

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 534.1

DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.207-218

## Гармонические продольные волны в дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях

Сергей Гургенович Саиян<sup>1,2</sup>, Анастасия Андреевна Марасанова<sup>1</sup>,  
Ксения Дмитриевна Иванченко<sup>1</sup>, Константин Анатольевич Модестов<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский Московский государственный  
строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия;

<sup>2</sup> Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии  
наук (ИПМех РАН); г. Москва, Россия;

<sup>3</sup> Воронежский государственный технический университет (ВГТУ); г. Воронеж, Россия

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Рассматриваются гармонические продольные волны в полубесконечных дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях, составленных из произвольного числа вязкоупругих слоев. Цель исследования — разработка аналитического решения, а также изучение влияния свойств слоистых материалов и моделей вязкоупругости на дисперсию и затухание волн, что важно для колебательных процессов.

**Материалы и методы.** Метод основан на спектральном представлении уравнений движения и применяется к классическим моделям Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела. Получены явные комплексные дисперсионные соотношения, выражения для коэффициента затухания и критерии резкого роста амплитуды при переходе волны через границу слоев.

**Результаты.** Выявлены зависимости демпфирования от модуля упругости, плотности и времен релаксации/ретардации.

**Выводы.** Предложенный аналитический подход обеспечивает надежную основу для целенаправленного конструирования виброизолирующих метаматериалов и сейсмических барьеров с заданными частотными свойствами.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** вязкоупругость, продольные волны, дискретно-неоднородные стержни, гармонические воздействия, модель Максвелла, модель Кельвина – Фойгта, модель стандартного линейного тела

*Благодарности.* Работа (С.Г. Саияна) выполнена за счет гранта РНФ № 24-49-02002.

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Саиян С.Г., Марасанова А.А., Иванченко К.Д., Модестов К.А. Гармонические продольные волны в дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 2. С. 207–218. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.207-218

*Автор, ответственный за переписку:* Сергей Гургенович Саиян, berformert@gmail.com.

## Harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous viscoelastic rods

Sergey G. Saiyan<sup>1,2</sup>, Anastasia A. Marasanova<sup>1</sup>, Ksenia D. Ivanchenko<sup>1</sup>,  
Konstantin A. Modestov<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU);  
Moscow, Russian Federation;

<sup>2</sup> Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS);  
Moscow, Russian Federation;

<sup>3</sup> Voronezh State Technical University (VSTU); Voronezh, Russian Federation

### ABSTRACT

**Introduction.** Harmonic longitudinal waves in semi-infinite discretely inhomogeneous viscoelastic rods composed of an arbitrary number of viscoelastic layers are considered. The aim of the study is to develop an analytical solution and to investigate the influence of the properties of layered materials and viscoelastic models on wave dispersion and attenuation, which is important for vibration processes.

**Materials and methods.** The method is based on the spectral representation of the equations of motion and is applied to the classical models of Kelvin – Voigt, Maxwell, and the Standard Linear Solid (SLS). Explicit complex dispersion relations, expressions for the damping coefficient, and criteria for the sharp increase in amplitude when a wave passes through layer interfaces were obtained.

**Results.** Dependencies of damping on the elastic modulus, density, relaxation/retardation times.

**Conclusions.** It is concluded that the proposed analytical approach provides a reliable basis for the targeted design of vibration-isolating metamaterials and seismic barriers with predetermined frequency characteristics.

**KEYWORDS:** viscoelasticity, longitudinal waves, discretely inhomogeneous rods, harmonic excitations, Maxwell model, Kelvin – Voigt model, standard linear solid model

*Acknowledgments.* This work (by S.G. Saiyan) was supported by the Russian Science Foundation, Grant No. 24-49-02002.

**FOR CITATION:** Saiyan S.G., Marasanova A.A., Ivanchenko K.D., Modestov K.A. Harmonic longitudinal waves in discretely inhomogeneous viscoelastic rods. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(2):207-218. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.207-218 (rus.).

*Corresponding author:* Sergey G. Saiyan, berformert@gmail.com.

## ВВЕДЕНИЕ

Распространение гармонических волн в стержнях представляет значительный интерес как для инженерной практики, так и для фундаментальной науки, поскольку связано с управлением колебаниями и прочностью материалов. Особый случай такой задачи — дискретно-неоднородные вязкоупругие стержни, состоящие из чередующихся сегментов с разными механическими свойствами. Подобные слоистые среды широко применяются в инженерной практике. Например, чередование материалов с разной жесткостью и плотностью позволяет создавать полосовые фильтры для волн (фононные кристаллы) [1–4] и эффективно поглощать вибрации на заданных частотах. В сейсмозащите разработаны концепции «сейсмических барьеров», где массивы вертикальных пустот или вставок в грунте играют роль периодических структур, рассеивающих сейсмические волны. Так, показано, что периодические ряды заполненных траншей способны существенно повысить поглощение упругих волн, снижая передачу сейсмических колебаний [5–7]. Эти примеры подчеркивают практическую ценность задачи управления распространением волн в неоднородных средах: правильный подбор слоистой структуры дает возможность создавать метаматериалы, ослабляющие вибрации, переходящие на здания, и защищают инфраструктурные объекты от сейсмического и иного динамического воздействия.

Помимо прикладной значимости, задача распространения волн в неоднородных вязкоупругих средах имеет и важный фундаментальный аспект. Волновые процессы в реальных материалах сопровождаются дисперсией (частотной зависимостью фазовой скорости) и затуханием (рассеянием энергии). Наличие чередующихся слоев приводит к позонной структуре спектра колебаний: возникают запрещенные и пропускные частотные зоны по аналогии с фононными кристаллами. Одномерная периодическая среда (например, бесконечный стержень с периодическим чередованием слоев) — простейший фононный кристалл. В инженерном плане эти явления используются для фильтрации вибраций и создания зон запрещенных частот у виброизолирующих устройств.

Одновременно с учетом неоднородности необходимо адекватно описывать вязкоупругие свойства материалов, поскольку реальные среды не являются

идеально упругими. Вязкоупругость приводит к затуханию волн и дополнительной дисперсии, связанной с частотной зависимостью модуля упругости и диссипации [8–12]. Классические модели вязкоупругости были заложены еще в XIX–XX вв. и основываются на комбинациях идеального упругого элемента (пружины) и вязкого элемента (демпфера Ньютона) [13–15].

В рамках настоящего исследования разработано общее аналитическое решение для полубесконечных дискретно-неоднородных вязкоупругих стержней, состоящих из произвольного количества слоев вязкоупругого материала. Особое внимание в данном решении уделяется изучению поведения различных моделей вязкоупругости (Максвелла, Кельвина – Фойгта, стандартного линейного твердого тела) в случае с дискретно-неоднородной средой, а также исследованиям влияния механических параметров на колебательные процессы. Полученные результаты направлены на разработку методов проектирования сейсмических барьеров с заданными характеристиками и могут быть полезными для проектировщиков и инженеров, занимающихся разработкой и реализацией мер по защите инфраструктурных объектов от сейсмических и прочих динамических воздействий, а также для исследователей, изучающих волновые процессы в неоднородных средах.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

*Постановка задачи.* Рассматривается полубесконечный одномерный стержень, состоящий из  $n$ -го количества дискретных участков длиной  $l_n$  (где  $n = 1, 2, \dots, N$ ), вдоль которых упругие и вязкоупругие свойства одинаковы (рис. 1).

Слева задано вынуждающее смещение  $u(0, t) = A_0 e^{i\omega t}$ . Справа — граничное условие излучения (волны, уходящие в бесконечность без отражения) [16–21]. Уравнение движения для каждого участка будет выглядеть следующим образом:

$$-\rho_n \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial t^2} = \tilde{K}_n \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где  $K_n$ ,  $\rho_n$  и  $u_n(x, t)$  — интегральный оператор модуля упругости, плотность и перемещение для  $n$ -го участка стержня;  $t$  — время,  $x$  — пространственная координата.

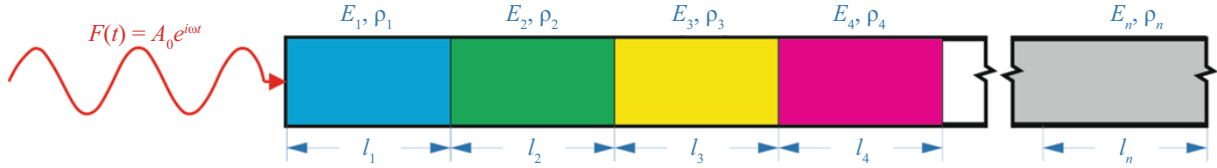


Рис. 1. Полубесконечная дискретно-неоднородная вязкоупругая одномерная среда с гармонической силовой нагрузкой, приложенной к левому концу и неотражающими условиями справа [16, 17]

Fig. 1. A semi-infinite discretely inhomogeneous viscoelastic one-dimensional medium with a harmonic force load applied to the left end and non-reflecting conditions on the right [16, 17]

Аналитическое решение. В основе аналитического решения — переход в спектральное пространство. Преобразование Фурье для уравнения (1):

$$-\rho_n \omega^2 \tilde{u}_n(x, \omega) = \tilde{K}_n(\omega) \frac{\partial^2 \tilde{u}_n(x, \omega)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где тильда над символом обозначает Фурье-образ соответствующей переменной;  $K_n(\omega)$  — Фурье-образ ядра интегрального оператора  $K_n$  (1).

Положим функцию  $u(x, t) = A \exp[i(\omega t - \tilde{k}_n x)]$  и подставим в уравнение (2), получим:

$$-\rho_n \omega^2 \tilde{u}_n(x, \omega) = -\tilde{K}_n(\omega) \tilde{k}_n \tilde{u}_n(x, \omega), \quad (3)$$

где  $\tilde{k}_n = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{\tilde{K}_n(\omega)}}$  — комплексные волновые числа, учитывающие диссипацию энергии (для вязкоупругого случая).

Представим комплексное ядро в экспоненциальной форме:

$$\tilde{k}_n = \omega \sqrt{\frac{\rho}{|\tilde{K}_n| \exp(i \arg \tilde{K}_n)}}, \quad (4)$$

где  $\arg \tilde{K}_n$  — угол потерь. Комплексное волновое число можно представить в виде:

$$k_n = k_{1,n} + ik_{2,n} = \omega/c_n - i\alpha_n, \quad (5)$$

где  $\alpha_n$  — коэффициент затухания волны. Он отвечает за экспоненциальное убывание амплитуды волны при ее распространении в среде с диссипативными (поглощающими) свойствами. Взяв действительную и мнимую части, получим:

$$k_{1,n} = \frac{\omega}{c_n} = \omega \sqrt{\frac{\rho}{|\tilde{K}_n|}} \cos\left(\frac{\arg \tilde{K}_n}{2}\right); \quad (6)$$

$$k_{2,n} = -\alpha_n = -\omega \sqrt{\frac{\rho}{|\tilde{K}_n|}} \sin\left(\frac{\arg \tilde{K}_n}{2}\right).$$

Подставим найденные выражения для  $k_{1,n}$  и  $k_{2,n}$  в функцию  $u(x, t)$ :

$$u_n(x, t) = A \exp\left\{i \left[ \omega t - \sqrt{\frac{\rho}{|\tilde{K}_n|}} \omega \cos\left(\frac{\arg \tilde{K}_n}{2}\right) x \right] - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\rho}{|\tilde{K}_n|}} \omega \sin\left(\frac{\arg \tilde{K}_n}{2}\right) x \right\}. \quad (7)$$

Условия сшивки решения (неразрывность перемещений и напряжений на границах участков) в общем случае:

$$u_n\left(\sum_{i=1}^n l_i, t\right) = u_{n+1}\left(\sum_{i=1}^n l_i, t\right); \quad (8)$$

$$\tilde{K}_n \frac{\partial u_n}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^n l_i, t\right) = \tilde{K}_{n+1} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\left(\sum_{i=1}^n l_i, t\right). \quad (9)$$

Решение данного уравнения будет находиться в виде сумм бегущих волн (прямых и отраженных) в комплексных переменных:

$$u_n(x, t) = A_n^L \exp[i(\omega t - k_{1,n} x - ik_{2,n} x)] + A_n^R \exp[i(\omega t + k_{1,n} x + ik_{2,n} x)]. \quad (10)$$

Тогда общая система линейных уравнений относительно неизвестных запишется в следующем виде (для  $n$  участков и  $2n-1$  неизвестных):

$$\left\{ \begin{aligned} & A_n^L \exp\left[(-ik_{1,n} + k_{2,n})L_n\right] + \\ & + A_n^R \exp\left[(ik_{1,n} - k_{2,n})L_n\right] = \\ & = A_{n+1}^L \exp\left[(-ik_{1,n+1} + k_{2,n+1})L_n\right] + \\ & + A_{n+1}^R \exp\left[(ik_{1,n+1} - k_{2,n+1})L_n\right]; \\ & \tilde{K}_n \left\{ A_n^L (-ik_{1,n} + k_{2,n}) \exp\left[(-ik_{1,n} + k_{2,n})L_n\right] + \right. \\ & \left. + A_n^R (ik_{1,n} - k_{2,n}) \exp\left[(ik_{1,n} - k_{2,n})L_n\right] \right\} = \\ & = \tilde{K}_{n+1} \left\{ A_{n+1}^L (-ik_{1,n+1} + k_{2,n+1}) \times \right. \\ & \times \exp\left[(-ik_{1,n+1} + k_{2,n+1})L_n\right] + A_{n+1}^R (ik_{1,n+1} - k_{2,n+1}) \times \\ & \times \exp\left[(ik_{1,n+1} - k_{2,n+1})L_n\right] \left. \right\}; \\ & A_0 = A_1^L + A_1^R; \\ & A_N^R = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Все рассмотренные графики в разделе Результаты приведены для  $N = 3$  слоя. Тогда матрица коэффициентов представляется в следующем виде:

$$\begin{pmatrix}
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{K_1}}l_1} & e^{i\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{K_1}}l_1} & -e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}l_1} & -e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}l_1} & 0 & 0 \\
 -i\omega\sqrt{\rho_1\tilde{K}_1}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{K_1}}l_1} & i\omega\sqrt{\rho_1\tilde{K}_1}e^{i\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{K_1}}l_1} & i\omega\sqrt{\rho_2\tilde{K}_2}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}l_1} & -i\omega\sqrt{\rho_2\tilde{K}_2}e^{i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}l_1} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}(l_1+l_2)} & e^{i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}(l_1+l_2)} & -e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_3}{K_3}}(l_1+l_2)} & -e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_3}{K_3}}(l_1+l_2)} \\
 0 & 0 & -i\omega\sqrt{\rho_2\tilde{K}_2}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}(l_1+l_2)} & i\omega\sqrt{\rho_2\tilde{K}_2}e^{i\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{K_2}}(l_1+l_2)} & i\omega\sqrt{\rho_3\tilde{K}_3}e^{-i\omega\sqrt{\frac{\rho_3}{K_3}}(l_1+l_2)} & -i\omega\sqrt{\rho_3\tilde{K}_3}e^{i\omega\sqrt{\frac{\rho_3}{K_3}}(l_1+l_2)} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix} \quad (12)$$

В настоящее время популярны полимеры, которые обладают вязкоупругими свойствами. Для их описания были придуманы модели (в данной работе будут рассмотрены модели: Кельвина – Фойгта, Максвелла, стандартного линейного твердого тела (СЛТТ)), которые состоят из упругих и вязких элементов. Они учитывают историю деформации материала.

Многие вязкоупругие среды хорошо описываются стандартными моделями Максвелла, Кельвина – Фойгта, а также СЛТТ. Модель Максвелла состоит из последовательно соединенных пружин (элемент Гука) с модулем упругости  $E$  и элемента демпфера (элемент Ньютона) с коэффициентом вязкости  $\eta$ :

$$\sigma + \tau_\epsilon \dot{\sigma} = E_\infty \tau_\epsilon \dot{\epsilon}, \quad (13)$$

где  $\tau_\epsilon = \eta/E_\infty$  — время релаксации;  $E_\infty = E$  — нерелаксированный (или мгновенный) модуль упругости.

Модель Кельвина – Фойгта — это классическая модель вязкоупругости, представляющая собой параллельное соединение упругого элемента и демпфера:

$$\sigma = E_0 \epsilon + E_0 \tau_\sigma \dot{\epsilon}, \quad (14)$$

где  $E_0 = E$  — релаксированный (или длительный) модуль упругости;  $\tau_\sigma = \eta/E_0$  — время ретардации (или время запаздывания).

Модель СЛТТ — это одна из фундаментальных моделей вязкоупругости, которая сочетает в себе элементы мгновенной упругости и вязкости. Она учитывает как релаксацию напряжений, так и ползучесть, что делает ее более точной по сравнению с простыми моделями Максвелла и Кельвина – Фойгта. Общий вид этой модели:

$$\sigma + \tau_\epsilon \dot{\sigma} = E_0 (\epsilon + \tau_\sigma \dot{\epsilon}). \quad (15)$$

Данная модель имеет две модификации (модель Пойтинга – Томсона – Ишлинского и модель Зинера – Ржаницына). Для модели Пойтинга – Томсона – Ишлинского в уравнении (15) приняты следующие обозначения:

$E_0 = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$  — релаксированный модуль упругости модели;  $E_\infty = E_1$  — нерелаксированный модуль, а  $\tau_\epsilon = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$  и  $\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_2}$  — соответственно характерные времена релаксации и запаздывания.

Для модели Зинера – Ржаницына в уравнении (15) приняты следующие обозначения:  $E_0 = E_2$  — релаксированный модуль упругости модели;  $E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$  — нерелаксированный модуль;  $\tau_\epsilon = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$  и  $\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_2}$  — соответственно характерные времена релаксации и запаздывания.

роанный модуль упругости модели;  $E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$  — нерелаксированный модуль;  $\tau_\epsilon = \frac{\eta}{E_1}$  и  $\tau_\sigma = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \eta$  — соответственно характерные времена релаксации и запаздывания.

Для каждой из моделей был найден Фурье-образ ядра, который уже непосредственно использовался для нахождения функции перемещения.  $\tilde{K} = E_0(1 + i\omega\tau_\sigma)$  — для модели Кельвина – Фойгта;  $\tilde{K} = \frac{i\omega\tau_\epsilon E_\infty}{i\omega\tau_\epsilon + 1}$  — для модели Максвелла;  $\tilde{K} = E_0 \frac{1 + i\omega\tau_\sigma}{1 + i\omega\tau_\epsilon}$  — для модели СЛТТ.

Наибольшую опасность для сооружений представляют случаи, когда амплитуда при переходе волны из одной среды в другую возрастает. Найдем такое отношение модулей упругости и плотностей смежных сред, чтобы наблюдалось данное явление:

$$|A^L_1| + |A^R_1| < |A^L_2| + |A^R_2|.$$

Пусть граница перехода из одного слоя в другой находится при  $x = 0$ . Оба слоя упругие (т.е.  $k_{2,n} = -\alpha_n = 0$ ). Тогда из условий сшивки (8) и (9) получим:

$$A^L_1 + A^R_1 = A^L_2 + A^R_2; \quad (16)$$

$$k_1 E_1 [-A^L_1 + A^R_1] = k_2 E_2 [-A^L_2 + A^R_2]; \quad (17)$$

$$c_i = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}; \quad (18)$$

$$k_i = \frac{\omega}{c_i} = \omega \sqrt{\frac{\rho_i}{E_i}}, \quad (19)$$

где  $c_i$  — скорость продольной волны.

Подставляя (19) в (17), получим:

$$\sqrt{E_1 \rho_1} [-A^L_1 + A^R_1] = \sqrt{E_2 \rho_2} [-A^L_2 + A^R_2]. \quad (20)$$

Так как амплитуды — комплексные числа, их можно представить в виде векторов (рис. 2). То есть суммы векторов должны быть одинаковы (16), а их разность отличаться на константу (20). Это можно реализовать, например, как показано на рис. 2.

Получаем, что сумма векторов одинаковая, сумма модулей вторых амплитуд больше суммы модулей первых, а чтобы условие разности выполнялось необходимо, чтобы  $E_1 \rho_1 > E_2 \rho_2$  (если  $E_1 \rho_1 < E_2 \rho_2$ , то  $|A^L_1| + |A^R_1| > |A^L_2| + |A^R_2|$ ).

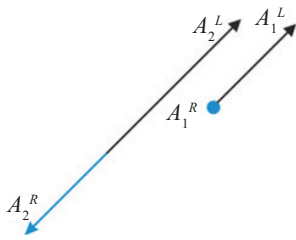
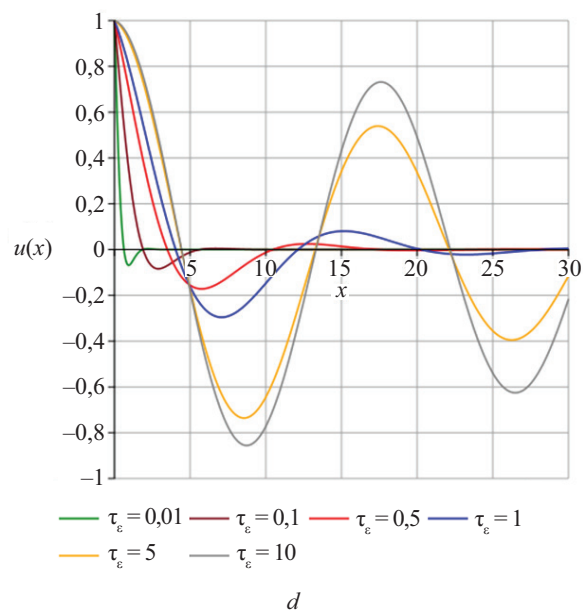
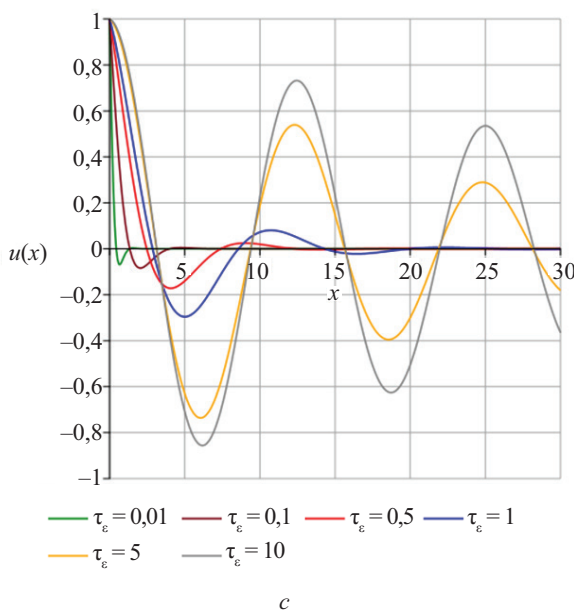
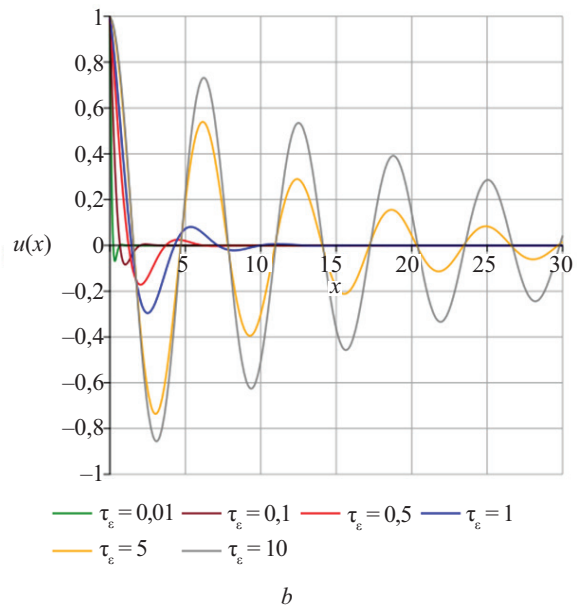
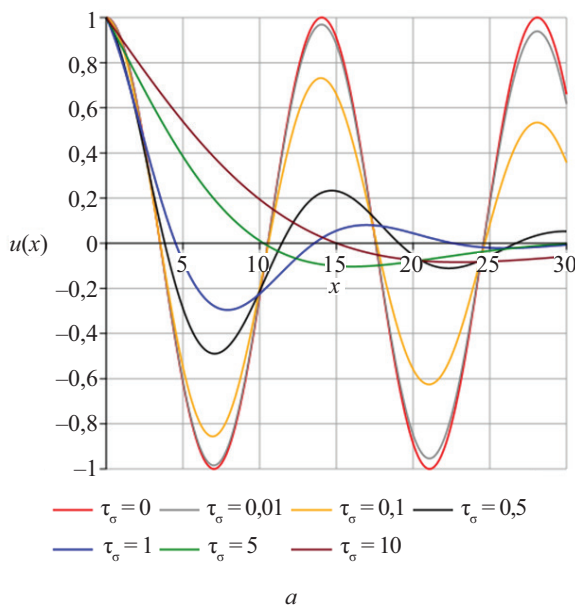


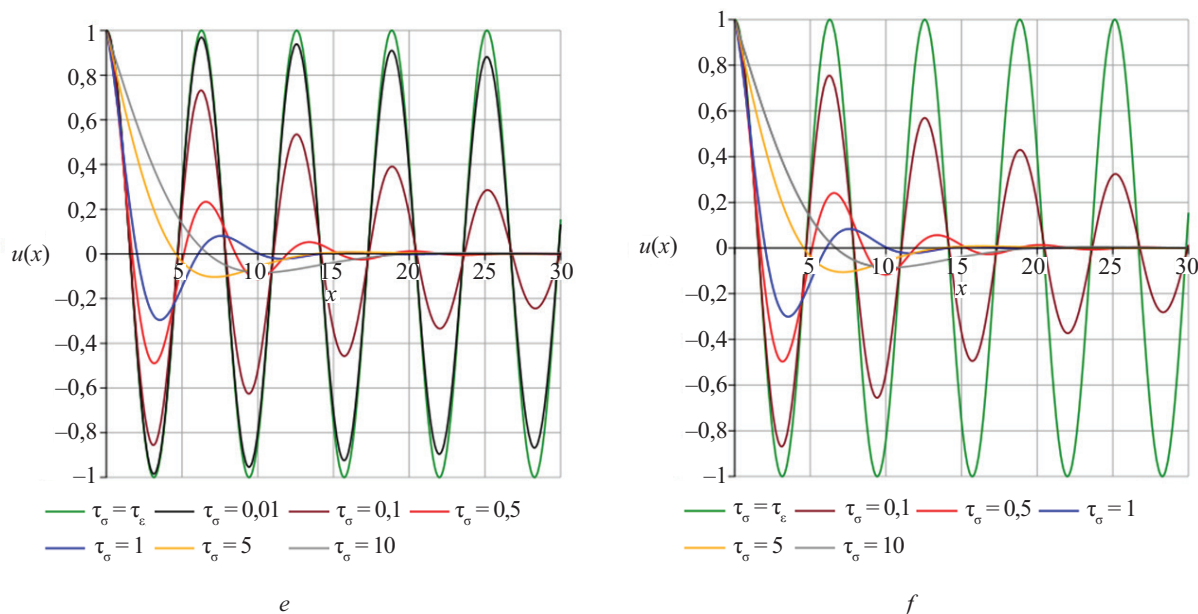
Рис. 2. Векторное представление амплитуд  
Fig. 2. Vector representation of amplitudes

**РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ**

В данном разделе приведены результаты моделирования для  $N = 3$  участков с длинами  $l_1 = l_2 = l_3 = 10$ . Для всех случаев принято, что  $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$ ;  $\omega = 1$  и  $A_0 = 1$ . С целью исследования влияния времен ре-

тардации и релаксации на затухание для различных моделей вязкоупругого материала изучим графики, полученные в результате моделирования колебаний при варьировании этих параметров. Все задаваемые программе величины приведены в условных единицах. Изучим графики зависимости перемещения  $u(x, t)$  от координаты  $x$  при фиксированном времени  $t$ , полученные в результате моделирования колебаний при варьировании значений  $\tau_\sigma$  и  $\tau_\varepsilon$ . Все задаваемые величины приведены в условных единицах. Программа не привязана к конкретной системе измерений, но требует согласованности единиц для всех вводимых параметров. На рис. 3 показаны графики зависимости амплитуд колебаний при различных моделях и параметрах вязкоупругого материала. Отметим, что модель СЛТТ при  $\tau_\sigma = \tau_\varepsilon$  переходит в чисто упругую.





**Рис. 3.** Графики зависимости амплитуд колебаний при различных моделях и параметрах вязкоупругого материала: *a* — модель Кельвина – Фойгта:  $E_1 = E_2 = E_3 = 5$  для разного времени ретардации  $\tau_\sigma$ ; *b* — модель Максвелла:  $E_1 = E_2 = E_3 = 1$  для разного времени релаксации  $\tau_\epsilon$ ; *c* — модель Максвелла:  $E_1 = E_2 = E_3 = 4$  для разного времени релаксации  $\tau_\epsilon$ ; *d* — модель Максвелла:  $E_1 = E_2 = E_3 = 8$  для разного времени релаксации  $\tau_\epsilon$ ; *e* — модель СЛТТ:  $E_1 = E_2 = E_3 = 1$  без времени релаксации  $\tau_\epsilon$  и при разном времени ретардации  $\tau_\sigma$ ; *f* — модель СЛТТ:  $E_1 = E_2 = E_3 = 1$ , время релаксации  $\tau_\epsilon = 0,01$  и при разном времени ретардации  $\tau_\sigma$

**Fig. 3.** Graphs of the dependence of vibration amplitudes for various models and parameters of the viscoelastic material: *a* — Kelvin – Voigt model:  $E_1 = E_2 = E_3 = 5$  for different retardation times; *b* — Maxwell model:  $E_1 = E_2 = E_3 = 1$  for different relaxation times; *c* — Maxwell model:  $E_1 = E_2 = E_3 = 4$  for different relaxation times; *d* — Maxwell model:  $E_1 = E_2 = E_3 = 8$  for different relaxation times; *e* — SLS model:  $E_1 = E_2 = E_3 = 1$  without relaxation time and for different retardation times; *f* — SLS model:  $E_1 = E_2 = E_3 = 1$ , relaxation time = 0.01, and for different retardation times

Исходя из результатов, можно утверждать следующее:

1. Для модели Кельвина – Фойгта при фиксированном значении модулей ( $E_1 = E_2 = E_3 = 5$ ) и изменении времени ретардации  $\tau_\sigma$  заметно, что чем больше  $\tau_\sigma$ , тем сильнее проявляется эффект вязкого демпфирования колебаний. Для малых  $\tau_\sigma$  колебания затухают слабее, кривая дольше сохраняет заметную амплитуду. При больших  $\tau_\sigma$  происходит более быстрое затухание — волна «заглаживается» еще в начале процесса распространения.

2. Для модели Максвелла при фиксированном значении модулей ( $E_1 = E_2 = E_3 = 1$ ) и изменении времени релаксации  $\tau_\epsilon$  заметно, что чем меньше  $\tau_\epsilon$ , тем сильнее проявляется эффект вязкого демпфирования колебаний. Для больших  $\tau_\epsilon$  колебания затухают слабее, кривая дольше сохраняет заметную амплитуду. При малых  $\tau_\epsilon$  происходит более быстрое затухание — волна «заглаживается» еще в начале процесса распространения. Сравнение графиков с  $E = 1$ ,  $E = 4$  и  $E = 8$  показывает, что повышение модуля упругости увеличивает скорость волны и заметно сдвигает максимумы и минимумы колебаний. С увеличением  $E$  жесткость стержня растет, поэтому фаза колебаний распределяется быстрее вдоль стержня.

На рис. 4 представлены волны в вязкоупругом стержне (модель Кельвина – Фойгта) при разных частотах внешнего воздействия  $\omega$ , длины каждого участка  $l = 10$ , плотность  $\rho = 1$ , модуль упругости первого участка —  $E_1 = 1$ , второго —  $E_2 = 0,1$ , третьего —  $E_3 = 2$ . При  $\tau_\sigma = 0$  модель Кельвина – Фойгта переходит в чисто упругую.

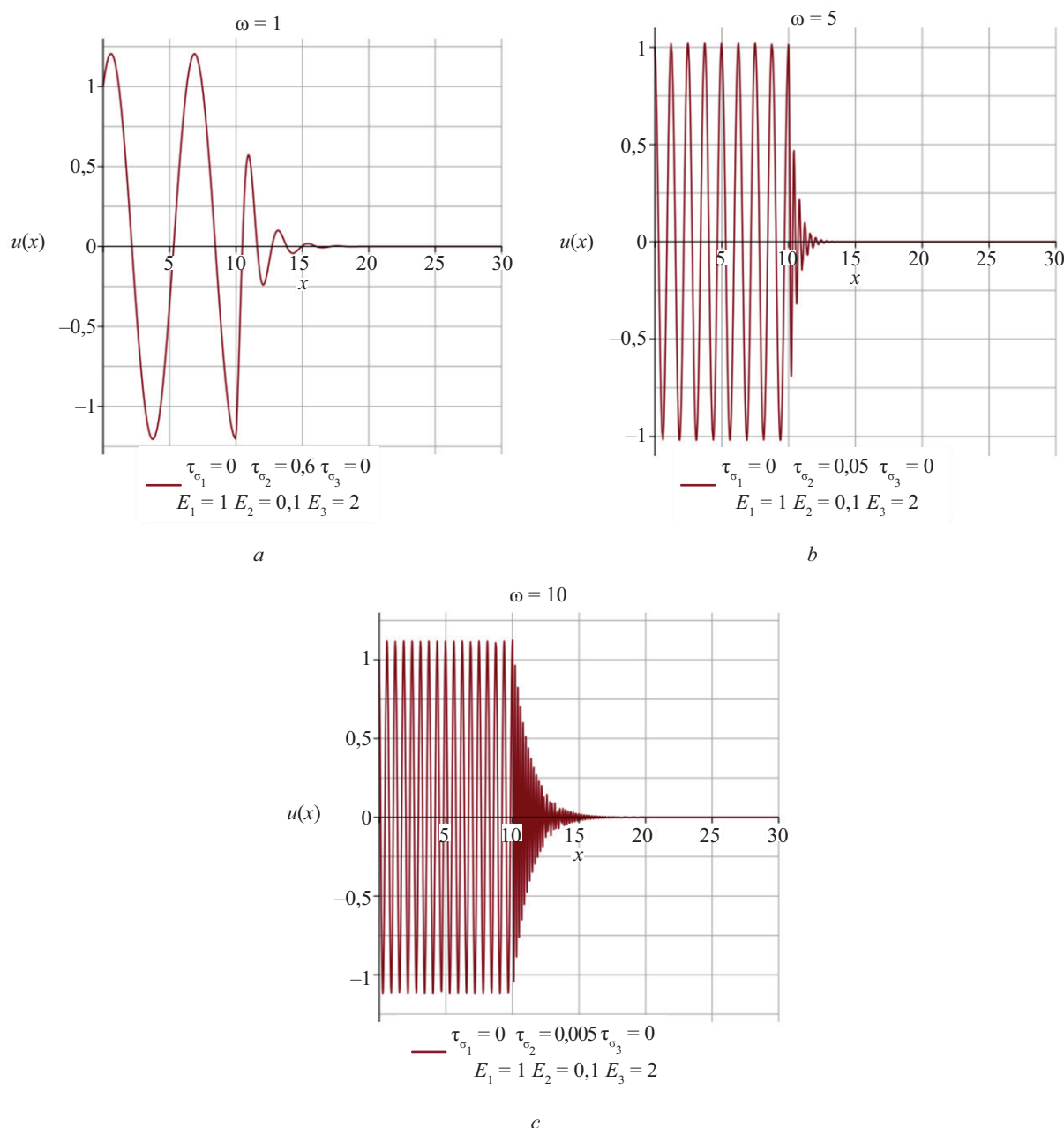
В модели Кельвина – Фойгта затухание растет быстрее, чем линейно. На рис. 4 увеличение амплитуды на первом участке происходит вследствие наложения двух волн (прямой и отраженной), вызванных интерференцией:

$$A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \varphi_0) = 2A \cos(\omega t + \varphi_0/2) \cos(kx + \varphi_0/2). \tag{21}$$

Подобное соединение стержней приводит к полосовому подавлению, когда энергия отраженной стоячей волны улавливается в мягком поглощающем слое. Чем выше частота, тем тоньше необходим слой для полного гашения.

На рис. 5 показаны волны в однородном вязкоупругом стержне (модель Кельвина – Фойгта) с модулем упругости  $E = 5$ , с начальной амплитудой  $A = 1$ , с начальными частотами  $\omega = 5$  и  $10$  соответственно.

Для высоких частот демпфирование происходит несоразмерно быстрее. Для подавления колеба-



**Рис. 4.** Графики зависимости амплитуд колебаний для модели Кельвина – Фойгта при различных частотах колебаний внешнего воздействия

**Fig. 4.** Graphs of the dependence of vibration amplitudes for the Kelvin – Voigt model at different frequencies of external excitation

ний при  $\omega = 10$  достаточно  $\tau_{\sigma} \approx 0,05$ , тогда как для  $\omega = 5$  потребуется  $\tau_{\sigma} \approx 0,1-0,2$ . Величина  $\tau_{\sigma}$  задает режим материала. Изменяя  $\eta$ , можно целенаправленно перевести материал из колебательного режима в аperiодическое затухание или обратно, адаптируя демпфер под нужную полосу частот. Тем самым результаты подтверждают квадратичную зависимость затухания от частоты в модели Кельвина – Фойгта и показывают, как выбор времени ретардации позволяет точно контролировать диапазон подавляемых колебаний. На рис. 6 представлены волны в однородном вязкоупругом стержне (модель Мак-

свелла) с модулем упругости, равным  $E = 5$ , с начальной амплитудой  $A_0 = 1$  и частотами  $\omega = 5$  и 10 соответственно.

Чем выше  $\omega$ , тем меньше  $\tau_{\sigma}$  нужно, чтобы материал испытывал большие затухания. Для случаев, где  $\omega \tau_{\sigma} \ll 1$ , затухание растет пропорционально  $\omega^2$ . Для случаев, где  $\omega \tau_{\sigma} \gg 1$ , увеличение  $\tau_{\sigma}$  снижает  $\alpha$ , поэтому длительные времена релаксации выгодны, если стоит цель минимизировать демпфирование системы.

Как уже упоминалось, наибольшую опасность представляют такие отношения смежных модулей упругости и плотностей, при которых происходит

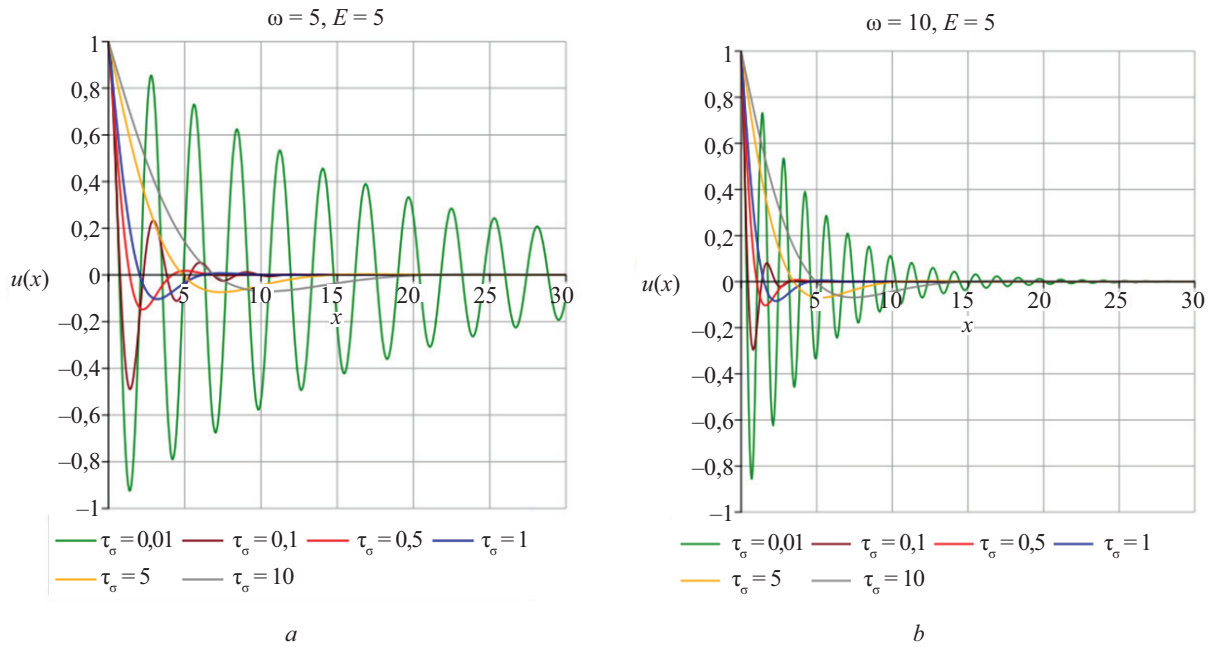


Рис. 5. Графики зависимости амплитуд колебаний для модели Кельвина – Фойгта при различных частотах колебаний внешнего воздействия и время ретардации

Fig. 5. Graphs of the dependence of vibration amplitudes for the Kelvin – Voigt model at different frequencies of external excitation and retardation times

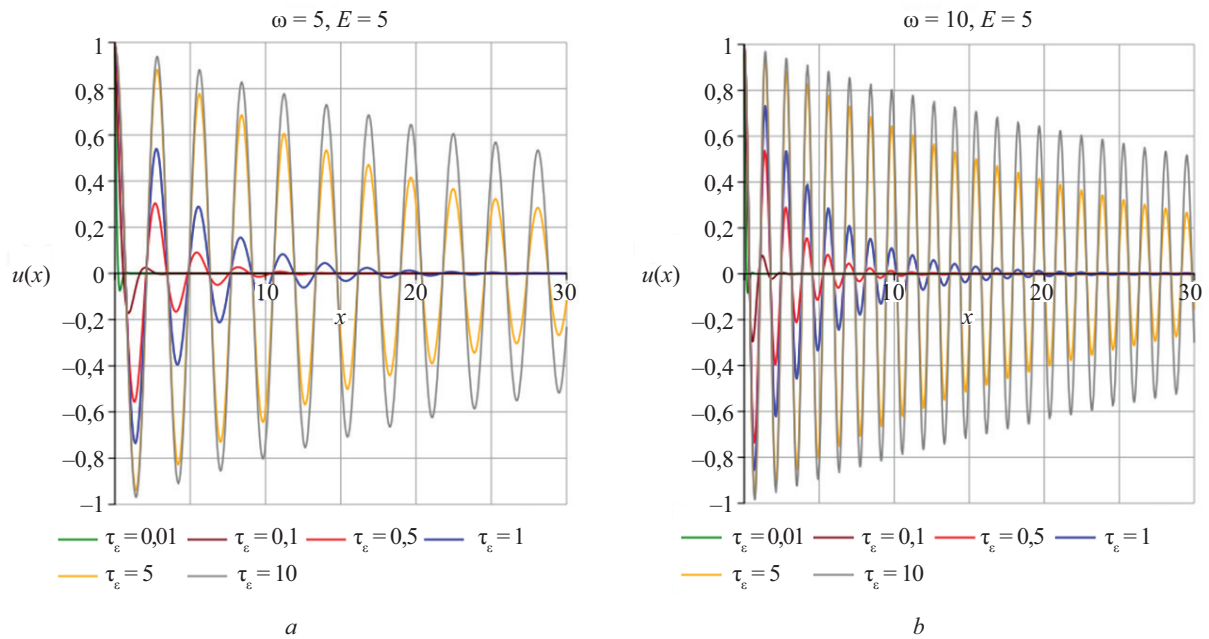
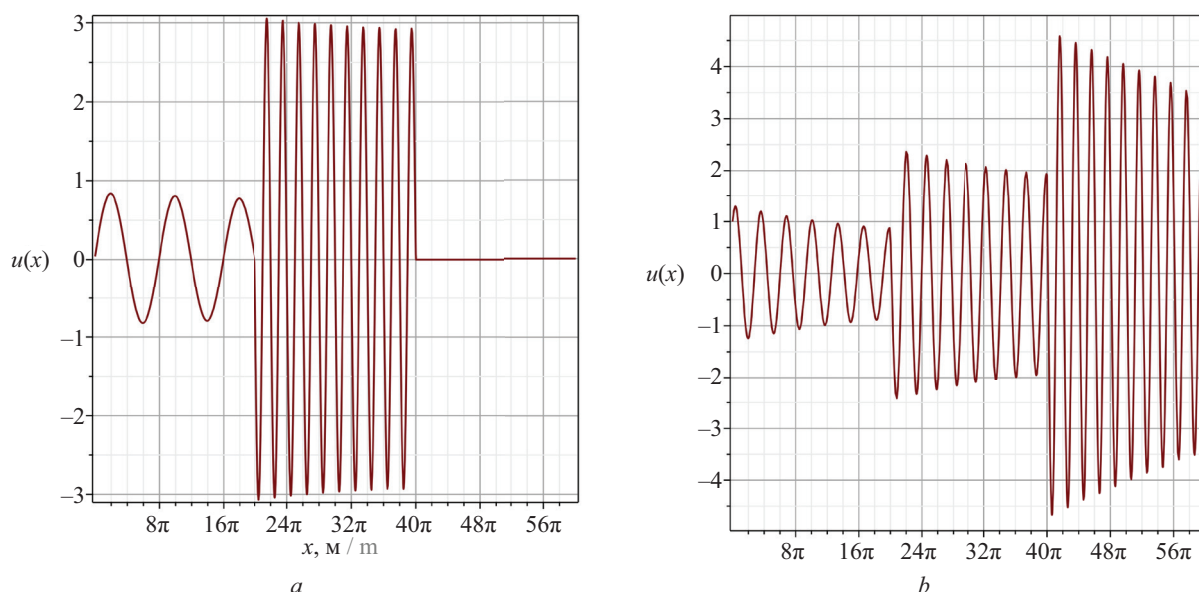


Рис. 6. Графики зависимости амплитуд колебаний для модели Максвелла при различных частотах колебаний внешнего воздействия и времени релаксации

Fig. 6. Graphs of the dependence of vibration amplitudes for the Maxwell model at different frequencies of external excitation and relaxation times

возрастание амплитуды при переходе волны из слоя в слой. На рис. 7 приведены два примера полубесконечного упругого стержня, состоящего из трех слоев. Первый пример иллюстрирует ситуацию, когда  $E_1\rho_1 > E_2\rho_2 \ll E_3\rho_3$ . Как видно на графике (рис. 7, a), ампли-

туда на втором участке гораздо больше, чем на первом и третьем участках. Второй пример основан на предположении, что  $E_1\rho_1 > E_2\rho_2 > E_3\rho_3$ . На графике (рис. 7, b) видно, что при переходе из одного слоя в другой амплитуда возрастает.



**Рис. 7.** Графики амплитуд колебаний для модели Кельвина – Фойгта: *a* —  $E_1 = 16, E_2 = 1, E_3 = 10\,000\,000$  для  $\tau_{\sigma,1} = \tau_{\sigma,2} = \tau_{\sigma,3} = 0,01, l_1 = l_2 = l_3 = 20\pi, \rho_1 = \rho_2 = 1, \rho_3 = 10\,000\,000$ ; *b* —  $E_1 = 256, E_2 = 16, E_3 = 1, \tau_{\sigma,1} = \tau_{\sigma,2} = \tau_{\sigma,3} = 0,01, \rho_1 = 100, \rho_2 = 10, \rho_3 = 1, l_1 = l_2 = l_3 = 20\pi$

**Fig. 7.** Vibration amplitude plots for the Kelvin – Voigt model: *a* —  $E_1 = 16, E_2 = 1, E_3 = 10,000,000$  for  $\tau_{\sigma,1} = \tau_{\sigma,2} = \tau_{\sigma,3} = 0.01, l_1 = l_2 = l_3 = 20\pi, \rho_1 = \rho_2 = 1, \rho_3 = 10,000,000$ ; *b* —  $E_1 = 256, E_2 = 16, E_3 = 1, \tau_{\sigma,1} = \tau_{\sigma,2} = \tau_{\sigma,3} = 0.01, \rho_1 = 100, \rho_2 = 10, \rho_3 = 1, l_1 = l_2 = l_3 = 20\pi$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основе проведенного исследования моделирования распространения гармонических продольных волн в дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях можно сформулировать следующие выводы:

1. Разработан универсальный аналитический метод решения задачи о гармонических продольных волнах в полубесконечных дискретно-неоднородных вязкоупругих стержнях, позволяющий корректно учитывать условия сшивки на границах слоев и анализировать любые комбинации упругих и вязкоупругих участков.

2. Получены явные дисперсионные соотношения с комплексным волновым числом, определяющим как дисперсию, так и затухание.

3. Проведен параметрический анализ моделей вязкоупругости. Для модели Кельвина – Фойгта установлено, что при фиксированном модуле упругости  $E$  рост времени ретардации  $\tau_\sigma$  усиливает вязкое демпфирование; для  $\tau_\sigma \gg 1$  волна затухает уже на начальном участке распространения (рис. 3, *a*).

Для модели Максвелла увеличение времени релаксации  $\tau_\epsilon$  при постоянном  $E$  уменьшает затухание; увеличение модуля упругости ускоряет фазовое продвижение и перестраивает картину максимумов/минимумов (рис. 3, *b–d*). Для модели СЛТТ сочетание  $\tau_\epsilon$  и  $\tau_\sigma$  позволяет независимо настраивать ползучесть и релаксацию, что демонстрируют графики (рис. 3, *e, f*).

4. Установлены условия резкого возрастания амплитуды при переходе волны через границу слоев. На основе векторного представления амплитуд получены критерии, связывающие отношение модулей упругости и плотностей соседних слоев с усилением колебаний; численные примеры (рис. 7) подтверждают возможность многократного роста амплитуды во втором слое для  $E_2 < E_1, E_3$ .

5. Полученные зависимости и критерии усиления амплитуд позволяют в первом приближении целенаправленно проектировать сейсмические метаматериалы с заданными полосами запрещенных частот, а также сейсмические барьеры, улавливающие энергию поверхностных волн в мягких слоях.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Баенова Г.М., Сеньковская А.А. Обзор фоновых кристаллов и акустических метаматериалов // Тенденции развития науки и образования. 2021. № 72-1. С. 23–26. DOI: 10.18411/lj-04-2021-03. EDN GSXMNL.

2. Lim C.W. From photonic crystals to seismic metamaterials: a review via phononic crystals and acoustic metamaterials // Archives of Computational Methods in Engineering. 2021. Vol. 29. Issue 2. Pp. 1137–1198. DOI: 10.1007/s11831-021-09612-8

3. Кузнецов С.В., Саиян С.Г. Нелинейные акустические волны в гиперупругих стержнях // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2025. № 2. С. 210–225. DOI: 10.31857/S1026351925020129. EDN ANREGK.
4. Ma J. Phonon engineering of micro- and nano-phononic crystals and acoustic metamaterials : a review // Small Science. 2023. Vol. 3. Issue 1. DOI: 10.1002/smssc.202200052
5. Qahtan A.S., Huang J., Amran M., Qader D.N., Fediuk R., Wael A.D. Seismic composite metamaterial : a review // Journal of Composites Science. 2022. Vol. 6. Issue 11. P. 348. DOI: 10.3390/jcs6110348
6. Morozov N.F., Bratov V.A., Kuznetsov S.V. Seismic barriers for protection against surface and head-waves: multiple scatters and metamaterials // Mechanics of Solids. 2021. Vol. 56. Issue 6. Pp. 911–921. DOI: 10.3103/S0025654421060133
7. Bratov V., Kuznetsov S., Morozov N. Seismic barriers filled with solid elastic and granular materials: Comparative analysis // Mathematics and Mechanics of Solids. 2022. Vol. 27. Issue 9. Pp. 1761–1770. DOI: 10.1177/10812865221104235
8. Ormachea J., Parker K.J. Comprehensive viscoelastic characterization of tissues and the inter-relationship of shear wave (group and phase) velocity, attenuation and dispersion // Ultrasound in Medicine & Biology. 2020. Vol. 46. Issue 12. Pp. 3448–3459. DOI: 10.1016/j.ultrasmedbio.2020.08.023
9. Саиян С.Г., Модестов К.А., Брыгар О.А. Моделирование волновых процессов в толстостенной вязкоупругой сферической оболочке при импульсном воздействии // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 4 (61). С. 31–39. DOI: 10.24866/2227-6858/2024-4/31-39. EDN FGFXNM.
10. Shitikova M.V., Modestov K.A., Brygar O.A. Harmonic wave propagation modelling in viscoelastic rods via Rzhantsyn fractional order operators // AIP Conference Proceedings. 2024. Vol. 3177. P. 030003. DOI: 10.1063/5.0294973. EDN EFKMP.
11. Carcione J.M., Kosloff D., Kosloff R. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium // Geophysical Journal International. 1988. Vol. 95. Issue 3. Pp. 597–611. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1988.tb06706.x
12. Lai C.G., Rix G.J., Foti S., Roma V. Simultaneous measurement and inversion of surface wave dispersion and attenuation curves // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2002. Vol. 22. Issue 9–12. Pp. 923–930. DOI: 10.1016/S0267-7261(02)00116-1
13. Shitikova M.V., Krusser A.I. Models of viscoelastic materials : a review on historical development and formulation // Advanced Structured Materials. 2022. Pp. 285–326. DOI: 10.1007/978-3-031-04548-6\_14
14. Lau H.C.P. Surface loading on a self-gravitating, linear viscoelastic Earth: moving beyond Maxwell // Geophysical Journal International. 2024. Vol. 237. Issue 3. Pp. 1842–1857. DOI: 10.1093/gji/ggae149
15. Shu Z., You R., Zhou Y. Viscoelastic materials for structural dampers : a review // Construction and Building Materials. 2022. Vol. 342. P. 127955. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2022.127955
16. Саиян С.Г. Аналитические решения прохождения поверхностных волн через энергопоглощающие сейсмические барьеры // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений : тез. докл. IX Междунар. симпозиума. 2025. С. 102–103. EDN FBKRGV.
17. Modestov K., Saiyan S., Erokhin A., Brygar O. Derivation of the one-dimensional radiation condition in elasticity theory by introducing infinitesimal viscosity // E3S Web of Conferences. 2023. Vol. 410. P. 03025. DOI: 10.1051/e3sconf/202341003025
18. Shitikova M.V., Modestov K.A. Analysis of Harmonic Wave Propagation in Fractional Derivative Viscoelastic Media Based on Time-Dependent Modulus of the P-Wave // Mechanics of Solids. 2024. Vol. 59. Issue 8. Pp. 3949–3967. DOI: 10.1134/S00256544246-07079
19. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 3–40. DOI: 10.31857/S0572329921060118. EDN QMNNKY.
20. Модестов К.А., Шитикова М.В. Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25. № 2. С. 214–230. DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230. EDN PVASPW.
21. Gulkanov A.G., Modestov K.A., Shitikova M.V., Erokhin A.V. Propagation of harmonic waves in viscoelastic rods via the fractional derivative models // AIP Conference Proceedings. 2025. Vol. 3271. P. 060002. DOI: 10.1063/5.0251912

Поступила в редакцию 20 октября 2025 г.

Принята в доработанном виде 19 декабря 2025 г.

Одобрена для публикации 24 декабря 2025 г.

ОБ АВТОРАХ: Сергей Гургенович Саиян — научный сотрудник Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов им. А.Б. Золотова (НОЦ КМ им. А.Б. Золотова), старший преподаватель кафедры строительной и теоретической механики, преподаватель

кафедры информатики и прикладной математики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; младший научный сотрудник; **Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской академии наук (ИПМех РАН)**; 119526, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1; SPIN-код: 3337-7862, РИНЦ ID: 987238, Scopus: 57195230884, ResearcherID: AAT-1424-2021, ORCID: 0000-0003-0694-4865; berformert@gmail.com;

**Анастасия Андреевна Марасанова** — студент; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; marasanova2004@gmail.com;

**Ксения Дмитриевна Иванченко** — студент; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; ivanchenko.ksenia@gmail.com;

**Константин Анатольевич Модестов** — старший преподаватель кафедры общей и прикладной физики; **Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ)**; 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; младший научный сотрудник Международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук имени заслуженного деятеля науки РФ профессора Россихина Ю.А.; **Воронежский государственный технический университет (ВГТУ)**; 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84; SPIN-код: 6850-4620, РИНЦ ID: 635355, Scopus: 57202800599, ResearcherID: C-9948-2016, ORCID: 0000-0003-4596-2652; ModestovKA@mgsu.ru.

*Вклад авторов:*

*Саиян С.Г. — научное руководство, концепция исследования, методология исследования, анализ результатов исследования, написание текста статьи, научное редактирование текста, итоговые выводы.*

*Марасанова А.А. — написание текста статьи, расчеты в MapleSoft.*

*Иванченко К.Д. — написание текста статьи, расчеты в MapleSoft.*

*Модестов К.А. — разработка математической модели, научное редактирование текста.*

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. Baenova G.M., Sen'kovskaya A.A. Review of phononic crystals and acoustic metamaterials. *Trends in the Development of Science and Education*. 2021; 72-1:23-26. DOI: 10.18411/lj-04-2021-03. EDN GSXMNL. (rus.).
2. Lim C.W. From photonic crystals to seismic metamaterials : a review via phononic crystals and acoustic metamaterials. *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2021; 29(2):1137-1198. DOI: 10.1007/s11831-021-09612-8
3. Kuznecov S.V., Saiyan S.G. Nonlinear acoustic waves in hyperelastic rods. *Mechanics of Solids*. 2025; 2:210-225. DOI: 10.31857/S1026351925020129. EDN ANREGK. (rus.).
4. Ma J. Phonon engineering of micro- and nanophononic crystals and acoustic metamaterials : a review. *Small Science*. 2023; 3(1). DOI: 10.1002/smssc.202200052
5. Qahtan A.S., Huang J., Amran M., Qader D.N., Fediuk R., Wael A.D. Seismic composite metamaterial : a review. *Journal of Composites Science*. 2022; 6(11):348. DOI: 10.3390/jcs6110348
6. Morozov N.F., Bratov V.A., Kuznetsov S.V. Seismic barriers for protection against surface and headwaves: multiple scatters and metamaterials. *Mechanics of Solids*. 2021; 56(6):911-921. DOI: 10.3103/S00256-54421060133
7. Bratov V., Kuznetsov S., Morozov N. Seismic barriers filled with solid elastic and granular materials: Comparative analysis. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022; 27(9):1761-1770. DOI: 10.1177/10812865221104235
8. Ormachea J., Parker K.J. Comprehensive viscoelastic characterization of tissues and the inter-relationship of shear wave (group and phase) velocity, attenuation and dispersion. *Ultrasound in Medicine & Biology*. 2020; 46(12):3448-3459. DOI: 10.1016/j.ultrasmedbio.2020.08.023
9. Saiyan S.G., Modestov K.A., Brygar O.A. Modeling of wave processes in a thick-walled viscoelastic spherical shell under impulse load. *FEFU: School of Engineering Bulletin*. 2024; 4(61):31-39. DOI: 10.24866/2227-6858/2024-4/31-39. EDN FGFXNM. (rus.).
10. Shitikova M.V., Modestov K.A., Brygar O.A. Harmonic wave propagation modelling in viscoelastic rods via Rzhantsyn fractional order operators. *AIP Conference Proceedings*. 2024; 3177:030003. DOI: 10.1063/5.0294973. EDN EFIKMP.
11. Carcione J.M., Kosloff D., Kosloff R. Wave propagation simulation in a linear viscoelastic medium. *Geophysical Journal International*. 1988; 95(3):597-611. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1988.tb06706.x
12. Lai C.G., Rix G.J., Foti S., Roma V. Simultaneous measurement and inversion of surface wave dispersion and attenuation curves. *Soil Dynamics and*

*Earthquake Engineering*. 2002; 22:9-12:923-930. DOI: 10.1016/S0267-7261(02)00116-1

13. Shitikova M.V., Krusser A.I. Models of viscoelastic materials : a review on historical development and formulation. *Advanced Structured Materials*. 2022; 285-326. DOI: 10.1007/978-3-031-04548-6\_14

14. Lau H.C.P. Surface loading on a self-gravitating, linear viscoelastic Earth: moving beyond Maxwell. *Geophysical Journal International*. 2024; 237(3): 1842-1857. DOI: 10.1093/gji/ggae149

15. Shu Z., You R., Zhou Y. Viscoelastic materials for structural dampers : a review. *Construction and Building Materials*. 2022; 342:127955. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2022.127955

16. Saiyan S.G. Analytical solutions for the propagation of surface waves through energy-absorbing seismic barriers. *Actual Problems of Computer Modeling of Structures : Proceedings Abstracts of the 9th International Symposium*. 2025; 102-103. EDN FBKRGV. (rus.).

17. Modestov K., Saiyan S., Erokhin A., Brygar O. Derivation of the one-dimensional radiation condition in elasticity theory by introducing infinitesimal viscos-

ity. *E3S Web of Conferences*. 2023; 410:03025. DOI: 10.1051/e3sconf/202341003025

18. Shitikova M.V., Modestov K.A. Analysis of Harmonic Wave Propagation in Fractional Derivative Viscoelastic Media Based on Time-Dependent Modulus of the P-Wave. *Mechanics of Solids*. 2024; 59(8):3949-3967. DOI: 10.1134/S0025654424607079

19. Shitikova M.V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids : a review. *Mechanics of Solids*. 2022; 1:3-40. DOI: 10.31857/S0572329921060118. EDN QMNNKY. (rus.).

20. Modestov K.A., Shitikova M.V. Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2025; 25(2):214-230. DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230. EDN PVASPW. (rus.).

21. Gulkanov A.G., Modestov K.A., Shitikova M.V., Erokhin A.V. Propagation of harmonic waves in viscoelastic rods via the fractional derivative models. *AIP Conference Proceedings*. 2025; 3271:060002. DOI: 10.1063/5.0251912

Received October 20, 2025.

Adopted in revised form on December 19, 2025.

Approved for publication on December 24, 2025.

**BI O N O T E S :** **Sergey G. Saiyan** — research fellow at the A.B. Zolotov Scientific and Educational Center for Computer Modeling of Unique Buildings, Structures, and Complexes, senior lecturer at the Department of Structural and Theoretical Mechanics, lecturer at the Department of Computer Science and Applied Mathematics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; junior research fellow; **Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences (IPMech RAS)**; build. 1, 101 Vernadsky ave., Moscow, 119526, Russian Federation; SPIN-code: 3337-7862, ID RSCI: 987238, Scopus: 57195230884, ResearcherID: AAT-1424-2021, ORCID: 0000-0003-0694-4865; berformert@gmail.com;

**Anastasia A. Marasanova** — student; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; marasanova2004@gmail.com;

**Ksenia D. Ivanchenko** — student; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; ivanchenko.ksenia@gmail.com;

**Konstantin A. Modestov** — senior lecturer of the Department of General and Applied Physics; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; junior researcher at the International Scientific Center for Fundamental Research in the Field of Natural and Construction Sciences named after Honored Scientist of the Russian Federation Professor Yu.A. Rossikhin; **Voronezh State Technical University (VSTU)**; 84, 20 let Oktyabrya st., Voronezh, 394006, Russian Federation; SPIN-code: 6850-4620, ID RSCI: 635355, Scopus: 57202800599, ResearcherID: C-9948-2016, ORCID: 0000-0003-4596-2652; ModestovKA@mgsu.ru.

*Contribution of the authors:*

*Sergey G. Saiyan* — scientific supervision, research concept development, research methodology, analysis of research results, article writing, scientific text editing, and final conclusions.

*Anastasia A. Marasanova* — article writing, calculations in MapleSoft.

*Ksenia D. Ivanchenko* — article writing, calculations in MapleSoft.

*Konstantin A. Modestov* — development of the mathematical model, scientific text editing.

*The authors declare that there is no conflict of interest.*