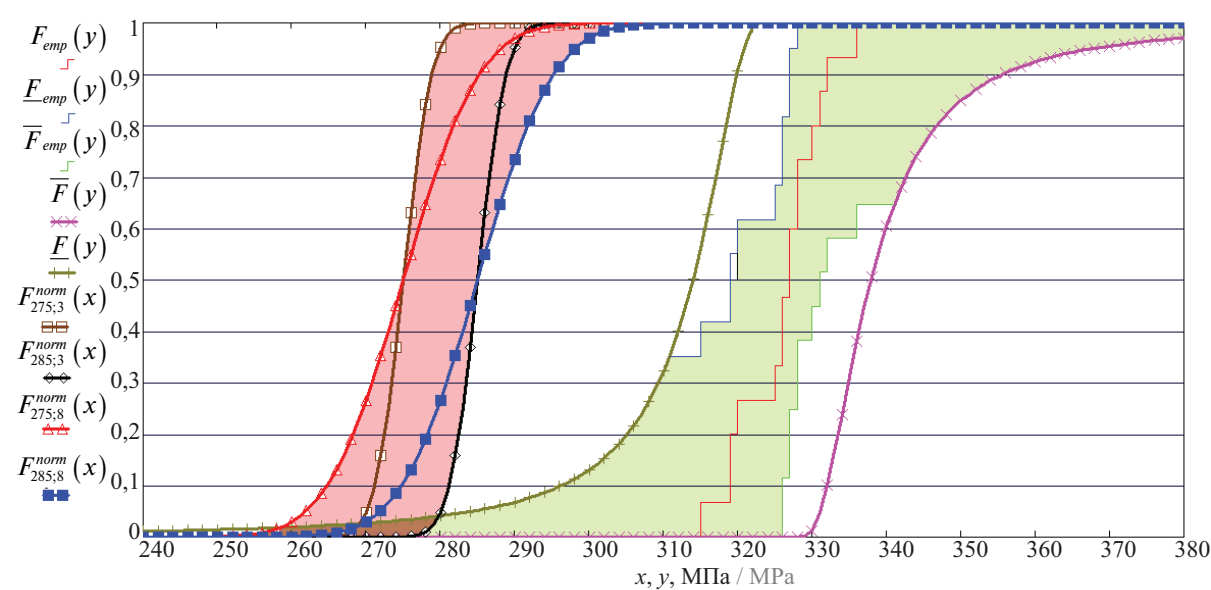


Рис. 2. Граничные функции распределения для напряжения в элементе и предельного напряжения стали
Fig. 2. Boundary cumulative distribution functions for the stress and the ultimate stress of steel

В настоящем исследовании авторы добавили к р-блоку [16] данные о граничных эмпирических функциях распределения на основе неравенства Дворецкого – Кифера – Вулфовица или статистики Колмогорова – Смирнова для уменьшения области неопределенности данных, в то же время не внося статистическую гипотезу о конкретном законе распределения данных, что повышает практическую применимость метода при ограниченной статистической информации.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим пример анализа надежности растянутого элемента фермы, например, с расчетной схемой [8], по критерию прочности стали стержня:

σ̃ = Ñ₄₋₆ / A ≤ σ̃_{s,ult}, (8)

где σ̃ — напряжение в стержне от эксплуатационной нагрузки; Ñ₄₋₆ — усилие растяжения в стержне 4–6 фермы; A — площадь поперечного сечения стержня; σ̃_{s,ult} — предельное напряжение стали, принятое равным пределу текучести стали.

Для математической общности расчета перепишем неравенство (8) в виде:

X ≤ Y, (9)

где σ̃ = Ñ₄₋₆ / A = X; σ̃_{s,ult} = Y.

Пусть известны следующие значения выборочной совокупности для прочности стали σ̃_{s,ult} = Y (табл. 1).

Статистические параметры для экспериментальных данных выборочной совокупности по табл. 1 приведены в табл. 2.

Совмещая р-блоки (3) и (6), (7) для случайной величины $\tilde{\sigma}_{s,ult} = Y$, учетом доверительных интервалов для математического ожидания, среднеквадратического отклонения и медианы, можно получить область неопределенности (рис. 2, зеленая заливка), внутри которой располагается действительная функция распределения параметра $\tilde{\sigma}_{s,ult} = Y$.

Напряжение в стержне $\tilde{\sigma} = \tilde{N}_{4-6}/A = X$ также выразим в виде р-блока. Поскольку получить эмпирическую функцию для нагрузки на элемент затруднительно, ее стохастическая модель может быть представлена некоторым распределением с интервальными оценками параметров. Пусть известно, что напряжение в стержне $\tilde{\sigma}$ подчиняется нормальному закону распределения, но параметры нормального распределения заданы в интервальной форме: $m_X \in [275; 285]$ МПа, $S_X \in [3; 8]$ МПа. На основе этих данных можно построить 4 различные нормальные функции распределения, область между которыми является р-блоком (рис. 2, красная заливка). После построения р-блоков для напряжения и предельного напряжения необходимо оценить вероятность безотказной работы стержня. Для этого необходимо выполнить арифметические операции с р-блоками.

В труде [17] приведена информация об основных арифметических операциях с р-блоками (сложение, вычитание, умножение, деление). Математические операции с р-блоками вследствие их различной природы производятся после их трансформации в структуры Демпстера – Шефера [18] путем дискретизации на фокальные элементы.

Распределения при дискретизации ограничиваются 0,5 и 99,5 перцентилями [17]. Шаг дискретизации m_i обычно принимают [17] 0,01 с учетом $\sum_{i=1}^n m_i = 1$.

В данном случае мы получаем 100 интервальных оценок A_i случайной величины X . Следовательно, проводя дискретизацию р-блоков, можно получить 100 интервалов вида $[x_1; \bar{x}_1], [x_2; \bar{x}_2], \dots [x_{100}; \bar{x}_{100}]$.

Аналогично для р-блока случайной величины Y можно выполнить его трансформацию в 100 фокальных элементов: $[y_1; \bar{y}_1], [y_2; \bar{y}_2], \dots [y_{100}; \bar{y}_{100}]$. Функция резерва прочности с двумя моделями

р-блоков (трансформированных в структуры Демпстера – Шефера) будет иметь вид:

$$g = Y - X \leq 0. \tag{10}$$

Функция распределения по модели предельного состояния g будет представлять собой разность двух структур типа Демпстера – Шефера. Для вычисления подмножества значений функции необходимо составить табличную форму (табл. 3). Так как р-блоки Y и X дискретизируются на 100 фокальных элементов, то функция (10) резерва прочности g будет иметь подмножество в 10 000 интервальных значений:

$$g_{i,j} = [g_{i,j}, \bar{g}_{i,j}]. \tag{11}$$

Расчет вероятности безотказной работы P по данным табл. 3 сводится к простому алгоритму: $P \in [\underline{P}, \bar{P}]$, где

$$\begin{aligned} \underline{P} &= \frac{\text{количество}[g_{i,j} < 0]}{10\,000}; \\ \bar{P} &= \frac{\text{количество}[\bar{g}_{i,j} < 0]}{10\,000}. \end{aligned} \tag{12}$$

Для граничных функций распределения по рис. 2 можно получить следующие граничные функции распределения резерва прочности $\underline{F}(g)$ и $\bar{F}(g)$ (рис. 3).

Нижняя граничная функция распределения принимает значение 0,0684 при ординате 0, которая соответствует состоянию отказа. Таким образом, вероятность безотказной работы составит $[0,9316; 1,0000]$. Аналогичное значение получается при использовании формул (12).

Аналитическое решение для нижней границы вероятности безотказной работы в рамках данной задачи может быть найдено через следующую модель:

$$\begin{aligned} \underline{P} &= 1 - \int_{\underline{x}}^{\frac{m_X + S_X^2}{m_X - \bar{x}}} \frac{1}{\left[1 + (x - \bar{m}_Y)^2 / \bar{S}_Y^2\right]} \times \\ &\times \frac{1}{S_X \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x - \bar{m}_X)}{2\bar{S}_X^2}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Табл. 3. Табличная форма для вычисления разности двух р-блоков

Table 3. Tabular form for calculating the subtraction of two p-boxes

–	$[y_1; \bar{y}_1], 0,01$	$[y_2; \bar{y}_2], 0,01$	...	$[y_{100}; \bar{y}_{100}], 0,01$
$[x_1; \bar{x}_1], 0,01$	$g_{1,1} = [y_1 - \bar{x}_1; \bar{y}_1 - x_1], 0,0001$	$g_{2,1} = [y_2 - \bar{x}_1; \bar{y}_2 - x_1], 0,0001$	...	$g_{100,1} = [y_{100} - \bar{x}_1; \bar{y}_{100} - x_1], 0,0001$
$[x_2; \bar{x}_2], 0,01$	$[y_1 - \bar{x}_2; \bar{y}_1 - x_2], 0,0001$	$[y_2 - \bar{x}_2; \bar{y}_2 - x_2], 0,0001$	...	$[y_{100} - \bar{x}_2; \bar{y}_{100} - x_2], 0,0001$
....	...	...	...	...
$[x_{100}; \bar{x}_{100}], 0,01$	$[y_1 - \bar{x}_{100}; \bar{y}_1 - x_{100}], 0,0001$	$[y_2 - \bar{x}_{100}; \bar{y}_2 - x_{100}], 0,0001$	...	$[y_{100} - \bar{x}_{100}; \bar{y}_{100} - x_{100}], 0,0001$

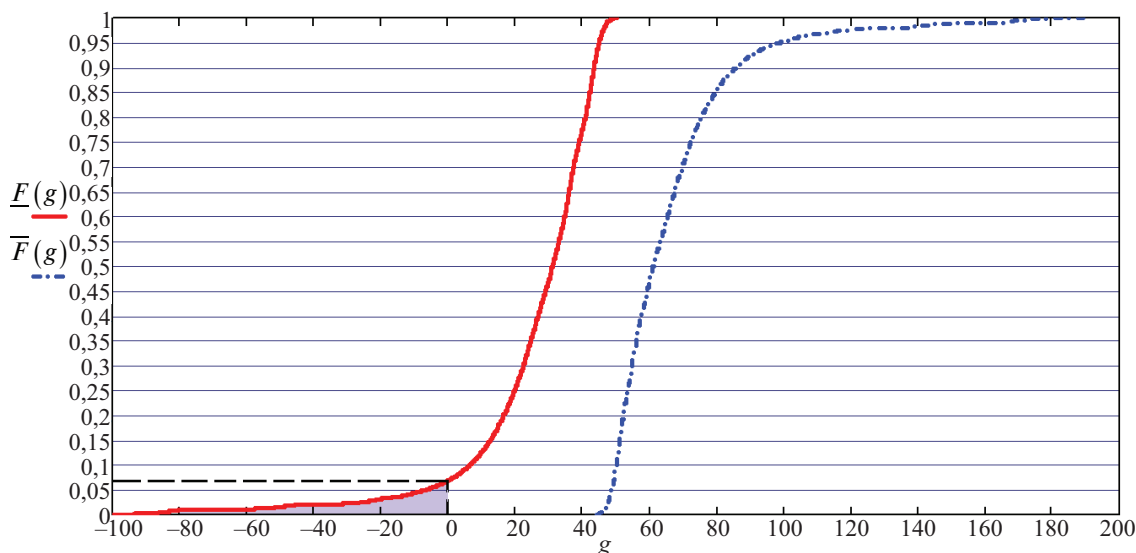


Рис. 3. Граничные функции распределения резерва прочности $\underline{F}(g)$ и $\overline{F}(g)$

Fig. 3. Boundary distribution functions $\underline{F}(g)$ and $\overline{F}(g)$ for strength reserve

Нижняя граница вероятности безотказной работы по выражению (13) составит $[0,9403; 1,0000]$. Разница между аналитическим и численным решением составляет 0,9 %. Отклонения вызваны уровнем дискретизации р-блока (100 фокальных элементов) и ограничением 0,5 и 99,5 перцентилями. Использование метода анализа надежности путем дискретизации р-блоков в структуры Демпстера – Шефера расширяет интервал надежности вследствие увеличения области эпистемологической неопределенности.

Вместо данных перцентилей также могут быть использованы границы изменчивости случайных величин, полученные на основе неравенства Высочанского – Петунина.

Тем не менее при работе с большим количеством р-блоков аналитическое решение крайне трудно или невозможно, а описанный численный метод дискретизации р-блоков позволяет оперативно решить данные задачи. Алгоритмы, подобные

табл. 3, легко автоматизируются в различных математических комплексах, что позволяет оперативно выполнять расчет надежности с применением р-блоков для более сложных нелинейных математических моделей предельных состояний.

Использование граничных функций распределения вероятностей (6), (7) даст возможность формировать достоверные интервалы при малых выборках, однако с ростом статистической информации область неопределенности между двумя граничными функциями может оставаться довольно широкой. В этом случае могут быть использованы граничные функции распределения для описания «хвостов» р-блока без привязки к доверительной оценке математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

В таком случае «хвосты» р-блока предлагается описывать нечеткими функциями распределения с аналитическим видом:

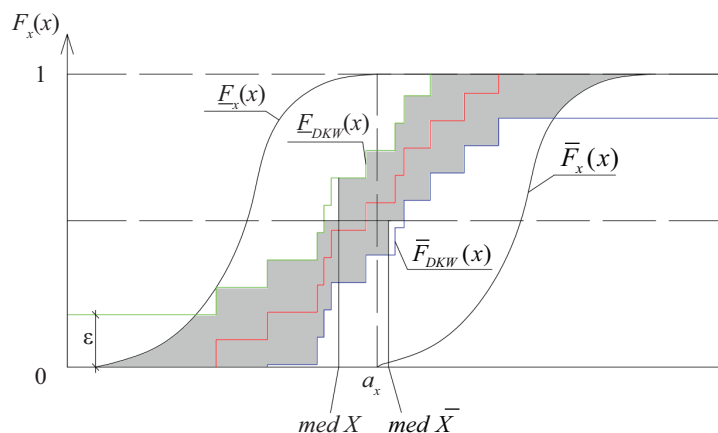


Рис. 4. Граничные функции распределения с использованием нечетких функций распределения

Fig. 4. Boundary distribution functions based on fuzzy distribution functions

$$\underline{F}_x(x) = \begin{cases} \exp \left[- \left(\frac{a_x - x}{b_x} \right)^2 \right], & \text{если } x < a_x; \\ 1, & \text{если } x \geq a_x; \end{cases} \quad (14)$$

$$\overline{F}_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < a_x; \\ 1 - \exp \left[- \left(\frac{a_x - x}{b_x} \right)^2 \right], & \text{если } x \geq a_x, \end{cases} \quad (15)$$

где $a_x = 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$ — условное «среднее»; $b_x = 0,5(X_{\max} - X_{\min})/\sqrt{-\ln \alpha}$ — мера «рассеяния», где $X_{\max}$ и $X_{\min}$ — наибольшее и наименьшее значения во множестве значений $\{x\}$, полученных из результатов измерений (испытаний); $\alpha \in [0; 1]$ — уровень среза (риска), значение которого задается таким образом, чтобы функции F_{DKW} и $F_x(x)$ пересекались в крайней точке «скачка» (см. рис. 4).

Преимуществом такой модели случайной величины является улучшенная сходимость с ростом числа статистической выборки данных.

Существует еще один вариант численного решения задачи анализа надежности с использованием р-блоков — метод интервального сэмпирования данных по типу Монте-Карло [19]. Он может быть рекомендован для параллельной оценки надежности с использованием метода дискретизации или аналитического метода, так как методы генерации данных по типу Монте-Карло могут завышать оцен-

ку надежности при малой вероятности отказа, что зачастую встречается в инженерно-строительной практике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Вероятность безотказной работы $[0,9403; 1,0000]$ в примере не говорит о низкой надежности элемента, а отражает широкий интервал неопределенности вследствие недостатка статистической информации. С практической точки зрения может быть принято два решения: увеличить сечение элемента при имеющихся статистических данных, чтобы нижняя граница вероятности безотказной работы была близка к заданному уровню надежности [20, 21], или уменьшить неопределенность данных путем проведения дополнительных испытаний/измерений статистических данных случайных величин, что позволит сократить область р-блока и получить более узкие границы вероятности безотказной работы. Выбор решения будет зависеть от технико-экономического сравнения указанных вариантов.

Представленный в статье подход к анализу надежности обладает высоким уровнем практической значимости, поскольку в задачах оценки вероятности безотказной работы существующих конструкций отпадает необходимость принятия решений о конкретном виде распределения случайной величины или назначения точных параметров. В то же время имеются и другие конструкции р-блоков [14–16], которые могут быть использованы в рассмотренном алгоритме и могут быть более подходящими для конкретной задачи анализа надежности.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Мкртычев О.В., Щедрин О.С., Лохова Е.М. Определение коэффициентов надежности по ответственности для отдельных несущих элементов на основе вероятностного анализа // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. Вып. 10. С. 1331–1346. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1331-1346
2. Raizer V., Elishakoff I. Philosophies of structural safety and reliability. Boca Raton : CRC Press, 2022. 268 p. DOI: 10.1201/9781003265993
3. Zhang X., Wu Z., Ma H., Pandey M.D. An effective Kriging-based approximation for structural reliability analysis with random and interval variables // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2021. Vol. 63. Issue 5. Pp. 2473–2491. DOI: 10.1007/s00158-020-02825-8
4. Xu J., Wang D. Structural reliability analysis based on polynomial chaos, Voronoi cells and dimension reduction technique // Reliability Engineering & System Safety. 2019. Vol. 185. Pp. 329–340. DOI: 10.1016/j.ress.2019.01.001
5. Kabir S., Papadopoulos Y. Applications of Bayesian networks and Petri nets in safety, reliability, and risk assessments : a review // Safety science. 2019. Vol. 115. Pp. 154–175. DOI: 10.1016/j.ssci.2019.02.009
6. Elishakoff I., Daphnis A. Simple application of interval analyses to structural safety: standard versus parameterised versions // International Journal of Sustainable Materials and Structural Systems. 2018. Vol. 3. Issue 3–4. Pp. 203–217. DOI: 10.1504/IJSMSS.2018.10024424
7. Zhou S., Zhang J., You L., Zhang Q. Uncertainty propagation in structural reliability with implicit limit state functions under aleatory and epistemic uncertainties // Eksploatacja i Niezawodność, 2021. Vol. 23. Issue 2. Pp. 231–241. DOI: 10.17531/ein.2021.2.3
8. Soloveva A.A., Solovev S.A. Reliability analysis of RHS steel trusses joints based on the p-boxes approach // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2021. Vol. 17. Issue 1. Pp. 87–97. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-1-87-97

9. Faes M., Daub M., Beer M. Engineering analysis with imprecise probabilities: a state-of-the-art review on P-boxes // *Proceedings of the 7th Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications*. University of Tokyo, 2020. Pp. 1–6. URL: <https://lirias.kuleuven.be/3217103>

10. Xie H., Li J., Liao D. A new structural reliability analysis method under non-parameterized probability box variables // *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2022. Vol. 65. Issue 11. Pp. 1–10. DOI: 10.1007/s00158-022-03408-5

11. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1956. Vol. 27. Issue 3. Pp. 642–669. DOI:10.1214/aoms/1177728174

12. Massart P. The tight constant in the Dvoretzky – Kiefer – Wolfowitz inequality // *Annals of Probability*. 1990. Vol. 18. Issue 3. Pp. 1269–1283. DOI:10.1214/aop/1176990746

13. Kovalev M.S., Utkin L.V. A robust algorithm for explaining unreliable machine learning survival models using the Kolmogorov – Smirnov bounds // *Neural Networks*. 2020. Vol. 132. Pp. 1–18. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.08.007

14. Ferson S., Gray A. Distribution-free uncertainty propagation // *Proceedings of the 9th International Workshop on Reliable Engineering Computing REC'2021*, Taormina, Italy. 2021. Pp. 395–407. URL: https://livrepository.liverpool.ac.uk/3124146/1/REC2021_37_Gray.pdf

15. Oberguggenberger M., Fellin W. Reliability bounds through random sets: Non-parametric methods and geotechnical applications // *Computers & Structures*. 2008. Vol. 86. Issue 10. Pp. 1093–1101. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.05.040

16. Соловьева А.А., Соловьев С.А. Разработка уточненного р-блока как модели случайной величины в задачах анализа надежности строительных конструкций // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2022. № 1 (300). С. 20–28. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.1.20.28

17. Karanki D.R., Kushwaha H.S., Verma A.K., Ajit S. Uncertainty analysis based on probability bounds (p-box) approach in probabilistic safety assessment // *Risk Analysis : an International Journal*. 2009. Vol. 29. Issue 5. Pp. 662–675. DOI: 10.1111/j.1539-6924.2009.01221.x

18. Zhang Z., Jiang C., Han X., Hu D., Yu S. A response surface approach for structural reliability analysis using evidence theory // *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 69. Pp. 37–45. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2013.12.005

19. Zhang H., Mullen R.L., Muhanna R.L. Interval Monte Carlo methods for structural reliability // *Structural Safety*. 2010. Vol. 32. Issue 3. Pp. 183–190. DOI: 10.1016/j.strusafe.2010.01.001

20. Sykora M., Diamantidis D., Holicky M., Jung K. Target reliability for existing structures considering economic and societal aspects // *Structure and Infrastructure Engineering*. 2017. Vol. 13. Issue 1. Pp. 181–194. DOI: 10.1080/15732479.2016.1198394

21. Bhattacharya B., Basu R., Ma K. Developing target reliability for novel structures: the case of the Mobile Offshore Base // *Marine structures*. 2001. Vol. 14. Issue 1–2. Pp. 37–58. DOI: 10.1016/S0951-8339(00)00024-1

Поступила в редакцию 29 августа 2023 г.

Принята в доработанном виде 11 сентября 2023 г.

Одобрена для публикации 13 сентября 2023 г.

ОБ АВТОРАХ: **Сергей Александрович Соловьев** — кандидат технических наук, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства; **Вологодский государственный университет (ВоГУ)**; 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15; РИНЦ ID: 821778, Scopus: 57215081781, ResearcherID: AAJ-1708-2020; solovevsa@vogu35.ru;

Анастасия Андреевна Соловьева — аспирант, преподаватель кафедры промышленного и гражданского строительства; **Вологодский государственный университет (ВоГУ)**; 160000, г. Вологда, ул. Ленина, д. 15; РИНЦ ID: 1090512, Scopus: 57223210877, ResearcherID: ABG-1982-2021; solovevaaa@vogu35.ru.

Вклад авторов:

Соловьев С.А. — научное руководство, анализ результатов исследования.

Соловьева А.А. — научный обзор, реализация численных расчетов, написание исходного текста, итоговые выводы.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Mkrtychev O.V., Shchedrin O.S., Lokhova E.M. Determination of individual coefficients

on the basis of probabilistic analysis. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture

ture]. 2022; 17(10):1331-1346. DOI:10.22227/1997-0935.2022.10.1331-1346 (rus.).

2. Raizer V., Elishakoff I. *Philosophies of Structural Safety and Reliability*. Boca Raton, CRC Press, 2022; 268. DOI: 10.1201/9781003265993

3. Zhang X., Wu Z., Ma H., Pandey M.D. An effective Kriging-based approximation for structural reliability analysis with random and interval variables. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2021; 63(5):2473-2491. DOI: 10.1007/s00158-020-02825-8

4. Xu J., Wang D. Structural reliability analysis based on polynomial chaos, Voronoi cells and dimension reduction technique. *Reliability Engineering & System Safety*. 2019; 185:329-340. DOI: 10.1016/j.res.2019.01.001

5. Kabir S., Papadopoulos Y. Applications of Bayesian networks and Petri nets in safety, reliability, and risk assessments : a review. *Safety Science*. 2019; 115:154-175. DOI: 10.1016/j.ssci.2019.02.009

6. Elishakoff I., Daphnis A. Simple application of interval analyses to structural safety: standard versus parameterised versions. *International Journal of Sustainable Materials and Structural Systems*. 2018; 3(3-4):203-217. DOI: 10.1504/IJSMSS.2018.10024424

7. Zhou S., Zhang J., You L., Zhang Q. Uncertainty propagation in structural reliability with implicit limit state functions under aleatory and epistemic uncertainties. *Eksplotacja i Niezawodność*. 2021; 23(2):231-241. DOI: 10.17531/ein.2021.2.3

8. Soloveva A.A., Solovev S.A. Reliability analysis of RHS steel trusses joints based on the p-boxes approach. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2021; 17(1):87-97. DOI: 10.22337/2587-9618-2021-17-1-87-97

9. Faes M., Daub M., Beer M. Engineering analysis with imprecise probabilities: a state-of-the-art review on P-boxes. *Proceedings of the 7th Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications*. University of Tokyo; 2020:1-6. URL: <https://lirias.kuleuven.be/3217103>

10. Xie H., Li J., Liao D. A new structural reliability analysis method under non-parameterized probability box variables. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2022; 65(11):1-10. DOI: 10.1007/s00158-022-03408-5

11. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz J. Asymptotic minimax character of the sample distribution function and of the classical multinomial estimator. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1956; 27(3):642-669. DOI:10.1214/aoms/1177728174

12. Massart P. The tight constant in the Dvoretzky – Kiefer – Wolfowitz inequality. *Annals of Probability*. 1990; 18(3):1269-1283. DOI: 10.1214/aop/1176990746

13. Kovalev M.S., Utkin L.V. A robust algorithm for explaining unreliable machine learning survival models using the Kolmogorov – Smirnov bounds. *Neural Networks*. 2020; 132:1-18. DOI: 10.1016/j.neunet.2020.08.007

14. Ferson S., Gray A. Distribution-free uncertainty propagation. *Proceedings of the 9th International Workshop on Reliable Engineering Computing REC'2021, Taormina, Italy*. 2021:395-407. URL: https://livrepository.liverpool.ac.uk/3124146/1/REC2021_37_Gray.pdf

15. Oberguggenberger M., Fellin W. Reliability bounds through random sets: Non-parametric methods and geotechnical applications. *Computers & Structures*. 2008; 86(10):1093-1101. DOI: 10.1016/j.compstruc.2007.05.040

16. Soloveva A.A., Solovev S.A. Development of a refined p-box as a random variable model in problems of structural reliability analysis. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2022; 1(300):20-28. DOI 10.37538/0039-2383.2022.1.20.28.

17. Karanki D.R., Kushwaha H.S., Verma A.K., Ajit S. Uncertainty analysis based on probability bounds (p-box) approach in probabilistic safety assessment. *Risk Analysis : an International Journal*. 2009; 29(5):662-675. DOI: 10.1111/j.1539-6924.2009.01221.x

18. Zhang Z., Jiang C., Han X., Hu D., Yu S. A response surface approach for structural reliability analysis using evidence theory. *Advances in Engineering Software*. 2014; 69:37-45. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2013.12.005

19. Zhang H., Mullen R.L., Muhanna R.L. Interval Monte Carlo methods for structural reliability. *Structural Safety*. 2010; 32(3):183-190. DOI: 10.1016/j.strusafe.2010.01.001

20. Sykora M., Diamantidis D., Holicky M., Jung K. Target reliability for existing structures considering economic and societal aspects. *Structure and Infrastructure Engineering*. 2017; 13(1):181-194. DOI: 10.1080/15732479.2016.1198394

21. Bhattacharya B., Basu R., Ma K. Developing target reliability for novel structures: the case of the mobile offshore base. *Marine Structures*. 2001; 14(1-2):37-58. DOI: 10.1016/S0951-8339(00)00024-1

Received August 29, 2023.

Adopted in revised form on September 11, 2023.

Approved for publication on September 13, 2023.

BIONOTES: **Sergey A. Solovev** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Engineering; **Vologda State University (VSU)**; 15 Lenina st., Vologda, 160000, Russian Federation; ID RSCI: 821778, Scopus: 57215081781, ResearcherID: AAJ-1708-2020; solovevsa@vogu35.ru;

Anastasia A. Soloveva — postgraduate student, lecturer of the Department of Industrial and Civil Engineering; **Vologda State University (VSU)**; 15 Lenina st., Vologda, 160000, Russian Federation; ID RSCI: 1090512; Scopus: 57223210877, ResearcherID: ABG-1982-2021; solovevaaa@vogu35.ru.

Contribution of the authors:

Sergey A. Solovev — supervision, analysis of the results.

Anastasia A. Soloveva — conceptualization, methodology, data gathering and processing, writing of the article, scientific editing of the text.

The authors declare no conflicts of interest.