

# ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.074:531.391.3

DOI: 10.22227/1997-0935.2026.3.315-322

## Методы аналитического расчета частоты собственных колебаний фермы пространственной консоли

Михаил Николаевич Кирсанов

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Расчет частоты собственных колебаний строительных конструкций, как правило, выполняется численными методами. Для оценки границ частоты колебаний простых статически определимых конструкций известны методы получения аналитических решений. Если конструкция регулярная и имеет периодическую структуру, то возможности аналитических методов расширяются. С помощью метода индукции в расчетную формулу для собственной частоты можно ввести дополнительный важный параметр — число периодических структур конструкции, например число панелей. Приближенный метод Рэлея дает оценку частоты колебаний сверху, а метод Донкерлея — оценку снизу. Предлагается схема консольной пространственной статически определимой фермы с регулярной структурой и приводится вывод формулы для ее первой частоты колебаний тремя аналитическими методами.

**Материалы и методы.** Ферма состоит из шести соединенных по длинным сторонам плоских ферм с раскосной решеткой. Крепление консольной конструкции к вертикальному основанию выполнено на шести опорах. Для определения жесткости фермы используется формула Максвелла – Мора и система компьютерной математики Maple. Выводится формула для зависимости первой частоты колебаний на основе методов Донкерлея и Рэлея, в которые вносятся упрощения, связанные с суммированием. Зависимость частоты от числа панелей находится индуктивным методом обобщения результатов, полученных для отдельных решений в символьном виде на произвольный случай.

**Результаты.** Аналитические решения сравниваются с численным, полученным для первой частоты из анализа спектра частот. Показано, что точность аналитических решений немонотонно зависит от числа панелей, и для трех использованных методов эта зависимость разная.

**Выводы.** Модифицированный метод Рэлея для небольшого числа панелей по сравнению с методами на основе подхода Донкерлея продемонстрировал наибольшую точность. Погрешность всех трех методов существенно зависит от размеров конструкции и числа панелей. Аналитическая форма результатов позволяет использовать найденные решения в задачах оптимизации конструкции.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** плоская ферма, аналитическое решение, собственная частота, Maple, метод Донкерлея, метод коллокации, вторая собственная частота

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Кирсанов М.Н. Методы аналитического расчета частоты собственных колебаний фермы пространственной консоли // Вестник МГСУ. 2026. Т. 21. Вып. 3. С. 315–322. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.3.315-322

Автор, ответственный за переписку: Михаил Николаевич Кирсанов, c216@ya.ru.

## Methods of analytical calculation of a spatial console truss natural oscillations frequency

Mikhail N. Kirsanov

National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI); Moscow, Russian Federation

### ABSTRACT

**Introduction.** Numerical methods are usually used to calculate the natural oscillation frequency of building structures. Methods for obtaining analytical solutions are known to estimate the oscillation frequency limits of simple statically determinate structures. If the structure is regular and has a periodic structure, the capabilities of analytical methods are expanded. The induction method adds an additional important parameter to the solution formula — the number of periodic structures of the structure, for example, the number of panels. The approximate Rayleigh method gives an upper estimate of the oscillation frequency, and the Dunkerley method gives a lower estimate. In this paper, a diagram of a cantilever spatial statically determinate truss with a regular structure is proposed and a formula for its first oscillation frequency is derived using three analytical methods.

**Materials and methods.** The truss consists of six flat trusses with a diagonal lattice connected along their long sides. The cantilever structure is fastened to the vertical base on six supports. To determine the rigidity of the truss, the Maxwell – Mohr formula and the Maple computer mathematics system are used. A formula is derived for the dependence of the first oscillation frequency based on the Dunkerley and Rayleigh methods, which are simplified due to summation. The dependence of the frequency on the number of panels is found by the inductive method of generalizing the results obtained for individual solutions in symbolic form to an arbitrary case.

**Results.** Analytical solutions are compared with the numerical one obtained for the first frequency from the frequency spectrum analysis. It is shown that the accuracy of the analytical solution depends non-monotonically on the number of panels and this dependence is different for the three methods used.

**Conclusions.** The modified Rayleigh method for a small number of panels showed the highest accuracy compared to the methods based on the Dunkerley approach. The error of all three methods depends significantly on the dimensions of the structure and the number of panels. The analytical form of the results allows using the found solutions in design optimization problems.

**KEYWORDS:** spatial truss, consol, analytical solution, natural frequency, Maple, Rayleigh method, Dunkerley method

**FOR CITATION:** Kirsanov M.N. Methods of analytical calculation of a spatial console truss natural oscillations frequency. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2026; 21(3):315-322. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.3.315-322 (rus.).

*Corresponding author:* Mikhail N. Kirsanov, C216@ya.ru.

## ВВЕДЕНИЕ

Расчет собственных частот конструкций является одной из наиболее распространенных задач строительной механики. Обычно для этого применяются численные методы, реализованные в специальных инженерных программах с применением метода конечных элементов (МКЭ) [1, 2]. В основу расчетов элементов конструкций положен МКЭ в форме классического смешанного метода [3]. Аналитические решения задач строительных конструкций возникли как альтернатива численным методам в основном на базе систем компьютерной математики Mathematica [4] и Maple [5, 6]. Расчетные формулы для собственной частоты колебаний плоской статически определимой фермы с шпренгельной решеткой и зависимость области резонансно безопасных частот от размеров получены в работах [7, 8]. В исследовании [9] методами Донкерлея и Рэлея получены аналитические оценки первой собственной частоты колебаний плоской распорной фермы рамного типа и численно проанализирован весь частотный спектр конструкции. Методы Донкерлея и Рэлея сравниваются в труде [10] на примере расчета основной частоты колебаний плоской балочной фермы с простой треугольной решеткой. Получены спектр частот колебаний плоской балочной фермы и простое аналитическое выражение для первой частоты [11]. Аналитические решения для пространственных стержневых конструкций встречаются реже. Методом индукции выведена формула для частоты колебаний Г-образной пространственной фермы с целью обобщения решения на произвольное число панелей [12]. Аналогичным методом получено решение и для пространственной консоли [13], составленной из трех плоских ферм с крестообразной решеткой. Статические деформации фермы составной пространственной рамы изучены в аналитическом виде [14]. Рассчитаны деформации прямоугольной в плане пространственной фермы четырехскатного покрытия [15]. Получены формулы для собственной частоты шестигранной фер-

мы башенного типа с произвольным числом панелей с учетом различных сечений в стержнях методом Донкерлея [16]. Основные вопросы аналитических расчетов регулярных статически определимых стержневых систем впервые подняли R.G. Hutchinson и N.A. Fleck [17, 18]. Теория и некоторые методы расчета регулярных стержневых систем изложены в публикации [19]. Проблемы оптимизации и расчета регулярных стержневых систем изучались в работах А. Kaveh [20, 21].

В настоящем исследовании предлагаются регулярная модель пространственной стержневой конструкции консольного типа и методы аналитического расчета ее первой частоты собственных колебаний.

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

### Модель конструкции. Методы расчета частоты

Горизонтально расположенная пространственная консольная ферма длиной  $na$  и общей высотой  $3h$  крепится к вертикальной стенке на сферическом шарнире  $A_1$ , цилиндрическом  $A_3$  и четырех горизонтальных стержнях  $A_2, A_4, A_5, A_6$  (рис. 1). Ширина фермы равна  $2b$ . Всего в конструкции  $h = 18(n + 1)$  шарнирно соединенных стержней, включая девять опорных, и  $K = 6(n + 1)$  внутренних узлов.

Ферма составлена из шести соединенных по длинным сторонам плоских раскосных ферм одинаковых по структуре и трех дополнительных стержней на свободном конце, направленных радиально из среднего узла нижней грани фермы (рис. 2).

*Метод Донкерлея.* Есть несколько способов получения аналитических оценок первой частоты собственных колебаний фермы. Метод парциальных частот Донкерлея дает простую нижнюю оценку первой частоты системы с  $K$  степенями свободы [8]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{i=1}^K \omega_i^{-2}, \quad (1)$$

где  $\omega_i$  — частота колебания отдельной массы  $m$  в узле  $i$ . Если рассматривать только вертикальные

по оси  $z$  колебания узлов, пренебрегая движениями узлов по направлению других осей, то число степеней свободы в такой упрощенной системе равно числу узлов  $K$ . Уравнение колебаний отдельной точки массой  $m$  по оси  $z$  имеет вид:  $m\ddot{z}_i + d_i z_i = 0$ , где  $z_i$  — смещение массы по оси  $z$ ;  $\ddot{z}_i$  — ее ускорение;  $d_i$  — жесткость узла в конструкции. Парциальная частота массы:  $\omega_i = \sqrt{d_i/m}$ . Жесткость вычисляется как величина, обратная податливости  $\delta_p$ , по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_i = 1/d_i = \sum_{j=1}^n (S_j^{(i)})^2 l_j / (EF), \quad (2)$$

где  $S_j^{(i)}$  — усилие в стержне с номером  $j$  от действия единичной вертикальной силы, приложенной к массе с номером  $i$ ;  $EF$  — продольная жесткость стержней одинаковая у всех стержней конструкции. Из выражения (1) следует:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = m \Delta_n. \quad (3)$$

Усилия в стержнях, входящие в формулу Максвелла – Мора (2), определяются методом вырезания узлов фермы. Для этого составляется система  $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$  уравнений равновесия всех узлов в проекции на три оси координат, где  $\mathbf{s}$  — вектор неизвестных усилий и реакции опор. Все внешние нагрузки содержатся в векторе  $\mathbf{T}$  длиной  $\eta$ . Нагрузки на узел с номером  $i$ , направленные по оси  $x$ , записываются в элементы этого вектора вида:  $T_{3i-1}$ , по оси  $y$  — в элементы  $T_{3i-2}$ , по оси  $z$  — в элементы  $T_{3i}$ . Решение для усилий находится с помощью оператора обратной матрицы системы символьной математики Maple:  $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$ . В программу вносятся координаты узлов и структура соединений стержней в узлы. Все узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 1). Координаты узлов в выбранной системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i+5n+5} = b; \\ x_{i+n+1} &= x_{i+4n+4} = 0; \\ x_{i+2n+2} &= x_{i+3n+3} = -b; \\ y_i &= y_{i+j(n+1)} = ai - a; j = 0, 1, \dots, 5; \\ z_i &= 0; z_{i+3n+3} = z_{i+5n+5} = 2h; \\ z_{i+4n+4} &= 2h + h/2; z_{i+n+1} = h/2; i = 1, \dots, n + 1. \end{aligned}$$

Порядок соединений стержней в шарнирные узлы задается номерами узлов по концам стержней фермы. Стержни шести продольных ребер фермы, например, задаются списками:

$$N_{i+n(j-1)} = [i + (n+1)(j-1), i + n(j-1) + j]; \\ i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, 6.$$

Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  системы уравнений равновесия узлов в проекциях на три оси координат — это направляющие косинусы усилий, которые вычисляются следующим образом:

$$l_{x,i} = (x_{N_{i,1}} - x_{N_{i,2}})/l_i; l_{y,i} = (y_{N_{i,1}} - y_{N_{i,2}})/l_i; \\ l_{z,i} = (z_{N_{i,1}} - z_{N_{i,2}})/l_i; i = 1, \dots, \eta.$$

Последовательный расчет величины  $\Delta_n$  по формуле Максвелла – Мора для различных чисел панелей  $n$  дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (312a^3 + 8c^3 + 24d^3 + 7g^3 + 584h^3 + f^3)/(16h^2EF); \\ \Delta_2 &= (4048a^3 + 48c^3 + 144d^3 + 43g^3 + 2328h^3 + 3f^3)/(32h^2EF); \\ \Delta_3 &= (3560a^3 + 24c^3 + 72d^3 + 22g^3 + 968h^3 + f^3)/(h^2EF); \\ &\dots \\ \Delta_{10} &= (984720a^3 + 880c^3 + 2640d^3 + 851g^3 + 25432h^3 + 11f^3)/(32h^2EF), \dots \end{aligned}$$

В общем случае этот коэффициент имеет вид:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 g^3 + C_5 h^3 + C_6 f^3)/(h^2EF),$$

где средствами Maple из решения рекуррентных уравнений находятся следующие зависимости коэффициентов от числа панелей:

$$\begin{aligned} C_1 &= n(n+1)(28n^2 + 52n + 37)/12; \\ C_2 &= n(n+1)/4; \\ C_3 &= 3n(n+1)/4; C_4 = (8n^2 + 5n + 1)/32; \\ C_5 &= (24n + 49)(n+1)/4; C_6 = (n+1)/32. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи о первой частоте по Донкерлею по формуле (3) имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m \left( C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 g^3 + C_5 h^3 + C_6 f^3 \right)}}. \quad (5)$$

*Упрощенный метод Донкерлея.* В алгоритм метода Донкерлея можно ввести некоторое упрощение, если сумму  $\sum_{i=1}^K \delta_i$ , входящую в выражение (3), рассчитывать по среднему значению  $\delta^{\max}/2$  ее слагаемого:  $\sum_{i=1}^K \delta_i = K \delta^{\max}/2 = K \tilde{\Delta}_n$ . Эта замена связана с тем, что если при численном расчете нет проблем при вычислении суммы в выражении (3), то для аналитических преобразований могут возникнуть трудности суммирования конечного числа слагаемых. Для упрощения вычисление суммы  $\sum_{i=1}^K \delta_i$  по всем  $K$  узлам фермы заменяется половиной произведения значения максимального слагаемого на число степеней свободы  $K$ . Принимается, что максимальное вертикальное смещение приходится на узел с номером  $2n + 2$  на конце консоли (рис. 1, 2). Расчет дает следующую последовательность:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= (24a^3 + 8d^3 + f^3 + g^3 + 168h^3)/(128EFh^2); \\ \tilde{\Delta}_2 &= (112a^3 + 16d^3 + f^3 + g^3 + 232h^3)/(128EFh^2); \\ \tilde{\Delta}_3 &= (296a^3 + 24d^3 + f^3 + g^3 + 296h^3)/(128EFh^2); \\ &\dots \\ \tilde{\Delta}_{10} &= (6960a^3 + 80d^3 + f^3 + g^3 + 744h^3)/(128EFh^2), \dots \end{aligned}$$

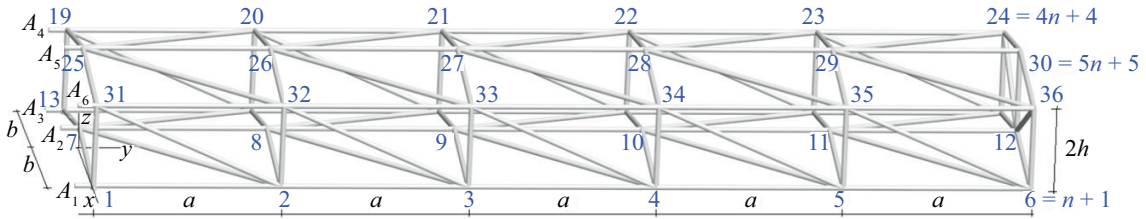


Рис. 1. Схема фермы, нумерация узлов,  $n = 5$

Fig. 1. Truss diagram, node numbering,  $n = 5$

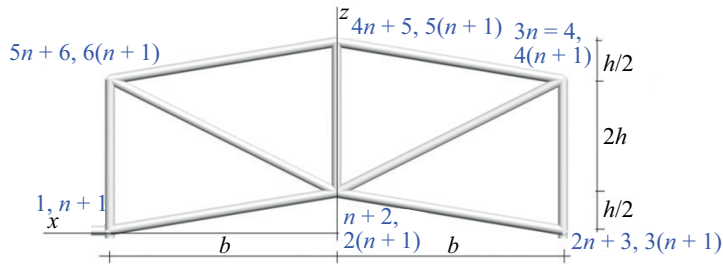


Рис. 2. Сечение консоли,  $y = nh$

Fig. 2. Console section,  $y = nh$

В общем случае для произвольного числа панелей  $n$ :

$$\tilde{\Delta}_n = (D_1 a^3 + D_2 d^3 + D_3 (f^3 + g^3) + D_4 h^3) / (h^2 EF). \quad (6)$$

Коэффициенты в этом выражении находятся методами компьютерной математики из решения рекуррентных уравнений:  $D_1 = n(2n^2 + 6n + 1)/48$ ;  $D_2 = n/16$ ;  $D_3 = 1/128$ ;  $D_4 = (8n + 13)/16$ . Решение для первой частоты приобретает вид:

$$\omega'_D = h \sqrt{\frac{EF}{mK(D_1 a^3 + D_2 d^3 + D_3 (f^3 + g^3) + D_4 h^3)}}. \quad (7)$$

Метод Рэлея. Если метод Донкерлея дает нижнюю оценку первой частоты, то верхнюю и более точную оценку дает метод Рэлея [22]. Формула для верхней оценки частоты колебаний фермы по энергетическому методу Рэлея имеет вид [23]:

$$\omega_R^2 = \sum_{i=1}^K u_i / \sum_{i=1}^K m u_i^2, \quad (8)$$

где  $u_i$  — вертикальное перемещение массы в узле с номером  $i$  при действии на узлы фермы равномерно распределенной единичной вертикальной нагрузки. Для упрощения этой формулы можно заменить сумму  $\sum_{i=1}^K u_i$  ее средним значением  $u_n^* K/2$ , где  $u_n^*$  — наибольший по всем узлам фермы прогиб от действия равномерно распределенной по всем узлам единичной нагрузки, и выполнить такую же процедуру со знаменателем (8). После упрощений формула для приближенной оценки первой частоты примет вид:

$$\omega_R^2 = 1/(m u_n^*). \quad (9)$$

Последовательный расчет  $u_n^*$  для ферм порядков 1, 2, ..., 10 дает следующие выражения:

$$u_1^* = (40a^3 + 16d^3 + g^3 + 344h^3 + f^3)/(16EFh^2);$$

$$u_2^* = (576a^3 + 96d^3 - g^3 + 1416h^3 + 3f^3)/(32EFh^2);$$

$$u_3^* = (1024a^3 + 96d^3 - g^3 + 1200h^3 + 2f^3)/(16EFh^2);$$

...

$$u_{10}^* = (133\,760a^3 + 1760d^3 - 9g^3 + 16\,456h^3 + 11f^3)/(32EFh^2), \dots$$

В общем случае для произвольного числа панелей этот коэффициент имеет вид:

$$u_n^* = (R_1 a^3 + R_2 d^3 + R_3 g^3 + R_4 h^3 + R_5 f^3)/(h^2 EF),$$

где коэффициенты находятся как решения рекуррентных уравнений:

$$R_1 = n(n + 1)(7n^2 + 21n + 2)/24;$$

$$R_2 = n(n + 1)/2; R_3 = (1 - n)/32; \quad (10)$$

$$R_4 = (16n + 27)(n + 1)/4; R_5 = n(n + 1)/32.$$

Таким образом, собственная частота свободных колебаний фермы на основе измененной постановки Рэлея (9) приобретает вид:

$$\omega_R = h \sqrt{\frac{EF}{m(R_1 a^3 + R_2 d^3 + R_3 g^3 + R_4 h^3 + R_5 f^3)}}. \quad (11)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Аналитические решения (5), (7) и (11) можно сравнить с численным решением, полученным как решение задачи о наименьшем собственном значении системы с  $K$  степенями свободы. Для определения собственных частот использован опера-

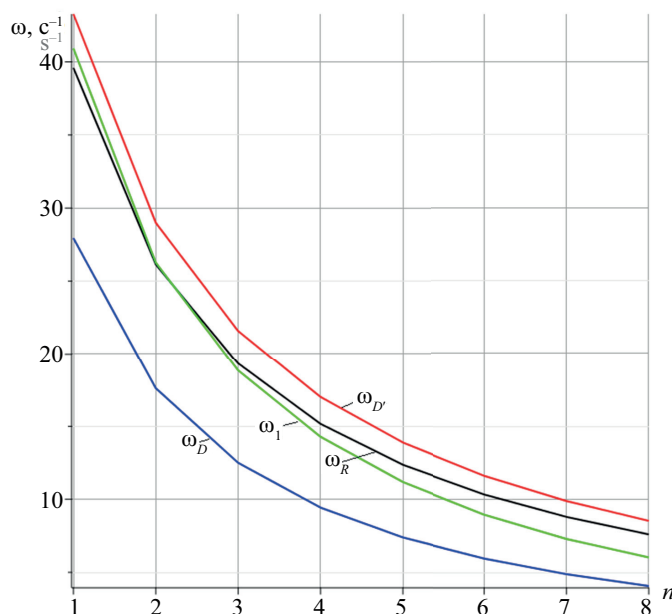


Рис. 3. Зависимость первой частоты от числа панелей, полученная разными методами  
 Fig. 3. Dependence of the first frequency on the number of panels obtained by three methods

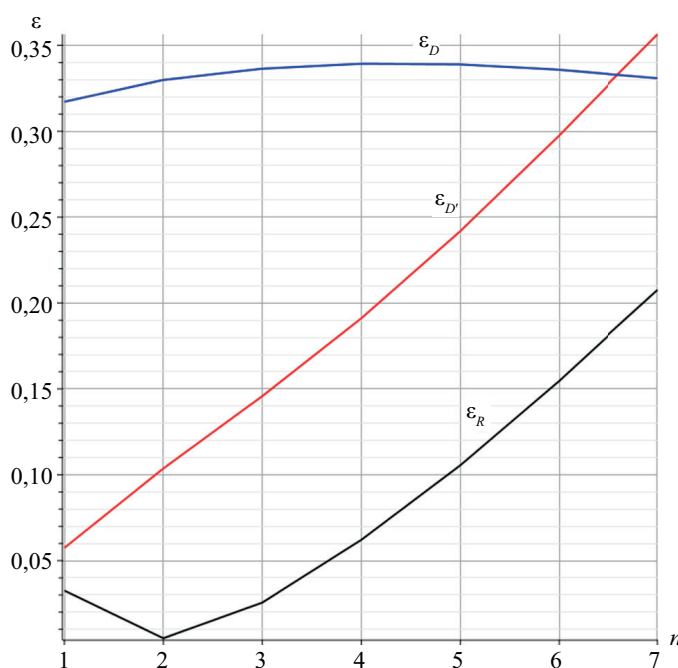


Рис. 4. Зависимость относительной погрешности от числа панелей,  $a = 3$  м  
 Fig. 4. Dependence of relative error on the number of panels,  $a = 3$  м

тор Eigenvalues из пакета LinearAlgebra системы Maple для вычисления собственных чисел матрицы. Для сравнения методов рассмотрены фермы из стали с модулем упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа с площадью поперечного сечения стержней  $F = 4 \text{ см}^2$  массами узлов  $m = 400$  кг и с размером панели  $a = 2$  м. Кривая  $\omega_1$ , пересекающая кривую метода Рэлея  $\omega_R$ , на рис. 3 соответствует численному решению, полученному в системе Maple.

С увеличением числа панелей собственная частота падает. Стандартный метод Донкерля по формуле (5) дает нижнюю границу частоты и наибольшую погрешность — кривая  $\omega_D$ . Наименьшая погрешность получается у метода Рэлея по формуле (11) при небольшом числе панелей. Модифицированный метод Донкерля (7) дает несколько завышенное значение — кривая  $\omega_D$ . Более точно оценить погрешности примененных методов можно по относительным величинам

$\varepsilon_D = |\omega_D - \omega_1|/\omega_1$ ;  $\varepsilon_{D'}$  =  $|\omega_{D'} - \omega_1|/\omega_1$  и  $\varepsilon_R = |\omega_R - \omega_1|/\omega_1$  (рис. 4).

С увеличением числа панелей погрешности  $\varepsilon_R$  и  $\varepsilon_{D'}$ , рассчитанные по модифицированному методу Донкерлея (7) и по решению Рэлея (11), растут.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Приближенные аналитические решения имеют смысл не только, когда они дают простое и точное решение, но и когда точность этих решений при изменении размеров конструкции не сильно меняется, или меняется как-то закономерно. В настоящем расчете замечено, что погрешность находится в разумных нормах лишь при небольшом числе панелей (рис. 4) и начинает расти уже всего при 5–7 панелях. Иная картина наблюдается у плоских ферм. В работе [7] наибольшая погрешность метода Донкерлея в задаче о частоте колебаний плоской шпренгельной ферме достигала 40 % и модифицированного метода Донкерлея — 20 %. При этом результат мало зависел

от размеров конструкции. Аналогичный результат (30 и 15 %) получен в аналогичной задаче [8] для плоской фермы с небольшим подъемом. В исследовании [9] точность методов оценивалась в задаче о колебании плоской распорной фермы. Здесь наилучшая точность 10 %, почти не меняющаяся с ростом числа панелей, достигнута для метода Рэлея в упрощенной форме. А.Н. Маслов [10] методом Рэлея в задаче о колебании простой плоской балочной фермы получил наилучшую погрешность аналитического решения всего в 1 %, и с увеличением числа панелей погрешность только падала. Несмотря на это, аналитические решения для пространственных конструкций, дающие частоту колебаний простым, а главное, альтернативным методом, могут быть полезны на практике и как проверка численного решения, и как предварительная оценка характеристик проектируемых конструкций. При этом, используя аналитические методы, следует на простых тестовых примерах оценивать погрешность решения, иногда сильно зависящую от размеров конструкции.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Borji A., Boroomand B., Movahedian B. Experimental and numerical investigations on wave propagation in planar frames and trusses with shear deformable elements: Introduction of a fast numerical method using degrees of freedom just at joints // Structures. 2024. Vol. 70. P. 107599. DOI: 10.1016/j.istruc.2024.107599. EDN GKXBGX.

2. Li X., Chen T., Jin D. Discrete adaptive mesh refinement for equivalence modelling of planar beamlike periodic truss with rigid joints // Thin-Walled Structures. 2025. Vol. 210. P. 112967. DOI: 10.1016/j.tws.2025.112967. EDN FGSGHV.

3. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с. EDN CSOLBF.

4. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica // Applied Mathematics and Computation. 2007. Vol. 188. Issue 2. Pp. 1426–1429. DOI: 10.1016/j.amc.2006.11.008

5. Rapp B.E. Introduction to Maple // Microfluidics: Modelling, Mechanics and Mathematics. 2017. Pp. 9–20. DOI: 10.1016/b978-1-4557-3141-1.50002-2

6. Goloskokov D.P. Analyzing simply supported plates using Maple system // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA). 2014. Pp. 55–56. DOI: 10.1109/icctpea.2014.6893273

7. Льюнг Конг Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // Строительная меха-

ника и конструкции. 2024. № 2 (41). С. 16–26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002. EDN AKAVDU.

8. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. Vol. 113. Issue 4. P. 11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4. EDN FLBVJY.

9. Луан Л.К. Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2024. № 4 (43). С. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004. EDN MGQUXN.

10. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 109. Issue 4. P. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12. EDN QNZNZW.

11. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. EDN GMNMJQ.

12. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP.

13. Sviridenko O.V., Komerzan E.V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. Vol. 101. Issue 3. P. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1. EDN CKQDPU.

14. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространствен-

ной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. № 4 (35). С. 40–48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005. EDN NCYGXE.

15. *Астахов С.В.* Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // Строительная механика и конструкции. 2024. № 4 (43). С. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003. EDN GITKYF.

16. *Kirsanov M.N.* Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 106. Issue 1. P. 10601. DOI: 10.4123/CUBS.106.1. EDN IPEVXJ.

17. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208

18. *Hutchinson R.G., Fleck N.A.* The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008

19. *Галишикова В.В., Игнатьев В.А.* Регулярные стержневые системы: теория и методы расчета. Волгоград: ВолГАСУ, 2006. EDN QNMMHT.

20. *Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerreza A.* Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering. 2021. Vol. 45. Issue 2. Pp. 513–543. DOI: 10.1007/s40996-020-00527-1

21. *Kaveh A.* Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. 2013. DOI: 10.1007/978-3-7091-1565-7

22. *Кирсанов М.Н.* Метод энергетической коллокации для оценки основной частоты собственных колебаний фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 1 (36). С. 27–37. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.003. EDN UODTDL.

23. *Vorobev O.* Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Issue 7. P. 9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4. EDN ODWWBN.

Поступила в редакцию 15 июня 2025 г.

Принята в доработанном виде 17 июня 2025 г.

Одобрена для публикации 21 января 2026 г.

ОБ АВТОРЕ: **Михаил Николаевич Кирсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFWAAAAJ, IstiniaResearcherID: 2939132; C216@ya.ru.

## REFERENCES

1. Borji A., Boroomand B., Movahedian B. Experimental and numerical investigations on wave propagation in planar frames and trusses with shear deformable elements: Introduction of a fast numerical method using degrees of freedom just at joints. *Structures*. 2024; 70:107599. DOI: 10.1016/j.istruc.2024.107599. EDN GKXBGX.

2. Li X., Chen T., Jin D. Discrete adaptive mesh refinement for equivalence modelling of planar beamlike periodic truss with rigid joints. *Thin-Walled Structures*. 2025; 210:112967. DOI: 10.1016/j.tws.2025.112967. EDN FGSGHV.

3. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. *Finite element method in the form of the classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms)*. Moscow, ASV Publishing House, 2022; 306. EDN CSOLBF. (rus.).

4. Zotos K. Performance comparison of Maple and Mathematica. *Applied Mathematics and Computation*. 2007; 188(2):1426-1429. DOI: 10.1016/j.amc.2006.11.008

5. Rapp B.E. Introduction to Maple. *Microfluidics: Modelling, Mechanics and Mathematics*. 2017; 9-20. DOI: 10.1016/b978-1-4557-3141-1.50002-2

6. Goloskokov D.P. Analyzing simply supported plates using Maple system. *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications (ICCTPEA)*. 2014; 55-56. DOI: 10.1109/icctpea.2014.6893273

7. Luong Cong L. Dependence of the region of resonance-safe frequencies on the sizes of statically determinable flat truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2024; 2(41):16-26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002. EDN AKAVDU. (rus.).

8. Luong C.L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024; 113(4):11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4. EDN FLBVJY.

9. Luan L.C. Estimates of deflection and natural frequency of vibrations of a hinged-rod truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and*

*Structures*. 2024; 4(43):42-53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004. EDN MGQUXN. (rus.).

10. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023; 109(4):10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12. EDN QNZNZW.

11. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):17-26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. EDN GMNMJQ. (rus.).

12. Komerzan E.V., Maslov A.N. Estimation of the l-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):35-45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP. (rus.).

13. Sviridenko O.V., Komerzan E.V. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022; 101(3):10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1. EDN CKQDPU.

14. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. *Structural Mechanics and Structures*. 2022; 4(35):40-48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005. EDN NCGYGE. (rus.).

15. Astakhov S.V. Analytical assessment of the deflection of the rod model of a four-slope roof frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2024; 4(43):34-41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003. EDN GITKYF. (rus.).

16. Kirsanov M.N. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum. *Construction*

*of Unique Buildings and Structures*. 2023; 106(1):10601. DOI: 10.4123/CUBS.106.1. EDN IPEVXJ.

17. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208

18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008

19. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. *Regular rod systems: theory and calculation methods*. Volgograd, VolgGASU, 2006. EDN QNMMHT. (rus.).

20. Kaveh A., Hosseini S.M., Zaerrega A. Size, Layout, and Topology Optimization of Skeletal Structures Using Plasma Generation Optimization. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*. 2021; 45(2):513-543. DOI: 10.1007/s40996-020-00527-1

21. Kaveh A. *Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity*. 2013. DOI: 10.1007/978-3-7091-1565-7

22. Kirsanov M.N. Energy collocation method for the truss fundamental frequency estimation. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 1(36):27-37. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.003. EDN UODTDL. (rus.).

23. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of the first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020; 92(7):9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4. EDN ODWWBN.

Received June 15, 2025.

Adopted in revised form on June 17, 2025.

Approved for publication on January 21, 2026.

**B I O N O T E S:** **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstinaresearcherID: 2939132; C216@ya.ru.