

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.074:531.391.3

DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.186-194

## Формулы для двух первых частот собственных колебаний плоской фермы

Михаил Николаевич Кирсанов, Ольга Валерьевна Грибова

*Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Расчет частоты собственных колебаний входит в основу исследования динамики конструкций и базируется, как правило, на численных методах. В тех случаях, когда конструкция статически определима и имеет периодическую структуру, для оценки первой собственной частоты возможны и аналитические решения. Наиболее известны метод Рэлея для оценки частоты сверху и метод Донкерлея, дающий приближенную оценку снизу. Выводятся простые аналитические оценки зависимостей первых частот колебаний плоской фермы от числа панелей и параметров конструкции.

**Материалы и методы.** Балочная статически определимая ферма имеет подъем в средней части. Для аналитического расчета первой частоты собственных колебаний используется упрощенный вариант метода Донкерлея. Усилия в стержнях, входящие в формулу, рассчитываются в символической форме методом вырезания узлов с применением стандартных операторов системы компьютерной математики Maple. Для установления жесткости конструкции применяется формула Максвелла – Мора. Предполагается, что масса фермы равномерно распределена по всем ее узлам. С целью обобщения последовательности отдельных решений для ферм различного порядка на произвольное число панелей используется метод индукции. Формула для второй собственной частоты получается методом трехточечной коллокации, исходя из условия подобия кривой зависимости первой частоты от числа панелей.

**Результаты.** Выведены формулы для двух первых частот собственных колебаний фермы. Аналитические решения сравниваются с численными, полученными для всего спектра частот. Показано, что с увеличением числа панелей точность аналитических решений растет.

**Выводы.** Аналитический метод оценки первой и второй частоты применим для решения задач о регулярных конструкциях. Преимущество метода состоит в независимости его точности от порядка регулярности конструкции. Простая форма результата позволяет использовать разработанный метод для выбора оптимальных параметров объекта без трудоемких компьютерных вычислений.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плоская ферма, аналитическое решение, собственная частота, Maple, метод Донкерлея, метод коллокации, вторая собственная частота

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Кирсанов М.Н., Грибова О.В. Формулы для двух первых частот собственных колебаний плоской фермы // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 2. С. 186–194. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.186-194

*Автор, ответственный за переписку:* Михаил Николаевич Кирсанов, c216@ya.ru.

## Formulas for the first two frequencies of natural oscillations of a flat truss

Mikhail N. Kirsanov, Olga V. Gribova

*National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI); Moscow, Russian Federation*

### ABSTRACT

**Introduction.** Calculation of the natural oscillation frequency is the basis of the study of structural dynamics and is usually based on numerical methods. In cases where the structure is statically determinate and has a periodic structure, analytical solutions are also possible for estimating the first natural frequency. The most well-known here are the Rayleigh method for estimating the frequency from above and the Dunkerley method, which gives an approximate estimate from below. In this paper, simple analytical estimates are derived for the dependences of the first oscillation frequencies of a flat truss on the number of panels and the parameters of the structure.

**Materials and methods.** A statically determinate beam truss has a rise in the middle part. A simplified version of the Dunkerley method is used for the analytical calculation of the first natural oscillation frequency. The forces in the rods included in the formula are calculated in symbolic form by cutting out nodes using standard operators of the Maple computer mathematics system. The Maxwell – Mohr formula is used to determine the rigidity of the structure. It is assumed that the truss mass is uni-

formly distributed over all its nodes. The induction method is used to generalize the sequence of individual solutions for trusses of different orders to an arbitrary number of panels. The formula for the second natural frequency is obtained by the three-point collocation method based on the condition of similarity of the curve of the first frequency dependence on the number of panels. **Results.** Formulas for the first two frequencies of natural oscillations of the truss are derived. Analytical solutions are compared with numerical ones obtained for the entire frequency spectrum. It is shown that with an increase in the number of panels, the accuracy of the analytical solution increases.

**Conclusions.** The analytical method for estimating the first and second frequencies is applicable to solving problems on regular structures. The advantage of the method is that its accuracy is independent of the order of regularity of the structure. The simple form of the result allows it to be used to select the optimal parameters of the object without the use of labor-intensive computer calculations.

**KEYWORDS:** planar truss, analytical solution, natural frequency, Maple, Dunkerley method, collocation method, second natural frequency

**FOR CITATION:** Kirsanov M.N., Gribova O.V. Formulas for the first two frequencies of natural oscillations of a flat truss. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(2):186-194. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.186-194 (rus.).

*Corresponding author:* Mikhail N. Kirsanov, C216@ya.ru.

## ВВЕДЕНИЕ

Одна из задач строительной механики — расчет собственных частот конструкций. На практике для этого широко используются численные методы с применением специальных инженерных программ на основе метода конечных элементов [1, 2]. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода использовался в монографии [3] применительно к задачам строительной механики. Аналитические решения задач колебаний строительных конструкций появились в связи с развитием методов компьютерной математики [4, 5]. Расчет прогибов свободно опертой пластины в системе компьютерной математики Maple выполнен в труде [6]. В этой же системе произведен приближенный аналитический расчет тонкой пластины [7]. Рассматривается изгиб прямоугольной защемленной тонкой пластины под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки [8]. Для этого решение уравнения Софи Жермен строится методом начальных функций. Справочник [9] содержит 126 различных схем плоских статически определимых регулярных ферм с формулами зависимостей первой собственной частоты от числа панелей. Решения получены методом индукции с помощью модифицированной формулы Донкерлея. Получена формула для собственной частоты колебаний пространственной консольной фермы в системе Maple [10]. Зависимость области резонансно безопасных частот собственных колебаний фермы от ее размеров исследуется в работах [11, 12]. Применен упрощенный аналитический метод [13] при выводе конечной формулы для основной ча-

стоты колебаний симметричной арочной фермы. Формула для прогиба пространственной регулярной фермы получена в работе [14]. Применялся также метод индукции и система компьютерной математики Maple. При этом время символьных преобразований для вывода искомых зависимостей было существенно больше, чем для плоских ферм. Получены аналитические оценки собственной частоты колебаний сверху (по методу Рэлея) и снизу (по методу Донкерлея) [15] для простой плоской фермы с треугольной решеткой. Найдена односторонняя оценка основной частоты колебаний пространственной фермы в аналитической форме [16]. Выполнен расчет значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы с грузом с использованием системы Maple [17]. Формула для основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы получена в исследовании [18]. Выведена зависимость прогибов плоской консольной фермы от числа панелей [19]. Большинство аналитических решений как для прогибов, так и для первой собственной частоты получено с применением свойств регулярности ферм [20]. Математический аппарат вывода зависимости прогиба или собственной частоты колебаний от числа панелей регулярной конструкции основан на индуктивном методе нахождения общего члена последовательности ряда решений для ферм различного порядка. При этом, как правило, используется метод составления и решения рекуррентных уравнений для коэффициентов искомой формулы. Для определения нижней границы частоты собственных колебаний плоской балочной фермы без нижнего пояса в аналитической форме применен метод индукции [21].

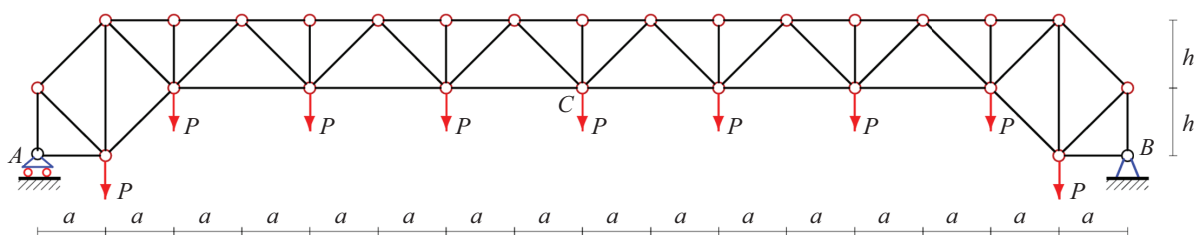


Рис. 1. Схема фермы. Нагрузка на нижний пояс,  $n = 3$

Fig. 1. Truss diagram. Load on the lower chord,  $n = 3$

В настоящей работе выводятся формулы для двух первых частот собственных колебаний плоской фермы с треугольной решеткой и подъемом в ее средней части. Ферма шарнирно оперта по концам (рис. 1), средняя часть пролета имеет треугольную решетку и приподнята на величину  $h$ . Для увеличения локальной устойчивости конструкции стержни верхнего сжатого пояса выбраны в два раза короче, чем в нижнем поясе. Высота фермы  $2h$ , принято четное число панелей в нижнем поясе длиной  $2a$  каждая. Длина раскосов  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

### МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

**Расчет усилий в стержнях.** Ферма с  $2n$  панелями в пролете статически определимая. Общее число шарнирных узлов в ферме  $K = 6n + 10$ , число стержней, включая три стержня, моделирующие боковые опоры,  $\eta = 12n + 30$ . Выбирается инерционная модель конструкции, в которой вся масса условно равномерно распределена по ее узлам сосредоточенными массами  $m$ . Стержни модели массой не обладают. Для определения усилий в стержнях используется метод вырезания узлов, реализованный в программе [9], составленной на языке компьютерной математики Maple. Разрешающая система уравнений состоит из уравнений равновесия всех узлов, коэффициентами в которых являются направляющие косинусы неизвестных усилий и реакций опор. В предположении, что начало координат находится в левой подвижной опоре, координаты узлов (рис. 2) имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 = 0; y_1 = 0; x_2 = a; y_2 = 0; \\ x_{i+2} = 2ai; y_{i+2} = h; i = 1, \dots, 2n + 1; \\ x_{2n+4} = L_0 - a; y_{2n+4} = 0; x_{2n+5} = L_0; y_{2n+5} = 0; \\ x_{2n+6} = 0; y_{2n+6} = h; \\ x_{i+2n+6} = ai; y_{i+2n+6} = 2h; i = 1, \dots, 4n + 3; \\ x_{6n+10} = L_0; y_{6n+10} = h, \end{aligned}$$

где  $L_0 = 4a(n + 1)$  — длина пролета.

Номера концов стержней записываются в ориентированные списки  $\Phi_i, i = 1, \dots, \eta$ . Нижний пояс кодируется неориентированными списками вида:  $\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n + 4$ , а стержни верхнего пояса:  $\Phi_{i+2n+5} = [i + 2n + 5, i + 2n + 6], i = 1, \dots, 4n + 4$ . Аналогично составляются списки концов других

стержней. Матричная форма системы уравнений равновесия имеет вид:  $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$ , где  $\mathbf{S}$  — вектор неизвестных усилий и реакции опор. Внешние нагрузки содержатся в векторе  $\mathbf{T}$  длиной  $\eta$ . Нагрузки на узел с номером  $i$ , направленные горизонтально, записываются в элементы этого вектора с нечетными номерами:  $T_{2i-1}$ , вертикальные — в элементы  $T_{2i}$  на четных строках. Решение находится методом обратной матрицы с помощью операторов системы Maple:  $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$  [9].

**Прогиб.** Для вычисления прогиба, который оценивается по величине вертикального смещения узла  $C$  (рис. 1), используется формула Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^n S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

где  $S_{\alpha}^{(p)}$  — усилия в стержнях фермы от распределенной нагрузки;  $S_{\alpha}^{(1)}$  — усилие в стержне  $\alpha$  при действии единичной вертикальной силы на узел  $C$  нижнего пояса с номером  $2n + 1$ , в котором фиксируется прогиб;  $l_{\alpha}$  — длина стержня. Жесткость  $EF$  стержней одинаковая у всех стержней конструкции. В случае нагрузки на нижний пояс компоненты вектора нагрузок  $\mathbf{T}$  имеют вид:  $T_{2i} = -P, i = 2, \dots, 2n + 2$ . Последовательный расчет прогиба по этой формуле для различных чисел панелей  $n$  дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 2P(31a^3 + 4c^3 + 3h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_2 &= 2P(108a^3 + 6c^3 + 5h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_3 &= 2P(257a^3 + 8c^3 + 7h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_4 &= 2P(502a^3 + 10c^3 + 9h^3)/(h^2EF); \\ \Delta_5 &= 2P(867a^3 + 12c^3 + 11h^3)/(h^2EF); \dots \end{aligned}$$

Обобщение этих формул на произвольный порядок фермы дает искомую зависимость прогиба от числа панелей:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(h^2EF),$$

где  $C_1 = 8n^3 + 24n^2 + 26n + 4; C_2 = 4n + 4; C_3 = 4n + 2$ .

Численный расчет усилий в стержнях позволяет определить распределение усилий по ферме и выяснить наиболее и наименее загруженные стержни. Распределение усилий в стержнях от рассмотренной нагрузки при  $n = 2$  показано на рис. 3.

Синим цветом выделены сжатые стержни, красным — растянутые. Значения усилий при  $P = 1$  округлены до двух цифр. Главная нагрузка приходится

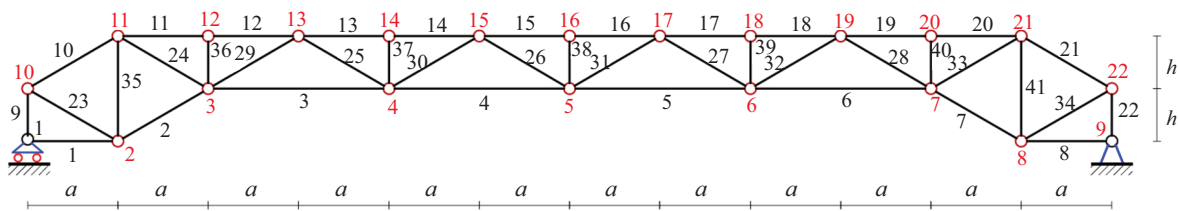


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов,  $n = 2$

Fig. 2. Numbering of rods and nodes,  $n = 2$

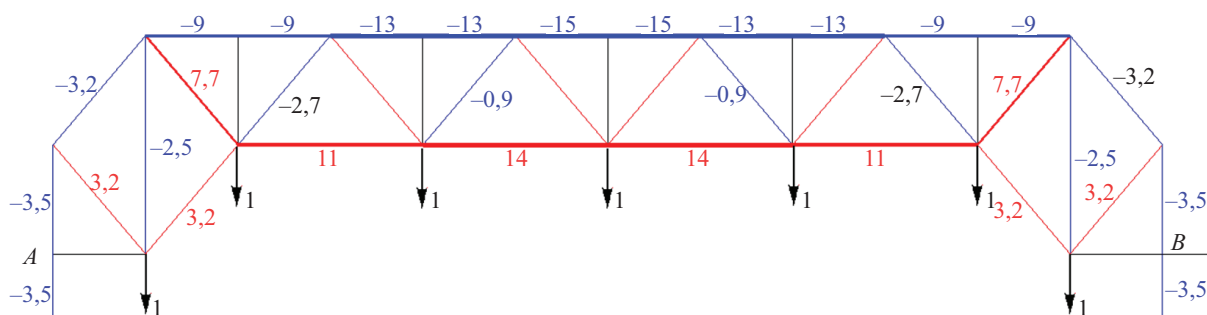


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях,  $n = 2$

Fig. 3. Distribution of forces in rods,  $n = 2$

на пояса фермы, решетка в основном напряжена только по концам конструкции.

*Основная частота.* Расчет основной (нижней) частоты собственных колебаний механических систем с числом степеней свободы больше четырех возможен только в численной форме. Если ставить задачу получения формулы зависимости частоты колебаний регулярной структуры (фермы) от числа панелей, необходимо воспользоваться каким-то приближенным методом. Известный метод оценки частоты снизу по Донкерлею дает существенно заниженное значение частоты. Точнее и проще приближенная оценка первой частоты, рассмотренная в публикации [10]. Аналогичное упрощение для балки Эйлера – Бернулли, несущей сосредоточенную массу в произвольном месте, сделано в работе [22]. В упрощенном варианте метода Донкерлея вычисление суммы по всем узлам фермы заменяется половиной произведения значения максимального слагаемого на число степеней свободы. Это дает существенное уточнение результата и упрощение итоговой формулы. При этом, однако, теряется свойство гарантированной нижней границы частоты исходного метода Донкерлея. Формула Донкерлея имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где  $\omega_p$  — парциальные частоты, рассчитанные для каждой массы отдельно. В исследовании [10] используется упрощение:

$$\omega_*^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = mK \delta^{\max}/2 = mK \Delta_n. \quad (2)$$

Здесь сумма вычисляется по теореме о среднем, где  $\delta^{\max}$  — максимальное значение  $\delta_p$ , вычисленное для некоторого узла, имеющего максимальный прогиб от отдельной вертикальной силы, приложенной к этому узлу. При численном расчете нет сложности вычисления суммы в выражении (1), но для аналитических преобразований разность в трудоемкости расчетов по формулам (1) и (2) значительная. По аналогии с расчетом прогиба последовательно вычисляются выражения  $\Delta_n$  для разного числа панелей:

$$\Delta_1 = (42a^3 + 5c^3 + 4h^3)/(4h^2EF);$$

$$\Delta_2 = (144a^3 + 7c^3 + 4h^3)/(4h^2EF);$$

$$\Delta_3 = (342a^3 + 9c^3 + 4h^3)/(4h^2EF);$$

$$\Delta_4 = (668a^3 + 11c^3 + 4h^3)/(4h^2EF);$$

$$\Delta_5 = (1154a^3 + 13c^3 + 4h^3)/(4h^2EF); \dots$$

В общем случае для произвольного  $n$ :

$$\Delta_n = (B_1 a^3 + B_2 c^3 + B_3 h^3)/(h^2 EF). \quad (3)$$

Коэффициенты здесь получаются методами компьютерной математики:

$$B_1 = (8n^3 + 24n^2 + 25n + 6)/6; \quad (4)$$

$$B_2 = (2n + 3)/4; \quad B_3 = 1.$$

Таким образом, решение задачи о первой частоте имеет вид:

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{EF}{m(6n+10)(\Phi_1 a^3 + \Phi_2 c^3 + h^3)}}; \quad (5)$$

$$\Phi_1 = (8n^3 + 24n^2 + 25n + 6)/6; \quad \Phi_2 = (2n + 3)/4.$$

*Вторая частота.* Знание второй собственной частоты конструкции не так актуально, как первой, основной. Однако во многих исследованиях, особенно связанных с анализом резонансных явлений, она часто бывает нужна. Для аналитического расчета второй частоты  $\omega_{**}$  собственных колебаний узлов фермы можно предложить следующий алгоритм. Пользуясь замеченным свойством подобия кривых зависимостей первой и второй частоты от порядка фермы, обнаруженным при анализе спектров частот [11–13], предположим, что для второй частоты решение также будет иметь вид (2), (3), но с дополнительными множителями  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  в (3) у коэффициентов:

$$\omega_{**}^{-2} = mK(\gamma_1 B_1 a^3 + \gamma_2 B_2 c^3 + \gamma_3 B_3 h^3)/(h^2 EF). \quad (6)$$

Для установления трех поправочных коэффициентов используем метод коллокации в трех точках. В качестве точек коллокации принимаются значения второй частоты  $\omega_{**}$ , рассчитанные численно для трех значений высоты  $h$ . Уравнение (6) записывается трижды для соответствующих значений размеров и частоты  $\omega_{**}$ . Из полученной системы трех уравнений с тремя неизвестными определяются искомые

множители  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Решение для второй частоты приобретает вид:

$$\omega_{**} = h \sqrt{\frac{EF}{mK(\gamma_1 B_1 a^3 + \gamma_2 B_2 c^3 + \gamma_3 B_3 h^3)}}. \quad (7)$$

Для определения собственных частот использован оператор Eigenvalues вычисления собственных чисел матрицы из пакета Linear Algebra системы Maple.

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

*Первая частота.* Рассмотрим для примера фермы из стали с модулем упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа с площадью поперечного сечения стержней  $F = 9$  см<sup>2</sup>, массами узлов  $m = 200$  кг и с горизонтальным размером панели  $a = 3$  м. Пунктирные кривые на рис. 4 со-

ответствуют численному решению  $\omega_1$  — минимальной частоте всего спектра частот фермы, полученной в системе Maple с помощью оператора Eigenvalues.

Кривая зависимости (5) хорошо приближает численное решение снизу. С увеличением числа панелей собственная частота падает, а кривые аналитического и численного решения сближаются. Следует заметить, что использованный здесь упрощенный вариант метода Донкерлея, в отличие от оригинального метода Донкерлея, не дает гарантию оценки снизу. Теоретически кривые  $\omega_1$  и  $\omega^*$  могут пересекаться. Точность полученного приближенного аналитического решения по сравнению с численным, условно принятым за точное, так как оно получено с учетом всех степеней свободы узлов в рамках принятой модели, можно оценить по величине  $\varepsilon = |\omega^* - \omega_1|/\omega_1$  (рис. 5).

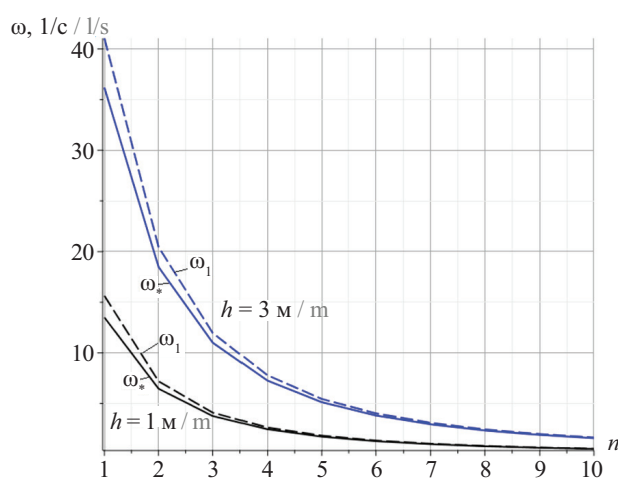


Рис. 4. Зависимость первой частоты от числа панелей, полученной двумя методами

Fig. 4. Dependence of the first frequency on the number of panels obtained by three methods

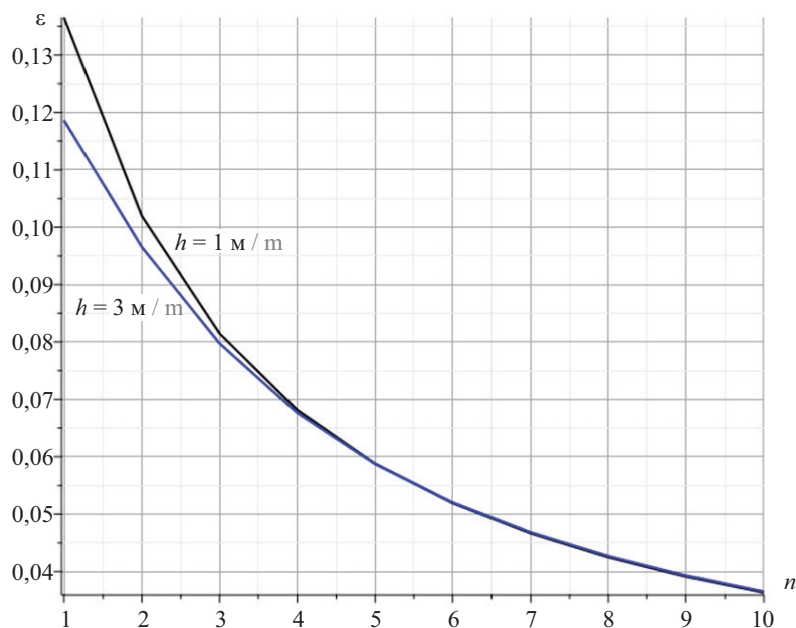


Рис. 5. Зависимость относительной погрешности от числа панелей,  $a = 3$  м

Fig. 5. Dependence of relative error on the number of panels,  $a = 3$  м

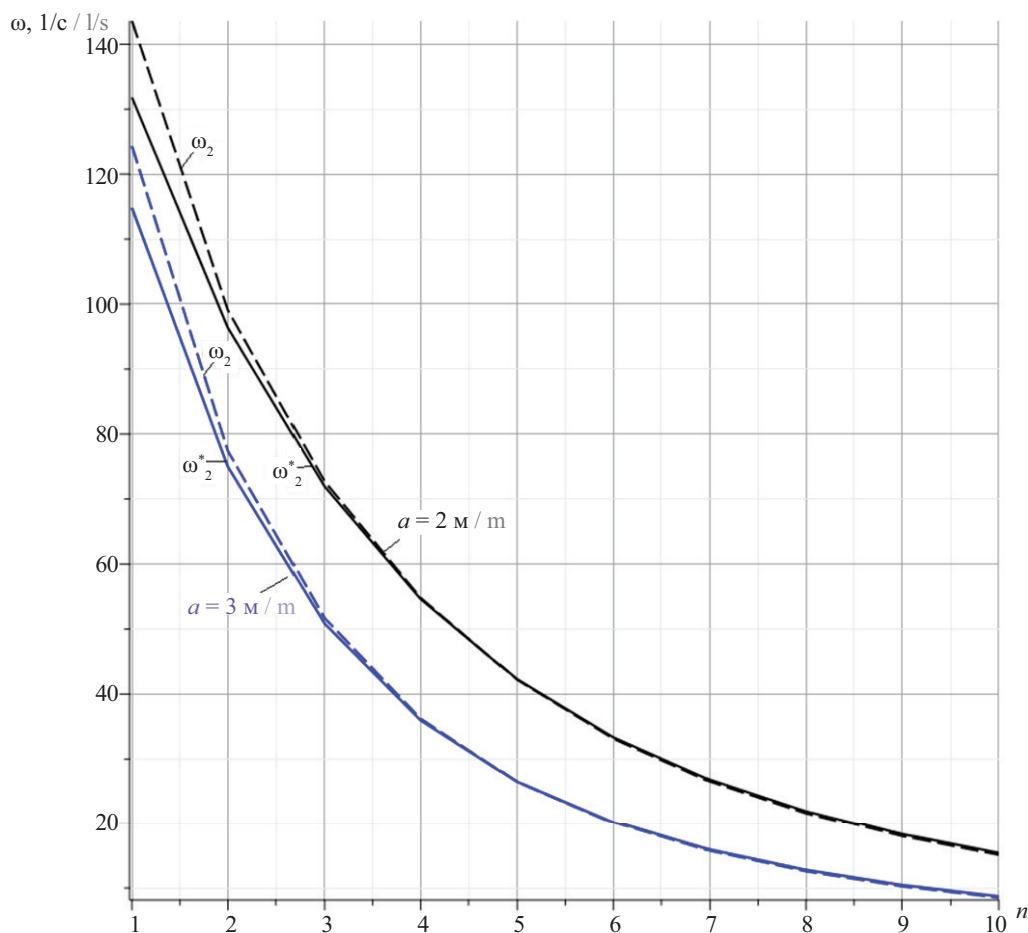


Рис. 6. Зависимость второй частоты от числа панелей

Fig. 6. Dependence of the second frequency on the number of panels

С увеличением числа панелей погрешность аналитического решения (5) падает, достигая вполне приемлемой величины в несколько процентов при  $n = 10$ . Одновременно уменьшается зависимость погрешности от высоты  $h$ . При  $n > 4$  кривые для  $h = 1$  м и  $h = 3$  м почти сливаются. Для небольшого числа панелей погрешность заметно зависит от высоты  $h$ .

Выведенную формулу (5) на практике можно использовать для оценки расчетов в сложных инженерных программах, основанных, в частности, на методе конечных элементов, и для предварительного расчета проектируемой конструкции. Наиболее эффективны формулы, полученные методом индукции, для сложных сооружений, содержащих большое число панелей. Если численный расчет сложных конструкций предполагает значительные вычислительные мощности и при этом обладает свойством неизбежного накопления погрешностей округления, то предложенная формула, напротив, независимо от порядка регулярной конструкции дает точность тем выше, чем сложнее объект.

*Вторая частота.* Для расчетов поправочных коэффициентов в формуле для второй частоты (7) по методу коллокации выбираются значения второй частоты, полученной численно для  $n = 4$  при  $a = 2$  м,

$h = 1$  м,  $h = 2$  м и  $h = 3$  м:  $\omega_1 = 13,17 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_{II} = 25,42 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_{III} = 35,43 \text{ c}^{-1}$ . Решение системы уравнений на основе уравнения (6) дает следующие безразмерные коэффициенты:  $\gamma_1 = 0,0559$ ,  $\gamma_2 = 0,1839$ ,  $\gamma_3 = 0,4552$ . Аналогично, при тех же значениях высоты и  $a = 3$  м находятся частоты  $\omega_1 = 7,207 \text{ c}^{-1}$ ,  $\omega_{II} = 14,22 \text{ c}^{-1}$  и  $\omega_{III} = 20,75 \text{ c}^{-1}$ . Соответствующие этому размеру панели коэффициенты имеют вид  $\gamma_1 = 0,0558$ ,  $\gamma_2 = 0,1948$ ,  $\gamma_3 = 0,3975$ . Кривые зависимости второй частоты отображены на рис. 6. Расчет выполнялся для значения высоты вне области точек коллокации:  $h = 4$  м. Пунктиром выделены кривые, полученные численно. Результат показывает высокую точность найденного аналитического решения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Для балочной схемы статически определимой регулярной фермы найдены аналитические зависимости первой и второй собственных частот свободных колебаний. Инструментами для решения задачи являются пакет символьной математики и метод индукции. Если при нахождении решения для первой частоты применялись лишь теоретические упрощения модели и алгоритма вычислений, то для получения коэффициентов в итоговой формуле зависимости второй частоты

ты от числа панелей потребовался численный расчет этой величины для некоторых определенных значений высоты фермы. В решении для второй частоты существенно использовалось свойство подобия кривых зависимости частот различного порядка от числа панелей. Именно поэтому в качестве формы решения для второй частоты была принята формула для основ-

ной частоты с дополнительными поправочными коэффициентами. Результаты решений получились вполне приемлемыми по точности и компактности записи. Заметим, что коллокацию можно выполнять также по трем значениям размера панели или комбинациям размеров высот и панелей из области реально применимых на практике величин.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Коваленко Г.В., Макеев В.Б., Дементьева В.В. Исследование частот собственных колебаний ферм на основе метода конечных элементов (МКЭ) // Молодая мысль: Наука, технологии, инновации : мат. VII (XIII) Всеросс. науч.-техн. конф. студентов, магистрантов, аспирантов и молодых ученых. 2015. С. 44–48. EDN WWZURN.
2. *Seventekidis P., Giagopoulos D.* Generalization gap estimation for damage classification tasks when finite element simulated data is used for training: A numerical study and experimental validation on a steel truss // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 319. P. 118855. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.118855
3. *Игнатьев В.А., Игнатьев А.В.* Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М. : Издательство АСВ, 2022. 306 с. EDN CSOLBF.
4. *Rapp B.E.* Introduction to Maple // *Microfluidics: Modelling, Mechanics and Mathematics*. 2017. Pp. 9–20. DOI: 10.1016/b978-1-4557-3141-1.50002-2
5. *Zotos K.* Performance comparison of Maple and Mathematica // *Applied Mathematics and Computation*. 2007. Vol. 188. Issue 2. Pp. 1426–1429. DOI: 10.1016/j.amc.2006.11.008
6. *Goloskokov D.P.* Analyzing simply supported plates using maple system // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). 2014. Pp. 55–56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273
7. *Goloskokov D.P., Matrosov A.V.* Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. P. 070012. DOI: 10.1063/1.5034687
8. *Matrosov A.V., Suratov V.A.* Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 36. Issue 1. Pp. 124–146. DOI: 10.18720/MPM.3612018\_16. EDN ХОБЖЗJ.
9. *Кирсанов М.Н.* Плоские фермы. Прогибы и частоты колебаний : справочник. М. : ИНФРА-М, 2025. 196 с. DOI: 10.12737/2173835. EDN FRTTXN.
10. *Sviridenko O.V., Komerzan E.V.* The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. No. 3 (101). P. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1. EDN СКQDPU.
11. *Льонг Конг Л.* Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 2 (41). С. 16–26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002. EDN АКAVDU.
12. *Луан Л.К.* Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004. EDN MGQUXN.
13. *Luong C.L.* Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. No. 4 (113). P. 11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4. EDN FLBVJY.
14. *Астахов С.В.* Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003. EDN GITKYF.
15. *Maslov A.N.* The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 4 (109). P. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12. EDN QNZNZW.
16. *Комерзан Е.В., Маслов А.Н.* Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP.
17. *Вычужина З.К.* Расчет значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы с грузом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 3 (38). С. 136–142. DOI: 10.36622/VSTU.2023.38.3.013. EDN FQOHWL.
18. *Комерзан Е.В., Ниналов И.Г., Свириденко О.В.* Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 4 (39). С. 27–34. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.003. EDN DLVBCD.
19. *Бука-Вайваде К., Кирсанов М.Н., Сердюк Д.О.* Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Вестник МГСУ*. 2020. Т. 15. № 4. С. 510–517.

DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517. EDN GGKIPC.

20. Галишиникова В.В., Игнатъев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. Волгоград : ВолГАСУ, 2006. EDN QNMMHT.

21. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строитель-

ная механика и конструкции. 2020. № 3 (26). С. 21–29. EDN PINHFN.

22. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1

Поступила в редакцию 29 марта 2025 г.

Принята в доработанном виде 27 апреля 2025 г.

Одобрена для публикации 10 декабря 2025 г.

О Б А В Т О Р А Х : **Михаил Николаевич Кирсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IстинаResearcherID: 2939132; C216@ya.ru;

**Ольга Валерьевна Грибова** — старший преподаватель кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 6642-4984, ResearcherID: MSX-4296-2025, ORCID: 0009-0005-5209-7566; Gribovaov@mail.ru.

Вклад авторов:

Кирсанов М.Н. — идея, написание статьи, редактирование.

Грибова О.В. — теоретические преобразования, анализ, написание статьи, редактирование.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. Kovalenko G.V., Makeev V.B., Demytyeva V.V. Study of natural vibration frequencies of trusses based on the finite element method (FEM). *Young Thought: Science, Technology, Innovation : Proceedings of the VII (XIII) All-Russian Scientific and Technical Conference of Students, Master's Students, Postgraduates and Young Scientists*. 2015; 44-48. EDN WWZURN. (rus.).
2. Seventekidis P., Giagopoulos D. Generalization gap estimation for damage classification tasks when finite element simulated data is used for training: A numerical study and experimental validation on a steel truss. *Engineering Structures*. 2024; 319:118855. DOI: 10.1016/j.engstruct.2024.118855
3. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. *Finite element method in the form of the classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms)*. Moscow, ASV Publishing House, 2022; 306. EDN CSOLBF. (rus.).
4. Rapp B.E. Introduction to Maple. *Microfluidics: Modelling, Mechanics and Mathematics*. 2017; 9-20. DOI: 10.1016/b978-1-4557-3141-1.50002-2
5. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 188(2):1426-1429. DOI: 10.1016/j.amc.2006.11.008
6. Goloskokov D.P. Analyzing simply supported plates using maple system. *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA)*. 2014; 55-56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273
7. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018; 1959:070012. DOI: 10.1063/1.5034687
8. Matrosov A.V., Suratov V.A. Stress-strain state in the corner points of a clamped plate under uniformly distributed normal load. *Materials Physics and Mechanics*. 2018; 36(1):124-146. DOI: 10.18720/MPM.3612018\_16. EDN XOBJZJ.
9. Kirsanov M.N. Planar trusses. *Deflections and oscillation frequencies : reference book*. Moscow, INFRA-M, 2025; 196. DOI: 10.12737/2173835. EDN FRTTXN. (rus.).
10. Sviridenko O.V., Komerzan E.V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022; 3(101):10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1. EDN CKQDPU.
11. Luong Cong L. Dependence of the region of resonance-safe frequencies on the sizes of statically determinable flat truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2024; 2(41):16-26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002. EDN AKAVDU. (rus.).
12. Luan L.C. Estimates of deflection and natural frequency of vibrations of a hinged-rod truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and*

*Structures*. 2024; 4(43):42-53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004. EDN MGQUXN. (rus.).

13. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024; 4(113):11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4. EDN FLBVJY.

14. Astakhov S.V. Analytical assessment of the deflection of the rod model of a four-slope roof frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2024; 4(43):34-41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003. EDN GITKYF. (rus.).

15. Maslov A.N. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023; 4(109):10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12. EDN QNZNZW.

16. Komerzan E.V., Maslov A.N. Estimation of the L-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):35-45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP. (rus.).

17. Vychuzhina Z.K. Calculation of the flat truss natural oscillations first frequency. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 3(38):136-142. DOI: 10.36622/VSTU.2023.38.3.013. EDN FQOHWL. (rus.).

18. Komerzan E.V., Ninalalov I.G., Sviridenko O.V. Calculation of a planar model composite truss fundamental frequency. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 4(39):27-34. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.003. EDN DLVBCD. (rus.).

19. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020; 15(4):510-517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517. EDN GGKIPC. (rus.).

20. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. Regular rod systems. *Theory and calculation methods*. Volgograd, VolgGASU, 2006. EDN QNMMHT. (rus.).

21. Petrichenko E.A. Lower bound of the natural oscillation frequency of the fink truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):21-29. EDN PINHFN. (rus.).

22. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000; 42(7):1287-1305. DOI: 10.1016/s0020-7403(99)-00049-1

Received March 29, 2025.

Adopted in revised form on April 27, 2025.

Approved for publication on December 10, 2025.

**B I O N O T E S :** **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstitinaResearcherID: 2939132; C216@ya.ru;

**Olga V. Gribova** — senior lecturer of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 6642-4984, ResearcherID: MSX-4296-2025, ORCID: 0009-0005-5209-7566; Gribovaov@mail.ru.

*Contribution of the authors:*

*Mikhail N. Kirsanov — idea, article writing, editing.*

*Olga V. Gribova — theoretical transformations, analysis, article writing, editing.*

*The authors declare that there is no conflict of interest.*